[9] أكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية <1، 2، 00000> علماً بأن قاعدتها:

$$ح_{ن+2} = ح_{ن+1} + ح_{ن}$$

الحل:

$ح_1 = 1$ $\qquad$ $ح_2 = 2$

$ح_3 = ح_1 + ح_2 = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $ح_4 = ح_2 + ح_3 = 2 + 3 = 5$

$ح_5 = ح_3 + ح_4 = 3 + 5 = 8$ $\qquad$ $ح_6 = ح_4 + ح_5 = 5 + 8 = 13$

[10] أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الآتية.<$ص_ن$> حيث:

$ص_ن = \begin{cases} (-1)^ن \text{ إذا كان ن عدداً فردياً.} \\ 2ن - 1 \text{ إذا كان ن عدداً زوجياً.} \end{cases}$

الحل:

$ص_1 = (-1)^1 = -1$ $\qquad$ $ص_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$

$ص_3 = (-1)^3 = -1$ $\qquad$ $ص_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$

$ص_5 = (-1)^5 = -1$

[11] أكتب حدود المسلسلة ثم أحسب المجموع:

أ) $\sum_{م=1}^{4} 5م$

الحل: $\sum_{م=1}^{4} 5م = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4$

$= 5 (1+2+3+4) = 5 \times 10 = 50$

ب) $\sum_{ن=1}^{6} \frac{1}{2ن+1}$

الحل: $\sum_{ن=1}^{6} \frac{1}{2ن+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$

[12] أحسب $\sum_{م=1}^{4} (2م + م^2)$ و $\sum_{م=1}^{4} م^2 + \sum_{م=1}^{4} م^2$

هل هما متساويان؟

الحل:

(1) $\sum_{م=1}^{4} (م^2+2م)$ = $(^2(1)+1\times2) + (^2(2)+2\times2) + (^2(3)+3\times2)$

$= (^2(4)+4\times2)$

$= 3+8+15+24=50$

(2) $\sum_{م=1}^{4} م^2 + \sum_{م=1}^{4} 2$ = $^2(1) + 2 \times 2 + ^2(2) + 2$

$= ^2(4) + 4 \times 2 + ^2(3) + 3 \times 2 + 2 = 24 + 15 + 8 + 3 = 50$

$\therefore$ (1) = (2)

ب) هل $\sum_{ر=1}^{5} ر^2$ يساوي $\sum_{ر=1}^{5} 2ر$؟

الحل: $\sum_{ر=1}^{5} ر^2$ = $1 \times 2 + 2\times2 + 3\times2 + 4 \times2 + 5\times2$

$= 2 (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

$= \sum_{ر=1}^{5} 2ر$

جـ(أحسب (1) $\sum_{م=1}^{5} م^2$ (2) $\sum_{م=1}^{5} م^4$، (3) $\sum_{م=1}^{ن} ك$

إرشاد $\sum_{ر=1}^{5} 1ر^2$ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 × 1 = 5

الحل: (1) $\sum_{ن=1}^{5} 2م^2$ = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 × 2

(2) $\sum_{م=1}^{5} 4م^4$ = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 × 4

(3) نستنتج $\sum_{م=1}^{ن} ك$ = ن × ك

[13] أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متسلسلة من المتسلسلات:

أ) $\sum_{ن=1}^{6} \frac{ن\,(ن+1)}{2}$

$$\sum_{ن=1}^{6} \frac{ن(ن+1)}{2} = 1+ 3 + 6 + 10 + 15 + 21$$

الحد الأول: 1

الحد الثاني: 1 + 3 =4

الحد الثالث: 1 + 3 + 6 =10

الحد الرابع: 1 + 3 + 6 + 10 =20

الحد الخامس: 1 + 3 + 6 + 10 + 15 =35

ب) $\sum_{ك=1}^{9} \frac{1}{ك+2}$

الحل: $\sum_{ك=1}^{9} \frac{1}{ك+2} = \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times2}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{4\times2}+\frac{1}{5\times2}+\frac{1}{6\times2}+$

$$\frac{1}{7\times2}+\frac{1}{8\times2}+\frac{1}{9\times2}$$

الحد الأول: $\frac{1}{2}$

الحد الثاني: $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

الحد الثالث: $\frac{11}{12}=\frac{2+9}{12}=\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

الحد الرابع: $\frac{25}{24}=\frac{3+22}{24}=\frac{1}{8}+\frac{11}{12}=\frac{1}{4\times2}+\frac{11}{12}$

