تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

http://ye-thirdsecondr.blogspot.com

الضــرب فـي الصــورة الجبريــة

للأعــداد المركبــة

تعريـف:

إذا كان ع$_1$ = (س$_1$+ ت ص$_1$) 0 ع$_2$(س$_2$+ ت ص$_1$)

فـإن: ع$_1$. ع$_2$ = (س$_1$+ ت ص$_1$) 0 (س$_2$+ ت ص$_2$) ،

= س$_1$ س$_2$+ ت س$_1$ ص$_2$+ ت ص$_1$ س$_2$+ ت^{2}س$_1$ ص$_2$

= س$_1$ س$_2$ + ت س$_1$ص$_2$+ ت ص$_1$س$_2$ − س$_1$ ص$_2$

ع$_1$ 0 ع$_2$= (س$_1$ س$_2$− ص$_1$ ص$_2$) + ت(س$_1$ ص$_2$ + ص$_1$ س$_2$)

مثــال: أوجد ناتج:

(1) (4−3ت) .(2+ 5ت)

(2) (2 + $\sqrt{-9}$) 0 (3− $\sqrt{-25}$) 0 (1+ ت^7)

(3) (1 + $\sqrt{3}$ ت) 0 ($\sqrt{3}$ − 5ت)

(4) (1− 3ت)^2

الحــل:

(1) = 6−8 ت + 15ت − 20ت^2

= 6−8 ت + 15ت + 20= (26+ 7ت)

(2) = (2+3ت) 0 (5−3ت) 0 (1− ت)

= (6−10ت + 9ت + 15) 0 (1− ت)

= (21− ت) 0 (1− ت)

= 21 − 21ت − ت − 1 = (20− 22ت)

(3) (1 + $\sqrt{3}$ ت) 0 ($\sqrt{3}$ − 5ت)

$= \sqrt{3} - 5\text{ت} + 3\text{ت} + 5\sqrt{3}$

$= (6\sqrt{3} - 2\text{ت})$

(4) $(1 - 3\text{ت})^2 = 1 - 6\text{ت} + 9\text{ت}^2$

$= 1 - 6\text{ت} - 9$

$= (-8 - 6\text{ت})$

مثـــال: حل المعادلة

$(\text{س} + 3\text{ت})(\text{ص} - \text{ت}) - 9 = 7\,\text{ت}$

الحـــل

$\therefore$ س ص − ت س + 3ت ص + 3 − 9 = 7ت

$\therefore$ س ص − ت س + 3ت ص − 6 = 7ت

(س ص − 6) + ت(− س + 3ص) = 7 ت

الحقيقي = الحقيقي

$\therefore$ س ص − 6 = 0 .... (1) $\therefore$ ص = $\frac{6}{\text{س}}$

$\therefore$ التخيلي = التخيلي

$\therefore$ − س + 3ص = 7 ....(2)

بالتعويض عن ص في رقم (2)

$\therefore$ − س + 3 × $\frac{6}{\text{س}}$ = 7 بالضرب × (س)

$\therefore$ − س^2 + 18 = 7س $\Leftarrow$ س^2 + 7س − 18 = 0

$\Leftarrow$ (س − 2) (س + 9) = 0

إما   س − 2 = 0   ⇐ س = 2

إما   س + 9 = 0   ⇐ س = −9

مجموعة الحلول

س	2	−9
ص	3	$\frac{-2}{3}$

مثـــال: أوجد س ، ص إذا كان:

(س + ت ص) (1 − ت) + (2س + 3ت ص) (1 + ت) = 7 ت

الحـــل

∴ س − ت س + ت ص + ص + 2س + 2س ت + 3ت ص − 3ص = 7 ت

∴ (3س − 2ص) + (ت س + 4ت ص) = 7 ت

(3س − 2ص) + ت (س + 4ص) = 7ت

∴3س − 2ص = 0 .... (1)

س + 4ص = 7 .... (2)

بالضرب رقم (2) × − 3

−3س − 12ص = −21 .... (3)

3س − 2ص = 0 .... (1)   بالجمـــع

−14ص = −14 ← ص = $\boxed{1}$

بالتعويض عن ص في رقم (1)

∴ 3س − 2 ×1 = 0

∴ 3س = 2 ∴ س= $\frac{2}{3}$

❖خواص ضرب الأعداد المركبة الصورة الجبرية:

(1) عملية الضرب دامجـة:

7ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ∋ م فإن (ع$_1$. ع$_2$). ع$_3$ = ع$_1$(ع$_2$. ع$_3$) على الطالب الإثبات.

(2) الواحد الصحيح هو المحايد الضربي:

∀ ع ∋ م فإن ع × (1) = (1) × ع = ع

البرهــان:

نفرض أن ع = (س+ ت ص) ونفرض أن المحايد الضربي (أ + ت ب)

∵ ع × 1 = ع

∴ (س + ت ص) . (أ + ت ب) = (س + ت ص)

∴ س أ + ت س ب + ت أ ص– ب ص = س + ت ص

∴ (س أ – ب ص) + ت (س ب+ س أ ص) = س+ ت ص

∴ س أ – ب ص= س .... (1)	بالتعويض عن (أ) في رقم (1)
س ب+ ص أ = ص .... (2)	س– ب ص= س
بالضرب رقم (1) في س والثانية في ص	∴ – ب ص =0
∴س^2 أ – ب س ص= س^2.........(3)	∴ ب ص = 0 بالقسمة على (ص)
س ب ص+ ص^2 أ = ص^2........(4) بالجمع	∴ ب = (0)
س^2 أ + ص^2 أ = س^2+ ص^2	∴ أ + ت ب = 1+0= 1
أ (س^2+ ص^2) = س^2+ ص^2	∴ المحايد الضربي = (1، 0)
∴ أ = (1)	

(3) النظيـــــر الضـــــربي للعـــــدد ع = (س+ ت ص) هـــــو : $\frac{1}{\text{ع}}$ =

$$\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} \text{ ، } \frac{-\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\text{ت}$$

البرهــان:

نفـرض أن: (أ + ت ب) هو المعكوس الضربي للعدد (س + ت ص)

∴ (أ + ب ت) . (س + ت ص) =1

∴ أ س + أ ت ص + ب ت س − ب ص $=1$

∴ (أ س − ب ص) + ت (أ ص + ب س) $=1$

∴ أ س − ب ص $= 1$ .... (1)

∴ أ ص + ب س $=0$ .... (2)

بضرب المعادلة (1) في س والمعادلة (2) في ص

أ $س^2$ − ب س ص = س .... (3)

أ $ص^2$ + ب س ص = 0 .... (4)

بالجمع: ∴ أ $س^2$ + أ $ص^2$ = س ⇐ أ ($س^2$ + $ص^2$) = س

$$\therefore أ = \frac{س}{س^2 + ص^2}$$

بالتعويض عن أ في رقم (1).

$$\therefore س \left(\frac{س}{س^2+ص^2}\right) - ب\,ص = 1$$

$$\therefore \frac{س^2}{س^2+ص^2} - ب\,ص = 1 \Leftarrow ب\,ص = \frac{س^2}{س^2+ص^2} - 1$$

$$\Leftarrow ب\,ص = \frac{س^2 - س^2 - ص^2}{س^2+ص^2} = \frac{-ص^2}{س^2+ص^2}$$

$$\Leftarrow ب = \left(\frac{-ص}{س^2+ص^2}\right)$$

∴المعكوس الضربي للعدد س + ت ص هو $\left(\frac{س}{س^2+ص^2} - \frac{ص}{س^2+ص^2}\,ت\right)$

مثـــال: أوجد النظير الضربي لكل من:

(1) 2 − 5ت (2) ($\sqrt{5}$ + $\sqrt{3}$ت)

(3) 2ت (4) (1، −3)

(5) $\frac{6}{7}$ (6) $\frac{8}{9ت}$

الحـــل

(1) النظير الضربي للعدد (2 − 5ت) $= \left(\frac{2}{4+25} + \frac{5}{4+25}\text{ت}\right)$

$= \left(\frac{2}{29} + \frac{5}{29}\text{ت}\right)$

(2) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}\text{ت})$ $= \left(\frac{\sqrt{5}}{5+3} - \frac{\sqrt{3}}{5+3}\text{ت}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\text{ت}\right)$

(3) 2ت $= \left(\frac{0}{0+4} - \frac{2}{0+4}\text{ت}\right) = \left(0 - \frac{2}{4}\text{ت}\right) = -\frac{1}{2}\text{ت}$

والباقي نفسه.

❖ العـدد المرافق لعـدد مركـب:

إذا كان العدد المركب ع = (س + ت ص) فإن مرافقه هو $\bar{\text{ع}}$ = (س − ت ص):

$\bar{\text{ع}}$ يسمى مرافق ع

العدد	**(5+ ت)**	**مرافقه**	**(5− ت)**
	(7−8ت)	**مرافقة**	**(7 + 8ت)**
	3ت	**مرافقة**	**− 3ت**
	9	**مرافقة**	**9**

تعريف العددان المترافقـان:

هـما عددان متسـاويان فـي الحقيـقي ومختلفـان فـي إشـارة التخيلـي ومجموعهما حقيقي صرف وضربهما حقيقي صرف.

❖ خـواص العددان المترافقـان:

(1) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي:

ع + $\bar{\text{ع}}$ = حقيقي صرف.

البـرهـان:

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{\text{ع}}$ = (س − ت ص)

∴ ع + $\bar{\text{ع}}$ = س + ت ص + س − ت ص

= 2 س حقيقي بحت.

(2) حاصل ضرب عددين مترافقان هو عدد حقيقي أي أن:

ع . $\bar{\text{ع}}$ = حقيقي بحت.