الحد الخامس: $\frac{137}{120}=\frac{12+125}{120}=\frac{1}{10}+\frac{25}{24}$

د) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots\ldots + 2^{\infty}$

$ح_1 = 2^1 = 2$ ، $ح_2 = 2^1 + 2^2 = 2 + 4 = 6$،

$ح_3 = 2^3 + 6 = 14$ ، $ح_4 = 2^4 + 14 = 16 + 14 = 30$

$ح_5 = 2^5 + 30 = 32 + 30 = 62 \neq$

المتتاليــة الحسابيــة

- <ع$_ن$> تدعى حسابية إذا كان الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت ندعو الفرق الثابت (د) أساس المتتالية. أي $ح_{ن-1} - ح_ن = د$

مثال: <1، 3، 5، 7،...> هل المتتالية حسابية؟

نحسب الفرق $5-3 = 2$ ، $7-5 = 2$ ∴ حسابية وأساسها $د = 2$

- من خواصها كل حد وسط حسابي بين مجاورية مثلاً $5 = \frac{3+7}{2}$
- الحد العام للمتتالية الحسابية $ح_ن = ح + (ن-1)$ د
- $مجـ_ن = \frac{ن}{2} (ح_1 + ح_ن)$
- $مجـ_ن = \frac{ن}{2} (2\ ح_1 + (ن-1)\ د)$

تمارينـــن ومسائـــــل (2-3)

[1] أوجد الحدود الستة الأولى للمتتاليات الحسابية التالية:

أ) $ح_1 = 2$ ، $د = -\frac{1}{2}$

الحل: $ح_1 = 2$

$ح_2 = ح_1 + د = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad ح_3 = ح_2 + د = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$ح_4 = ح_3 + د = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad ح_5 = ح_4 + د = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$ح_6 = ح_5 + د = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ب) $ح_3 = -9$ $\quad ح_4 = -5$

الحل: أولاً نعين أساس المتتالية د = $ح_4 - ح_3 = -5 - (-9) = -5 + 9 = 4$

$\therefore ح_2 = ح_3 - 4 = -9 - 4 = -13$ $\quad ح_1 = ح_2 - د = -5 + 4 = -1$

$\therefore ح_5 = ح_4 + د = -5 + 4 = -1$

جـ) $ح_1 = 23.2$, د = 0.6

$ح_2 = ح_1 + د = 23.2 + 0.6 = 23.8$

$ح_3 = ح_2 + د = 23.8 + 0.6 = 24.4$

$ح_4 = ح_3 + د = 24.4 + 0.6 = 25$

$ح_5 = ح_4 + د = 25 + 0.6 = 25.6$

و) $ح_1 = 9س + 5$، $\quad د = 2س - 3$

الحل: $ح_1 = 9 س + 5$

$ح_2 = ح_1 + د = 9س + 5 + 2س - 3 = 11س + 2$

$ح_3 = ح_2 + د = 11س + 2 + 2س - 3 = 13س - 1$

$ح_4 = ح_3 + د = 13س - 1 + 2س - 3 = 15س - 4$

$ح_5 = ح_4 + د = 15س - 4 + 2س - 3 = 17س - 7$

[2] أوجد ما يأتي:

أ) الحد الثالث عشر والعشرين للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (1) وأساسها (−8)

الحل:

المعطيات: $ح_1 = 1$ ، $د = -8$ المطلوب (1) $ح_{13}$، (2) $ح_{20}$

$$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د$$

$ح_{13} = 1 + (13-1) \times (-8) = 1 + 12 \times -8 = 1 - 96 = -95$

$ح_{20} = 1 + (20-1) \times -8 = 1 + 19 \times -8 = 1 - 152 = -151$

ب) الحد الرابع من متتالية حسابية حدها العاشر (250) وحدها السابع (217)

الحل: المعطيات $ح_{10} = 250$، $ح_7 = 217$

المطلوب $ح_4 = ؟$

$$\therefore ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د$$

$ح_{10} = ح_1 + (10-1)\,د = 250 \Leftarrow ح_1 + 9د = 250 \rightarrow (1)$

$ح_7 = ح_1 + (7-1)\,د \Leftarrow ح_1 + 6د = 217 \rightarrow (2)$

بطرح (2) من (1) $\Leftarrow 3د = 33 \Leftarrow د = \frac{33}{3} = 11$

عوض في (1) $ح_1 + 9 \times 11 = 250 \Leftarrow ح_1 = 250 - 99 = 151$

$\therefore ح_4 = ح_1 + (4-1)\,د = 151 + 3 \times 11 = 151 + 33 = 184$ #

جـ(أوجد الحد الخامس والحد الحادي والعشرين من المتتالية:

$\langle 7.5، 7، 6.5، \ldots \rangle$

الحل:معك $ح_1 = 7.5$

$د = 7 - 7.5 = -0.5$

$$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د$$

$ح_5 = 7.5 + (5-1) \times -0.5 = 7.5 - 4 \times 0.5 = 7.5 - 2 = 5.5$

$ح_{21} = 7.5 + (21-1) \times -0.5 = 7.5 + 20 \times -0.5$

$= 7.5 - 10 = -2.5$

د) رتبة الحد الذي قيمته 7 من المتتالية $\langle \frac{1}{4}، \frac{1}{2}، \frac{3}{4}، ... \rangle$