البرهـــان: ط$_1$ = (س + ت ص) ، (س − ت ص)

= س^2 − ت ص + ت ص + ص^2 = س^2 + ص^2

∴ ع . $\bar{\text{ع}}$ = (س^2 + ص^2) حقيقي بحت

وعليه: (5 + 2 ت) . (5 − 2ت) = 25 + 4 = 29

اليمن سنـة2000:

(3) برهـــن أن:

ع − $\bar{\text{ع}}$ = تخيلي

البرهـــان:

نفرض أن ع = (س + ت ص)، $\bar{\text{ع}}$ = (س − ت ص)

ط$_1$ = ع − $\bar{\text{ع}}$

= (س + ت ص) − (س − ت ص)

= ~~س~~ + ت ص − ~~س~~ + ت ص

= 2 ت ص تخيلي بحت.

∴ ط$_1$ = ط$_2$

(4) المرافق لمجموع عددين مركبين= مجموع مرافقيهما

أي أن: $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}$ = $\bar{\text{ع}}_1$+$\bar{\text{ع}}_2$

البرهـــان:

نفرض أن ع$_1$= (س$_1$+ ت ص$_1$) ، ع$_2$ = (س$_2$ + ت ص$_2$)

∴ $\bar{\text{ع}}_1$ (س$_1$ − ت ص$_1$) ، $\bar{\text{ع}}_2$ = (س$_2$ − ت ص$_2$)

ط$_1$= $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}$ = [(س$_1$ + س$_2$) + ت (ص$_1$ + ص$_2$)]

= (س$_1$ + س$_2$) − ت (ص$_1$ + ص$_2$)

ط$_2$= $\bar{\text{ع}}_1$+$\bar{\text{ع}}_2$ = (س$_1$ + س$_2$) − ت (ص$_1$+ ص$_2$)

$\therefore$ **ط$_1$ = ط$_2$**

(5) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما:

أي أن: $\overline{\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2} = \bar{\text{ع}}_1 \cdot \bar{\text{ع}}_2$

البرهــان:

$\because$ $\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2 = [\,(\text{س}_1 + \text{ت ص}_1) \times (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)\,]$

$= [\text{س}_1\text{س}_2 + \text{س}_1\text{ت ص}_2 + \text{ت ص}_1\text{ س}_2 - \text{س ص}_1\text{ ص}_2]$

$= [(\text{س}_1\text{ س}_2 - \text{ص}_1\text{ ص}_2) + \text{ت}(\text{س}_1\text{ ص}_2 + \text{ص}_1\text{ س}_2)]$

$\therefore$ $\overline{\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2} = [(\text{س}_1\text{ س}_2 - \text{ص}_1\text{ ص}_2) - \text{ت}(\text{س}_1\text{ ص}_2 + \text{ص}_1\text{ س}_2)]$

$\text{ط}_2 = \bar{\text{ع}}_1 \cdot \bar{\text{ع}}_2 = (\text{س}_1 - \text{ت ص}_1) \cdot (\text{س}_2 - \text{ت ص}_2)$

$= [\text{س}_1\text{ س}_2 - \text{ت س}_1\text{ ص}_2 - \text{ت ص}_1\text{ س}_2 - \text{ص}_1\text{ ص}_2]$

$= [(\text{س}_1\text{ س}_2 - \text{ص}_1\text{ ص}_2) - \text{ت}(\text{س}_1\text{ ص}_2 + \text{ص}_1\text{ س}_2)]$

$\therefore$ ط$_1$ = ط$_2$ #

$\therefore$ ملخص ما سبق:

(1) $\text{ع} + \bar{\text{ع}}$ = حقيقي.	(2) $\text{ع} \cdot \bar{\text{ع}}$ = حقيقي.
(3) $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \bar{\text{ع}}_1 + \bar{\text{ع}}_2$	(4) $\overline{\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2} = \bar{\text{ع}}_1 \cdot \bar{\text{ع}}_2$
(5) $\bar{\bar{\text{ع}}} = \text{ع}$	(6) $\overline{\left(\frac{1}{\text{ع}}\right)} = \frac{1}{\bar{\text{ع}}}$

مثـــال: حلل إلى عددين مركبين مترافقين:

(1) $\text{س}^2 + 1$ (2) $4\text{س}^2 + 9\text{ص}^2$

(3) 5 (4) 13

الحـــل

(1) $\text{س}^2 + 1 = \text{س}^2 - (-1)$

$= \text{س}^2 - \text{ت}^2 = (\text{س} - \text{ت})\,(\text{س} + \text{ت})$

(2) 4س^2 +9ص^2 = 4س^2−9ص^2 ت^2

= (2س− 3ت ص) (2س + 3ت ص)

(3) 5= 4+1= 4− ت = (2 + ت) (2− ت)

(4) 13= 9+4 =9−4 ت^2 = (3 + 2ت) (2−3ت)