الحل: معك $ح_1 = \frac{1}{4}$ ، $د = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$ح_ن = 7$ المطلوب ن =؟

القانون: $ح_ن = ح_1 + (ن-1) د$

$7 = \frac{1}{4} + (ن-1) \times \frac{1}{4}$ أضرب كل حد بـ4

$28 = 1 + (ن-1) \times 1$

$28 = 1 + ن - 1$ ⇐ $\boxed{ن = 28}$ ∴ $ح_{28}$

هـ(أوجد رتبة الحد الذي قيمته (−80) من المتتالية ⟨512، 496، 480،...⟩

الحل: معك $ح_1 = 512$ ، $د = 496 - 512 = -16$

$ح_ن = -80$ المطلوب ن =؟

القانون: $ح_ن = ح_1 + (ن-1) د$

$-80 = 512 + (ن-1) \times -16$

$-80 = 512 - 16ن + 16$

$-16ن = -80 - 512 - 16$

$-16ن = -608$ ⇐ $ن = \frac{608}{16} = 38$ ∴ $ح_{38}$

[3] أوجد ما يأتي:

أ) متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثاني يساوي (7) ومجموع مربعي حديها

الثاني والثالث يساوي (89)

الحل:معك $ح_1 + ح_2 = 7$ ← (1)

$ح_2^2 + ح_3^2 = 89$ ← (2)

المطلوب أوجد حدود المتتالية.

من (1) $ح_1 + ح_1 + د = 7 \Leftarrow 2ح_1 + د = 7$ ← (3) $د = 7 - 2ح_1$

من (2) $(ح_1 + د)^2 + (ح_1 + 2د)^2 = 89$ عوض عن (د)

$(ح_1 + 7 - 2ح_1)^2 + (ح_1 + 14 - 4ح_1)^2 = 89$

$(7 - ح_1)^2 + (14 - 3ح_1)^2 = 89$

$49 - 14ح_1 + ح_1^2 + 196 - 84ح_1 + ح_1^2 = 89$

$10ح_1^2 - 98ح_1 + 156 = 0$ قسم كل حد على (2)

$5ح_1^2 - 49ح_1 + 78 = 0$

$(5ح_1 - 39)(ح_1 - 2) = 0$

أما $ح_1 - 2 = 0 \Leftarrow ح_1 = 2 \Leftarrow د = 7 - 2 \times 2 = 3$

وتكون المتتالية $\langle 2، 5، 8، ..... \rangle$

أو $5ح_1 - 39 = 0 \Leftarrow 5ح_1 = 39 \Leftarrow ح_1 = \frac{39}{5}$

$\Leftarrow د = 7 - 2 \times \frac{39}{5} = \frac{78-35}{5} = \frac{-43}{5}$

وتكون $\langle \frac{39}{5}، -\frac{4}{5}، -\frac{47}{5}، ..... \rangle$

ب) أوجد رتبة أول حد سالب من المتتالية (35، 33، 31،...) الفكرة نحسب $ح_ن$ = 0 وتتوصل إلى رتبة أول حد سالب.

الحل: المعطيات $ح_1 = 35$، $د = 33 - 35 = -2$

$ح_ن = ح_1 + (ن-1) د = 35 + (ن-1) \times -2 = 35 - 2ن + 2 = 37 - 2ن$

ضع حن = 0 ⇐ 37− 2ن = 0 ⇐ 2ن 37= ⇐ ن = $\frac{37}{2}$ = 18.5

∴ ن = 18 آخر حد موجب

ن = 19 رتبة أول حد سالب.

جـ(الحد الذي ترتيبه الخامس عشر من النهاية من المتتالية:

(4، 7، 10، 10،.....، 100)

الحل: المعطيات ح1 = 4، د = 7−4 = 3

لو عكسنا المتتالية يصبح ح1 = 100، د = −3

ح15 = ؟

القانون: حن = ح1 + (ن− 1) د

ح15= 100 + (15−1) × −3

= 100 − 42 = 58

د) المتتالية التي حدها النوني (العام) (5ن + 3)

الحل: ح1 = 5 × 1 + 3 = 8

ح2 = 5 × 2 + 3 = 13

ح3 = 5 × 3 + 3 = 18

⇐ (8، 13، 18،.....)