مثــال: إذ كـان ع$_1$= (3 − 2ت) ، ع$_2$ = (4 + 5ت)

أوجد (1) $\overline{ع_1+ع_2}$ (2) $\overline{ع_1 \cdot ع_2}$

الحــل

(1) ∵ ع$_1$ + ع$_2$ = (7+3ت)

∴ $\overline{ع_1+ع_2}$ = (7−3ت)

(2) ∵ ع$_1$. ع$_2$ = 12 + 15ت − 8ت + 10 = (22 + 7ت)

∴ $\overline{ع_1 \cdot ع_2}$ = (22−7ت)

اليمن سنـة2001

مثــال: إذا كان ع$_1$ = (5 + ت) ، $\overline{ع_1+ع_2}$ = (8 + 7ت) أوجد ع$_2$

الحــل:

∵ $\overline{ع_1+ع_2}$ = (8 + 7ت)

∴ ع$_1$+ ع$_2$ = (8 − 7ت)

∴ ع$_2$ = (8 − 7ت) − ع$_1$

= 8 − 7ت − 5− ت

= (3 − 8ت)

❖ قسمة العددين المركبين في الصورة الجبرية:

عند قسمة عدد مركب على آخر نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام.

مثــال: أختصر لأبسط صورة:

(1) $\frac{10}{3+\text{ت}}$ (2) $\frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}}$ (3) $\frac{(2+\text{ت})\cdot(1-\text{ت})}{(1+\text{ت})\cdot(3-2\text{ت})}$

الحــل

(1) $= \frac{10}{3+\text{ت}} \times \frac{3-\text{ت}}{3-\text{ت}} = \frac{10(3-\text{ت})}{9+1} = \frac{\cancel{10}(3-\text{ت})}{\cancel{10}} = (3-\text{ت})$

(2) $= \frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}} \times \frac{2+5\text{ت}}{2+5\text{ت}} = \frac{6+15\text{ت}+4\text{ت}-10}{4+25}$

$= \frac{-4+19\text{ت}}{29} = \left(\frac{-4}{29}+\frac{19}{29}\text{ت}\right)$

(3) $= \frac{2-2\text{ت}+\text{ت}+1}{3-2\text{ت}+3\text{ت}+2} = \frac{3-\text{ت}}{5+\text{ت}} \times \frac{5-\text{ت}}{5-\text{ت}} = \frac{15-3\text{ت}-5\text{ت}-1}{25+1}$

$= \frac{14-8\text{ت}}{26} = \frac{14}{26} - \frac{8}{26}\text{ت} = \left(\frac{7}{13}-\frac{4}{13}\text{ت}\right)$

مثــال: إذا كـان ل $= \frac{2+\text{ت}}{1+\text{ت}}$ ، م $= \frac{1+2\text{ت}}{1+\text{ت}}$

أثبت أن: ل ، م مترافقان ثم أحسب قيمة $\frac{15(\text{ل}^2+\text{م}^2)}{8\text{ل}\,\text{م}(\text{ل}+\text{م})}$

الحــل

ل $= \frac{2+\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}} = \frac{2-2\text{ت}+\text{ت}+1}{2} = \left(\frac{3-\text{ت}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\text{ت}\right)$

م $= \frac{1+2\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}} = \frac{1-\text{ت}+2\text{ت}+2}{2} = \frac{3+\text{ت}}{2} = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\text{ت}\right)$

∴ ل ، م مترافقان.

∴ المقدار $= \frac{15\left[\left(\frac{3-\text{ت}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\text{ت}}{2}\right)^2\right]}{8\times\frac{3-\text{ت}}{2}\times\frac{3+\text{ت}}{2}\left[\frac{3}{2}-\cancel{\frac{1}{2}\text{ت}}+\frac{3}{2}+\cancel{\frac{1}{2}\text{ت}}\right]}$

المقدار = $\dfrac{\dfrac{15[9-1-6\text{ت}+9-1+6\text{ت}]}{4}}{8\times\dfrac{10}{4}\binom{6}{2}} = \dfrac{15\times4}{4\times5\times3} = (1)$

مثـــال: إذا كانت $\dfrac{\text{س}+2+\text{ت ص}}{\text{س}-1-\text{ص ت}} = \dfrac{1+4\text{ت}}{\text{ت}-1}$ أوجد قيم س ، ص

الحــل

$\because \dfrac{\text{س}+2+\text{ص ت}}{\text{س}-1-\text{ص ت}} = \dfrac{1-4\text{ت}}{\text{ت}-1}\times\dfrac{-\text{ت}-1}{-\text{ت}-1}$

$= \dfrac{-\text{ت}-1+4-4\text{ت}}{2}$

$\dfrac{\text{س}+2+\text{ص ت}}{\text{س}-1-\text{ص ت}} = \dfrac{3-5\text{ت}}{2}$

2س+ 4 + 2ص ت = 3س− 3 − 3ص ت − 5 ت س + 5ت − 5ص

2س +4 + 2ص ت − 3 س + 3 + 3 ص ت +5ت س −5ت + 5ص = 0

− س + 7 + 5 ت ص + 5 ص + 5ت س−5 ت =0

(− س + 7 + 5ص) + ت (5ص + 5س − 5) =0

− س + 7 + 5 ص =0 ....(1)

+ 5س − 5 + 5ص =............(2) بالطرح:

∴ −6س + 12 =0 ∴ س = 2

بالتعويض عن س في رقم (1)

−2 + 7 + 5 ص = 0 ⇐ 5 ص= −5 ⇐ ص= −1

اليمن سـنة1994ـة

مثـــال: إذا كان س+ ت ص = $\dfrac{1+\text{ت}^5}{2-\text{ت}^9} + \dfrac{1+\text{ت}^7}{1+\text{ت}}$

أثبت أن: $س = \frac{1}{5}$ ، $ص = \frac{-2}{5}$

الحــل

$$\because\ س + ت\,ص = \frac{1+ت}{2-ت} + \frac{1-ت}{1+ت}$$

$$= \frac{1+ت}{2-ت} \times \frac{2+ت}{2+ت} + \frac{1-ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت}$$

$$= \frac{2+ت+2ت-1}{5} + \frac{1-ت-ت-1}{2}$$

$$= \frac{1+3ت}{5} + \frac{-2ت}{2}$$

$$س + ت\,ص = \frac{2+6ت-10ت}{10} = \frac{2-4ت}{10}$$

$\therefore\ س = \frac{2}{10} \Leftarrow س = \boxed{\frac{1}{5}}$ $\therefore\ ص = -\frac{4}{10} \Leftarrow ص = \boxed{-\frac{2}{5}}$

مثـــال: أوجد قيم س ، ص إذا علمت أن:

$$(س + ت\,ص)\ .\ (3 + ت)\ +\ (1 + ت) = 0$$

الحــل

$$\therefore\ (س + ت\,ص)\,(3 + ت) = -1 - ت\ \therefore\ (س + ت\,ص) = \frac{-1-ت}{3+ت} \times \frac{3-ت}{3-ت}$$

$$= \frac{-3+ت-3ت-1}{10} = \frac{-4-2ت}{10} = \left(\frac{-2}{5} - \frac{1}{5}ت\right)$$

$$\therefore\ س = \frac{-2}{5} \quad ، \quad ص = \frac{-1}{5}$$

مثـــال: إذا كان $(أ + ت\,ب)\ .\ (1 - ت) = 2 + ت$

أثبت أن $2\,(أ^3 + ب^3) = 7$

الحــل:

∴ (أ + ت ب) $= \frac{2+\text{ت}}{1-\text{ت}} \times \frac{1+\text{ت}}{1+\text{ت}} = \frac{2+2\text{ت}+\text{ت}-1}{2}$

$= \frac{1+3\text{ت}}{2}$ ∴ (أ + ت ب) $= (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ ت$)$

∴ أ = $\boxed{\frac{1}{2}}$ ، ب = $\boxed{\frac{3}{2}}$

∴ $ط_1$ = 2 (أ^3 + ب^3) = $2\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right) = \cancel{2} \times \frac{28}{\cancel{8}} = 7$

∴ $ط_1 = ط_2$

مثـــال: إذا كان (2+ ت) $ع_1$ − 3$ع_2$ = 3−5ت أوجد قيمة $ع_1$، $ع_2$ حيث $ع_1$، $ع_2$ مترافقان.

الحـــل:

نفرض أن $ع_1$ = (س+ ت ص)، $ع_2$ = (س− ت ص)

(2+ ت) (س+ ت ص) −3 (س− ت ص) = 3−5ت

∴ 2س+ 2ت ص + ت س − ص − 3س + 3 ت ص = 3−5ت

∴ (− س − ص) + ت (س + 5ص) = 3 −5ت

∴ − س − ص = 3 .... (1)

∴ س+ 5ص = −5 .... (2) بالجمع.

4ص = −2 ∴ ص = $-\frac{1}{2}$

بالتعويض عن ص في رقم (1) ∴ − س + $\frac{1}{2}$ = 3 ⇐ س = $-\frac{5}{2}$

∴ $ع_1$ = $(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ ت$)$ ، $ع_2$ = $(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ ت$)$

مثـــال:

أوجد قيمة س ، ص الحقيقتين إذا كان $\frac{\text{س} + 2\text{ت ص}}{2-\text{ت}} + \frac{3\text{س} + \text{ت ص}}{2+\text{ت}} = \frac{23}{5}$