هـ(أوجد قيمة (ن) إذا كان الحد العام للمتتالية (7، 13، 19،...) يساوي الحد العام من المتتالية 〈77، 73، 69،.....〉

الحل: في الأولى ح1 = 7، د = 13−7 = 6

حن=ح1+(ن−1) د=7+(ن−1) × 6 = 7+ 6ن − 6 = 1+6ن ← (1)

في الثانية ح1 = 77 ، د = 73 − 77= −4

حن=ح1+(ن−1) د=77+(ن−1)×−4=77− 4ن+4= 81−4ن ← (2)

المعادلة (1) = (2) ⇐ 1+ 6ن = 81 − 4ن

10ن = 80 ⇐ ن = 8

[4] أوجد الحد الأخير من المتتاليات الآتية:

أ) ⟨2 + ب ، صفر، − (2 +ب)، .....⟩ إلى 9 حدود.

الحل: ح$_1$ = 2 + ب ، د = 0 − (2+ب) = −2 −ب

ن = 9

القانون ح$_ن$ = ح$_1$ + (ن− 1) د

ح$_9$ = 2+ب + (9−1) × (−2 −ب)

= 2+ب + 8 (−2 −ب) = 2+ب − 16 −8ب

= −14− 7ب

ب) ⟨ (س+ ص)^2، س^2+ ص^2 ، (س− ص)^2، .....⟩ إلى 7 حدود.

الحل: المعطيات ح$_1$ = (س +ص)^2

د = س^2 +ص^2 − (س+ص)^2 =س^2 +ص^2 − (س^2+2س ص+ص^2)

د = س^2 +ص^2 + س^2 − 2س ص−ص^2= −2 س ص

ن = 7

المطلوب:ح$_7$

القانون: ح$_ن$ = ح$_1$ + (ن− 1) د

ح$_7$ = (س + ص)^2 + (7−1) × −2س ص

= س^2 + 2س ص+ ص^2 − 12س ص

= س^2 + ص^2 − 10 س ص

[5] أكمل الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية:

أ) ⟨.....، .....، 9، .....، 15، .....⟩

المعطيات ح$_3$ = 9 ، ح$_5$ = 15

$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)$ د

$ح_3 = ح_1 + 2$ د $\Leftarrow$ $ح_1 + 2د = 9$ ← (1) ∴

$ح_5 = ح_1 + 4$ د $\Leftarrow$ $ح_1 + 4د = 15$ ← (2)

بطرح (2) من (1) $\Leftarrow$ $-2د = -6 \Leftarrow د = \frac{-6}{-2} = 3$

عوض في (1) $ح_1 + 2 \times 3 = 9 \Leftarrow ح_1 = 3$

∴ المتتالية ⟨3، 6، 9، 12، 15، 18،.....⟩

ب) ⟨75،.....،.....، .....، 87، .....،.....⟩

الحل: $ح_1 = 75$ ، $ح_5 = 87$

$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)$ د

$ح_5 = 75 + (5-1) \times د = 87$

$75 + 4د = 87 \Leftarrow 4د = 87 - 75 = 12$

$\Leftarrow د = \frac{12}{4} = 3$

∴ ⟨75، 78، 81، 84، 87، 90، 91،...⟩

جـ) ⟨4.5، ...،...، 12،...،...، 19.5⟩

الحل:

$ح_1 = 4.5$ ، $ح_4 = 12$

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د $\Leftarrow$

$ح_4 = 4.5 + (4-1) \times 9 \Leftarrow 12 = 4.5 + 3د$

$\Leftarrow 3د = 12 - 4.5$

$\Leftarrow 3د = 7.5 \Leftarrow د = \frac{7,5}{3} = 2.5$

⟨4.5، 7، 9.5، 12، 14.5، 17، 19.5، ...⟩

د) ⟨.....،.....،-5،.....،.....، 16⟩

الحل: $ح_3 = -5$، $ح_6 = 16 \Leftarrow ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د

$\therefore ح_3 = ح_1 + (3-1)$ د $= -5 \rightarrow (1)$

$ح_6 = ح_1 + (6-1)$ د $= ح_1 + 5$د $\Leftarrow$ $16 = 5$د $+ ح_1 \rightarrow (2)$

بطرح (2) من (1) $\Leftarrow -3$د $= -21 \Leftarrow$ د $= \frac{-21}{-3} = 7$

عوض في (2) $\Leftarrow ح_1 + 5 \times 7 = 16 \Leftarrow ح_1 = 16 - 35 = -19$

$\langle -19، -12، -5، 2، 9، 16، ... \rangle$

[6] في المتتالية الحسابية $\langle 3، أ، ....، ....، ....، 81، هـ \rangle$ أوجد قيمة كلاً من أ، هـ

الحل: $ح_1 = 3$، $ح_6 = 81$

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د $\Leftarrow ح_6 = 3 + (6-1)$ د $= 3 + 5$د

$\therefore 3 + 5$د $= 81 \Leftarrow 5$ د $= 78 \Leftarrow$ د $= \frac{78}{5} = 15.6$