الحـــل

$$\frac{\text{س} + 2\text{ت ص}}{2 - \text{ت}} \times \frac{2 + \text{ت}}{2 + \text{ت}} + \frac{3\text{س} + \text{ت ص}}{2 + \text{ت}} \times \frac{2 - \text{ت}}{2 - \text{ت}} = \frac{23}{5}$$

$$\therefore \frac{2\text{س} + \text{ت س} + 4\text{ت ص} - 2\text{ص}}{5} + \frac{6\text{س} - 3\text{ت س} + 2\text{ت ص} + \text{ص}}{5} = \frac{23}{5}$$

(8س − ص) + ت (−2س + 6ص) = 23

∴ 8س − ص = 23 .... (1)

−2س + 6ص =0 .... (2)

بضرب رقم (1) × (+2) والثانية × (8)

∴ 16س − 2ص = 46 .... (3)

−16س + 48ص = 0 .... (4) بالجمع

46ص = 46 ⇐ ص = (1)

بالتعويض عن ص في رقم (2)

−2 س + 6 = 0 ⇐ −2س = −6

⇐ س = (3)

مجموع الحلول = {3 ، 1}

مثال:

أثبت أن $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = ع

البرهان:

نفرض أن ع = (أ + ت ب) ⇐ $\bar{\text{ع}}$ = أ − ت ب

⇐ $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = أ+ ت ب

⇐ $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = ع

مثال: حل المعادلة: ع + 3 ت $\bar{\text{ع}}$ = 7 + 5ت

الحل

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{\text{ع}}$ = (س − ت ص)

∴ (س+ ت ص) + 3ت (س− ت ص) = (7 + 5ت)

∴ س + ت ص+ 3 ت س + 3ص = 7 + 5ت

∴ (س+ 3ص) + ت (ص + 3س) = 7 + 5ت

∴ س + 3 ص= 7 .... (1)

∴ 3س + ص= 5 .... (2)

بالضرب × رقم (1) في (−3)

∴ − 3س − 9ص = −21 ....(3)

∴ 3س +ص= 5 ....(4) بالجمع

− 8 ص = −16 ص= 2

بالتعويض عن ص في رقم (1)

س+ 6 = 7 ∴ س= ($\boxed{1}$) ∴ ع = (2+1ت)

مثـــال: حل المعادلـة

ع^2 − 4 ع̄ + 13 =0

الحـــل

نفرض أن ع = (س+ ت ص)، ع̄ = (س − ت ص)

∴ (س+ ت ص)^2 − 4 (س+ ت ص)+ 13= 0

س^2+ 2 ت س ص− ص^2 − 4س+ 4 ت ص+ 13= 0

(س^2− ص^2− 4س+ 13) + ت (2 س ص + 4 ص) = 0

∴ س^2− ص^2 −4س + 13= 0 .... (1)

∴ 2س ص + 4 ص = 0 .... (2)

ومنـها 2ص (س + 2) = 0

إما 2ص = 0 ⇐ ص = 0 إما س + 2 = 0 ⇐ س = −2

(1) عندما ص = 0 ∴ س^2 − 4س + 13 = 0

$\because$ أ = 1 ، ب = −4 ، جـ = 13

Δ = ب^2 − 4 أ جـ = 16 − 4 × 1 × 13 = −36

$\therefore$ س = $\dfrac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ}$ = $\dfrac{4 \pm 6ت}{2}$ = 2 ± 3ت

(2) عندما س = −2

$\therefore$ 4 − ص^2 + 8+13 =0 $\therefore$ ص^2 = 25 $\therefore$ ص = ±5

س	−2	2 ± 3ت
ص	±5	0

مثـــال: حل المعادلة: ع^2= $(\bar{ع})^2$ مبيناً أن ع حقيقي بحت أو ع تخيلي بحت.

الحـــل

$\because$ ع^2 − $(\bar{ع})^2$ = 0

$\therefore$ (س + ت ص)^2 − (س − ت ص)^2= 0

$\therefore$ س^2+ 2ت س ص− ص^2 − (س^2− 2ت س ص− ص^2) =0

$\therefore$ س^2 + 2ت س ص− ص^2− س^2+ 2ت س ص+ ص^2 =0

$\therefore$ 4 ت س ص = 0 بالقسمة على (4ت)

$\therefore$ س ص =0

أمـــا س= 0	أو ص =0
(1) عندما س = 0	(2) عندما ص = 0
ع = س + ت ص	$\therefore$ ع = س حقيقي بحت
ع = 0 + ت ص	
ع = ت ص تخيلي بحت	

مثـــال: إذا كان:

$\sqrt{س+ت ص}$= أ + ب ت أوجد قيمة المقدار $\sqrt{س− ت ص}$

الحـــل

∵ $س + ت ص = أ + ب ت$

∴ $\sqrt{-س - ت ص} = \sqrt{-(س + ت ص)}$

$= \sqrt{(س + ت ص)}\ ت = (أ + ب ت)\ ت$

$= (أ ت - ب) = -ب + أ ت$

مثال: إذا كان ن ∈ ص ⊕

أثبت أن: $\frac{(1+ت)^{ن}}{(1-ت)^{ن-2}} = 2ت^{ن+3}$ ومنها أثبت أن $\frac{2(1-ت)^{83}}{(1+ت)^{85}} = 1$

الحــل

$ط_1 = \frac{(1+ت)^{ن}}{(1-ت)^{ن} \times (1-ت)^{-2}} = \frac{(1+ت)^{ن}(1+ت)^{2}}{(1-ت)^{ن}}$

$ط_1 = \frac{(1+ت)^{ن}(1-ت)^{2}}{(1-ت)^{ن}} = \left(\frac{1+ت}{1-ت}\right)^{ن} (1-ت)^{2}$

$ط_1 = \left(\frac{1+ت}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت}\right)^{ن} (1-2ت-1)$

$ط_1 = \left(\frac{\cancel{1}+ت+ت-\cancel{1}}{2}\right)^{ن} \times -2ت = (ت)^{ن} \times -1 \times 2 \times ت$

$ط_1 = ت^{ن} \times ت^{2} \times 2 \times ت = 2ت^{ن+3}$ ∴ $ط_1 = ط_2$

∴ $\frac{2(1-ت)^{83}}{(1+ت)^{85}} = \frac{2}{2ت^{88}} = \frac{2}{2 \times 1} = 1$

حل تمارين ومسائل (1-3) صـ (23)

61 أوجـد ناتـج مـا يلـي:

(أ) $(7 - 5ت)(3 + ت)$ (ب) $(2، -4)(-5، 6)$

(جـ) $(4 + ت)^{2}(ت - 1)$ (د) $(2 + 3ت)(7 + 4ت)$

(هـ) $\frac{1}{4 - 3ت}$ (و) $\frac{3 + 4ت}{4 - 5ت}$ (ز) $\frac{4 - 5ت}{7ت}$

الحــل

أ) الناتج = 21 + 7ت − 15ت − 5ت^2= 21 − 8ت + 5 = 26−8ت

ب)الناتج = (4−2ت) (−6+5ت)= −12+10ت+20ت −24ت^2

= −10+ 32ت +24 = 14 + 32ت

ج) = (4+ت)^2(1−ت) = (8+16ت + ت^2) (1−ت) = (8+15ت) (1−ت)

= 15ت−15+ 8ت^2−8ت = 7ت−15−8 = −23+ 7ت

د) (2+3ت) (3−2ت) (4+7ت) = (9−4ت^2) (4+7ت)

= (4+9) (7+4ت) = 13(4+7ت) = 52+91ت

هـ) $\frac{1}{4-3ت} \times \frac{4+3ت}{4+3ت} = \frac{4+3ت}{16+9} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}ت$

$\frac{3+4ت}{4-5ت} \times \frac{4+5ت}{4+5ت} = \frac{12+15ت+16ت+20ت^2}{16+25} = \frac{-8+31ت}{41}$

ز) $\frac{4-5ت}{7ت} \times \frac{-ت}{-ت} = \frac{-4ت+5ت^2}{-7ت^2} = \frac{-5-4ت}{7}$

2 مـحـلـول كمثـال.

63 أوجـد مرافـق كـل مـن الأعـداد المركبـة التاليـة:

أ) ت^3 ب) $\sqrt{-1}$ −3 ج) 2+ $\sqrt{-9}$

د) −3 هـ) 11ت و) $\sqrt{-2}$+ 3

ز) $\frac{1}{ت}$

الحــل

[أ] ت^3=−ت المرافق ت [ب] −3−$\sqrt{-1}$ = −3 + ت المرافق −3 −ت

[ج] 2 + $\sqrt{-9}$ = 2+ 3ت المرافق 2−3ت [د] −3 المرافق −3

4 مـحـلـول كمثـال.

65 ليكــن: ع$_1$ = 2 + ت ، ع$_2$ = 2 - 5ت

أوجــد:

(أ) $ع_1 ع_2$ (ب) $\overline{ع_1 ع_2}$ (جـ) $\overline{ع_1} + \overline{ع_2^2}$ (د) $ع_1$

$\div ع_2$ (هـ) $\overline{ع}_1 ع_2 \div ع_1$ (و) $\overline{ع_1 ع_2}$

الحــل

[أ] $ع_1 \; ع_2 = (2 + ت)\;(5-2ت) = 4 - 10ت + 2ت - 5ت^2 = 9 - 8ت$

[ب] $\overline{ع_1 ع_2} = 9 + 8ت$ وباقي المسائل بنفس الطريقة.