$\Leftarrow$ أ $= ح_1 +$ د $= 3 + 15.6 = 18.6$

$\Leftarrow$ هـ $= 81 +$ د $= 81 + 15.6 = 96.6$

[7] أوجد ما يلي:

أ) وسطين بين 5.26، 6.34

الحل: 5.26 ، ☐، ☐، ☐ ، 6.34

معك $ح_1 = 5.26$ ، $ح_4 = 6.34$

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د

$ح_4 = 5.26 \quad +(4-1)$ د $= 5.26 + 3$د

$\therefore 6.34 = 5.26 + 3$د

$$\Leftarrow \text{د}3 = 6.34 - 5.26 = 1.08$$

$$\Leftarrow \text{د} = \frac{1.08}{3} = 0.36$$

الوسط الأول: $5.26 + 0.36 = 5.62$

الوسط الثاني: $5.62 + 0.36 = 5.98$

$\therefore$ (5.26 ، 5.26، 5.98، 6.34)

ب) خمسة أوساط بين 40، 10

40 ،□،□،□،□،□،10

الحل: المعطيات $ح_1 = 40$ ، $ح_7 = 10$، ن= 7 المطلوب د = ؟

$$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\ د$$

$$ح_7 = 40 + (7-1)\ د \Leftarrow 10 = 40 + 6د$$

$$-10 = 6د \Leftarrow 6د = 30 - \Leftarrow \text{د} = \frac{-30}{6} = -5$$

$\therefore$ د = −5

الحدود 40 ،35، 30، 25، 20، 15،10

جـ(أدخل أربعة أوساط بين 9، 41

الحل: 9 ،□، □، □، □،41،□

معك: $ح_1 = 9$ ، $ح_6 = 41$

$\therefore$ من القانون $ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\ د$

$$ح_6 = 9 + (6-1)\ د = 9 + 5د$$

$$\therefore 9 + 5د = 41 \Leftarrow 5د = 41 - 9 = 32$$

$$\Leftarrow \text{د} = \frac{32}{5} = 6.4$$

⟨9، 15.4، 21.8، 28.2، 34.6، 41⟩

هـ(أربع عشر وسطاً بين −5 ، 25

الحل: $ح_1 = -5$ ، $ح_{16} = 25$

$ح_{16} = -5 + (16-1)\,د = -5 + 15د$

$\therefore -5 + 15د = 25 \Leftarrow 15د = 25 + 5$

$\therefore 15د = 30 \Leftarrow د = \frac{30}{15} = 2$

$\langle -5، -3، -1، 1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، 15، 17، 19، 21، 23، 25 \rangle$

[8] أوجد ما يأتي:

أ) مجموع حدود المتتالية التي فيها $ح_1 = 5$ ، $د = 3$ وحدها الأخير $ح_ن = 56$:

الحل: $مجـ_ن = \frac{ن}{2}\,[ح_1 + ح_ن]$ ولحساب ن

$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\,د$

$56 = 5 + (ن-1) \times 3 \Leftarrow 56 = 5 + 3ن - 3 \Leftarrow 56 - 5 + 3 = 3ن$

$54 = 3ن \Leftarrow ن = 18$

$\therefore \quad مجـ_ن = \frac{ن}{2}\,[ح_1 + ح_2] = \frac{18}{2}\,[5 + 56] = 9 \times 61 = 549$

ب) المتتالية الحسابية التي مجموع ثلاثة حدود فيها يساوي 39 وحاصل ضربهم = 2184

الحل: $ح_1 + ح_1 + د + ح_1 + 2د = 39$

$3ح_1 + 3د = 39 \Leftarrow ح_1 + د = 13 \Leftarrow ح_1 = 13 - د \ldots(1)$

$ح_1 \times (ح_1 + د)\,(ح_1 + 2د) = 2184$

$ح_1\,(13)\,(ح_1 + د + د) = 2184$ عوض عن $ح_1$ من (1)

$13\ (13- د)\ (13+ د) = 2184$

$13\ (169 - د^2) = 2184$ قسمه على 13

$169 - د^2 = 168$

$\Leftarrow\ 169 - 168 = د^2 \Leftarrow\ 1 = د^2 \Leftarrow د = \pm\ 1$

لما $د = 1 \Leftarrow\ ح_1 = 13 - د = 12$

وتكون $\langle 12، 13، 14، 15،... \rangle$ ولما $د = -1 \Leftarrow ح_{13} = ح_1 + 1 = 14$

وتكون $\langle 14، 13، 12، 11،..... \rangle$

جـ(المتتالية الحسابية التي حدها الثاني عشر نصف حدها التاسع عشر ومجموع العشرين حداً الأولى منها 270.

الحل: المعطيات $ح_{12} = \frac{1}{2}\ ح_9$ ، $مجـ_{20} = 270$

$ح_1 + 11د = \frac{1}{2} \times (ح_1 + 8د)$ أضرب بـ2

$2ح_1 + 22د = ح_1 + 8د$

$2ح_1 - ح_1 = 8د - 22\ د \Leftarrow$ $\boxed{ح_1 = -14\ د}$ $\leftarrow (1)$

$مجـ_ن = \frac{ن}{2} [2ح_1 + (ن - 1)د]$ عوض عن ن = 20

$270 = 10\ [2ح_1 + 19د]$

$27 = 2ح_1 + 19د$ عوض عن $ح_1 = -14\ د$ من (1)

$27 = -28\ د + 19\ د$

$27 = -9د \Leftarrow$ $\boxed{د = -3} \Leftarrow ح_1 = -14\ د = -14 \times -3 = 42$

$\langle 39، 42، 36، 33، 30،..... \rangle$

[11] لتكن $(ح_ن) = \langle 1، 5، 9،... \rangle$.....(1) متتالية حسابية.

و(ح$_{ن2}$) = 〈−18، −10، −2،.....〉... (2) متتالية حسابية. فإذا كان ح$_{ن1}$ ينقص عن ح$_{ن2}$ بمقدار (5) أوجد قيمة (ن) وأوجد ح$_{4ن-3}$ في كل منها:

الحل: من الأولى ح$_1$ = 1، د = 5−1 = 4 ⇐

ح$_{ن1}$ = ح$_1$+ (ن−1) د = 1+ (ن−1) × 4 = 1+ 4ن − 4 = 4ن− 3

$\boxed{\text{ح}_{ن1} = 4ن - 3}$

من الثانية: ح$_1$= −18، د = −10 − (−18)= +8

ح$_{ن2}$ = ح$_1$ + (ن−1) د= −18 + (ن−1) 8= −18 + 8ن − 8

ح$_{ن2}$ = −26 +8ن

المعادلة: ح$_{ن1}$ + 5 = ح$_{ن2}$ ⇐ 4ن−3 +5 = −26 + 8ن

ن = $\frac{28}{4}$ = 7 ⇐ 4ن = 28 ⇐ 8ن−4ن =26+ 5 + 3−

$\therefore \boxed{ن = 7}$ فيكون ح$_{4ن-3}$ = ح$_{25}$

في الأولى: $\boxed{\text{ح}_{ن1} = 4ن - 3}$ ⇐ ح$_{25}$ = 4×25 − 3 = 97

في الثانية: $\boxed{\text{ح}_{ن2} = -26 + 8ق}$ ⇐ ح$_{25}$ = −26 + 8×25= −26+200=174

[12] أوجد الحد الرابع والعشرين من المتتالية الحسابية:

〈3، 5،7، ...〉 وما رتبة الحد الذي قيمته (−3) من المتتالية 〈43 ،41، 39،...〉 إذا علمت أن مجموع 2ن حداً من المتتالية الأولى يساوي مجموع ن حداً من المتتالية الثانية فما قيمة ن؟

الحل: في الأولى معك ح$_1$= 3 ، د = 5−3 = 2

∴ ح$_ن$ = ح$_1$ +(ن−1) د ⇐ ح$_{24}$ = 3+ (1024)×2 = 3+ 46 = 49

من الثانية: ح$_1$ = 43 د= 41 − 43 = −2 ، ح$_ن$= −3 المطلوب ن =؟

لدينا ح$_ن$ = ح$_1$ + (ن−1) د

−3 = 43 + (ن−1) × −2 ⇐ −43 = −2ن + 2

$2ن = 43 + 2 + 3 = 48 \Leftarrow$ ن = 24

المرحلة الثانية:

من الأولى $مجـ_{ن} = \frac{ن2}{2}$ (2ح$_1$ + (2ن − 1) د)

= ن (6 + (2ن − 1) × 2) = 6ن + 4ن^2 − 2ن

= 4ن + 4ن^2

من الثانية: $مجـ_{ن} = \frac{ن}{2}$ (2ح$_1$ + (ن − 1) د) = $\frac{ن}{2}$ (86 + (ن − 1) × −2)

$= \frac{ن}{2}$ (86 − 2ن + 2) = $\frac{ن}{2}$ (88 − 2ن) = 44ن − ن^2

المعادلة: $مجـ_{2ن} = مجـ_{ن}$ ⇐ 4ن + 4ن^2 = 44ن − ن^2

5ن^2 − 40ن = 0 ⇐ 5ن (ن − 8) = 0

أما 5ن = 0 ⇐ ن = 0 مرفوض.