$\boxed{66}$ إذا كــان $\overline{ع}$ مرافـق ع أثبـت أن:

(أ) $(\overline{\overline{ع}}) = ع$ (ب) $ع^2 + (\overline{ع})^2 =$ عدد حقيقي

(جـ) $\frac{ع}{\overline{ع}}$ ، $\frac{\overline{ع}}{ع}$ مترافقان (د) $\overline{(\frac{1}{ع})} = \frac{1}{\overline{ع}}$

الحــل

بفرض ع = س + ت ص ، $\overline{ع}$ = س − ت ص

[أ] $\overline{\overline{ع}} = \overline{(\overline{ع})} = \overline{(س - ت ص)} = س + ت ص = ع$

[ب] $ع^2 + \overline{ع}^2 = (س + ت ص)^2 + (س - ت ص)^2$

$= س^2 + 2س ص ت + ت^2 ص^2 + س^2 - 2ت ص س + ت^2 ص^2$

$= 2س^2 - ص^2 - ص^2 = 2س^2 - 2ص^2 \in ح$ (حقيقي صرف)

[جـ] $\frac{ع}{\overline{ع}} = \frac{ع \times ع}{\overline{ع} \times ع} = \frac{(س + ت ص)^2}{س^2 + ص^2} =$

$= \frac{س^2 + 2س ص ت + ت^2 ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} + \frac{2س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (1)

$\frac{\overline{ع}}{ع} = \frac{\overline{ع}^2}{ع \overline{ع}} = \frac{(س - ت ص)^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - 2س ص ت + ت^2 ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} - \frac{2س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore ع \div \overline{ع}$ ، $\overline{ع} \div ع$ مترافقان.

[د] $\overline{(\frac{1}{ع})} = \overline{(\frac{\overline{ع}}{ع \overline{ع}})} = \overline{(\frac{س - ت ص}{س^2 + ص^2})} = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (1)

$\frac{1}{\overline{ع}} = \frac{ع}{ع \overline{ع}} = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore \left(\frac{1}{ع}\right)' = \frac{1}{ع}$

6‍7 لتكن أ $= \frac{1 - 2ت}{1 - 3ت}$ ، ب $= \frac{2 - ت}{3 - ت}$ أثبت أن أ ، ب عددان مترافقان ثم أوجد قيمة: 25 (أ^2 + ب^2 − 48 أ ب)

الحــل

أ $= \frac{1 - 2ت}{1 - 3ت} \times \frac{1 + 3ت}{1 + 3ت} = \frac{1 + 3ت - 2ت - 6ت^2}{1 + 9} = \frac{7 + ت}{10}$ (1)

ب $= \frac{2 - ت}{3 - ت} \times \frac{3 + ت}{3 + ت} = \frac{6 + 2ت - 3ت - ت^2}{1 + 9} = \frac{7 - ت}{10}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore$ أ ، ب مترافقــان.

ثانياً: 25 (أ^2 + ب^2 −48أب)= 25 $\left(\frac{(7 + ت)^2}{100} + \frac{(7 - ت)^2}{100} - \frac{48(7 + ت)(7 - ت)}{100}\right)$

$= \frac{25}{100}((49 + 14ت + ت^2 + 49 - 14ت + ت^2) - 48 (49 + 1))$

$= \frac{1}{4}(49 - 1 + 49 - 1 - 48 \times 50)$

$= \frac{1}{4}(48 + 48 - 48 \times 50 = \frac{48}{4}(1 + 1 - 50)$

$= 120 \times - 48 = -576$

---

8 محــلــول كمثــال.

---

69 إذا كــان ع $= \frac{1 - ت}{2 + ت}$ أوجـد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $\frac{ع + 1}{ع}$

الحــل

ع $= \frac{1 - ت}{2 + ت} \times \frac{2 - ت}{2 - ت} = \frac{2 - ت - 2ت + ت^2}{4 + 1} = \frac{1 - 3ت}{5}$

$\therefore \frac{ع + 1}{ع} = \frac{[\frac{1 - 3ت}{5}] + 1}{\frac{1 - 3ت}{5}} \times \frac{5}{5} = \frac{1 - 3ت + 5}{1 - 3ت} = \frac{6 - 3ت}{1 - 3ت} \times \frac{1 + 3ت}{1 + 3ت}$

$= \frac{6 + 18ت - 3ت - 9ت^2}{1 + 9} = \frac{15 + 15ت}{10} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}ت$

الحقيقي $= \frac{3}{2}$ ، التخيلي $= \frac{3}{2}$

---

610 أثبت أن: $\left(\frac{3 - ت}{3 + ت}\right) + \frac{3 + ت}{3 - ت} = 1$

الحــل

الأيمن $= \frac{\sqrt{3} - \text{ت}}{\sqrt{3} + \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} - \text{ت}}{\sqrt{3} - \text{ت}} + \frac{\sqrt{3} + \text{ت}}{\sqrt{3} - \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} + \text{ت}}{\sqrt{3} + \text{ت}}$

$= \frac{3 - 2\sqrt{3}\,\text{ت} - 1}{4} + \frac{3 + 2\sqrt{3}\,\text{ت} - 1}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$ $\therefore$ الأيمن = الأيسر

$\boxed{11}$ مـحـلـول كـمـثـال.