أو ن − 8 = 0 ⇐ ن = 8 مقبول .#

[13] كم حداً يلزم أخذه من المتتالية (−16، −15، −14،...) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها = −100

الحل: ح$_1$=−16، د = −15 − (−16) = 1 أوجد ن=؟

$مجـ_{ن} = \frac{ن}{2}$ [2ح$_1$ + (ن − 1)د]

$\frac{ن}{2}$ [2× −16 + (ن − 1)× 1] = −100

$\frac{ن}{2}$ [−32 + ن − 1] أضرب بـ(2) = −100

ن (−33 + ن) = −200 ⇐ −33ن + ن^2 = −200. صفِّرها

ن^2 − 33ن + 200 = 0

(ن − 25) (ن − 8) = 0

أما ن − 25 = 0 ⇐ ن = 25 أو ن − 8 = 0 ⇐ ن = 8

[14] أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع العشرة الحدود الأولى منها يساوي (250) ومجموع العشرة الحدود التالية لها (450):

الحل: أولاً: $مجـ_{10}$ = $\frac{10}{2}$(2ح$_1$+9د)=5(2ح$_1$+9د)=5(2ح$_1$+9د) = 10ح$_1$+ 45د

∴ 10ح$_1$ + 45 د = 250 ← (1)

ثانياً: الحد الأول ح$_{11}$ = ح$_1$ + 10د

$مجـ_{10}$ = $\frac{10}{2}$ [2ح$_{11}$+ (10−1) د] = 5 [2ح$_1$+ 20د +9د]

= 10ح$_1$ +145 د

∴ 10ح$_1$ + 145د = 450 ← (2) بطرح (2) من (1)

− 100د = −200 ⇐ د = 2 عوض في (1)

10ح$_1$ + 90 = 250 ⇐ 10ح$_1$ = 160 ⇐ ح$_1$ = 16

∴ ⟨16، 18، 20، .....⟩

[15] أوجد مجموع الأعداد الصحيحة للمتتالية المحصورة بين 50، 500 وكل منها لا يقبل القسمة على 11.

الحل: المسألة عبارة عن طرح مجموع متتاليتين حسابيتين.

الأولى: 50، 51، 52، 53، .....، 499، 500

المعطيات ح$_1$= 51، ن = 499−50 = 449

∴ ح$_ن$ = 499 $مجـ_ن$ = $\frac{ن}{2}$ (ح$_1$ +ح$_ن$)

∴ $مجـ_{449}$ = $\frac{449}{2}$ (51+ 449) = 449×$\frac{550}{2}$

= 449× 275 = 123475

الثانية: 50 ، 55، 66، 77،.....، 495، 500

المعطيات: $ح_1=55$، $ح_ن= 495$، د = 11 ، ن=؟

$\therefore ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د $\Leftarrow 495 = 55 + (ن-1)\times 11$

$\Leftarrow \frac{440}{11} = 1-ن \therefore 11 \times (1-ن) = 440$

$ن-1 = 40 \Leftarrow ن = 41$ عوض في قى $= \frac{ن}{2} (ح_1 + ح_ن)$

$\therefore مج_{41} = \frac{41}{2} (495+55) = \frac{41}{2} \times 550$

$= 41 \times 275 = 11275$

$\therefore$مجموع الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على11$= مج_{449} - مج_{41}$

$= 123475 - 11275 = 112200$

[16] برهن أن كلاً من المتسلسلتين هي متسلسلة حسابية أوجد مجموعها:

أ) $\sum_{ك=1}^{20} 2ك+1$

الحل: $\sum_{ك=1}^{20} 2ك+1 = 1+ 3 + 5 + 7+... 39$

هي مجموع حدود المتتالية ⟨1، 3، 5، 7،.....⟩

$ح_1= 1$ ، د$= 3-1 = 2 \therefore$ حسابية

$مج_{20} = \frac{20}{2} [2 + 19 \times 2] = 10 \times 40 = 400$

[17] يبدأ شخص في قيادة دراجة هوائية من أعلى منحدر فيقطع في الثانية الأولى 90سم، وفي كل ثانية بعد ذلك يقطع مسافة تزيد عن المسافة التي يقطعها في الثانية السابقة لها مباشرة بمقدار 120سم فإذا وصل الشخص إلى نهاية المنحدر بعد (20) ثانية فما طول المنحدر.

الحل: لنعتبر بدء عملية العد بعد الثانية الأولى فتكون لدينا متتالية:

حسابية $ح_1 = 90$ ، د = 120 ، ن = 20− 1 = 19

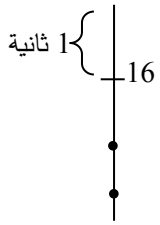
$$مجـ_{ن} = \frac{ن}{2} (2ح_1 + (ن-1) د) =$$

$$مجـ_{19} = \frac{19}{2} [2 \times 90 + (19-1) \times 120] = \frac{19}{2} [180+2160]$$

$$= \frac{19}{2} \times 2340 = 19 \times 1170 = 22230$$

المسافة الكلية 90 + 22230 = 22320#

[19] سقط جسم من السكون راسياً في الفضاء فقطع في الثانية الأولى 16قدماً ثم قطع 32 قدماً زيادة في كل ثانية عن الثانية السابقة لها مباشرة فما هي المسافة التي يقطعها الجسم في 11 ثانية؟ وما هي المسافة المقطوعة؟



الحل: لنعتبر بدء عد المسافات بعد الثانية الأولى.

المعطيات: ن = 11، $ح_1$ = 16، د = 32

$$ح_ن = ح_1 + (ن-1) د$$

$$\therefore ح_{11} = 16 + (10) \times 32 = 16 + 320 = 336$$

المتتاليـــة الهندسيـــــة

تعريـف: تقول عن المتتالية بأنها هندسية إذا كان:

$$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = ر = \text{ثابت}$$

- النسبة الثانية (ر) تدعى الأساس.
- الحد العام $ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1}$.
- $مجـ_ن = ح_1 \times \frac{1-ر^ن}{1-ر}$.
- صورة أخرى $مجـ_ن = \frac{ح_1 - ر\, ح_ن}{1-ر}$.

• كل حد وسط هندسي بين مجاوريه.

مثال: ⟨3، 15، 75،.....⟩ هندسية.

$\frac{75}{15} = \frac{15}{3} \Leftarrow (15)^2 = 3\times 75 \Leftarrow 15 = \sqrt{3\times 75}$

بالمثل أ، ب، جـ، $\Leftarrow \frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب} \Leftarrow ب^2 = أ \times جـ$

$\Leftarrow$ قانون $\boxed{ب = \sqrt{أ \times جـ}}$

تمارين ومسائل (3- 3)

[1] أكتب المتتالية الهندسية التالية (مكتفياً بخمسة حدود)

أ) حدها الأول 3 وأساسها 4

الحل: $ح_1 = 3$

$ح_2 = ح_1 \times ر = 3 \times 4 = 12$

$ح_3 = ح_2 \times ر = 12\times 4 = 48$

$ح_4 = ح_3 \times ر = 48\times 4 = 192$

$ح_5 = ح_4 \times ر = 192\times 4 = 768$

∴ المتتالية ⟨3، 12 ، 48، 192، 768،...⟩

ب) حدها الأول 8 وأساسها $-\frac{1}{2}$

الحل: * $ح_1 = 8$ * $ح_2 = ح_1 ر = 8 \times -\frac{1}{2} = -4$

* $ح_3 = ح_2 ر = -4 \times \frac{-1}{2} = +2$ * $ح_4 = ح_3 ر = 2\times -\frac{1}{2} = -1$

$ح_5 = ح_4 \times ر = -1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$

∴ ⟨8، −4، 2، −1، $-\frac{1}{2}$،.....⟩

جـ(حدها الأول 3 وأساسها $\frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل: * $ح_1 = 3$ * $ح_2 = ح_1 ر = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

* $ح_3 = ح_2 ر = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

* $ح_4 = ح_3 ر = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $ح_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

$\langle 3، \sqrt{3}، 1 ، \frac{1}{\sqrt{3}}، \frac{1}{3}، ..... \rangle$

[2] بيِّن نوع المتتاليات الآتية: ثم أوجد الحد الخامس لِكل منها:

أ) $((أ + ب) ، (أ^2 - ب^2) ، (أ + ب)(أ - ب)^2 .....)$

الحل: يحدد نوعها (ر) $\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{أ^2 - ب^2}{أ + ب} = \frac{(أ - ب)(أ + ب)}{(أ + ب)} = أ - ب$

لازم $\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{(أ + ب)(أ - ب)^2}{أ^2 - ب^2} = \frac{(أ + ب)(أ - ب)(أ - ب)}{(أ - ب)(أ + ب)} =$

أ − ب ∴ ر = أ − ب والمتتالية هندسية

$ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_5 = (أ + ب) \times (أ - ب)^4$

جـ($(2، -2\sqrt{2}، 4، ...)$

الحل: $\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

$\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

النسبة ثابتة ⇐ متتالية هندسية وأسسها $(ر = -\sqrt{2})$

$ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1} \Leftarrow ح_5 = 2 \times (-\sqrt{2})^4 = 2 \times 4 = 8$

د) $(\sqrt{3}، 1 ، \frac{1}{\sqrt{3}}، .....)$

الحل: * $\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ * $\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ متتالية هندسية أساسها ر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_5 = \sqrt{3} \times (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 = \sqrt{3} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ب) (أ + 2ب، 2أ + 4ب ، 3أ + 6ب، .....)

الحل: $ح_2 - ح_1$ = 2أ +4ب− أ−2ب =أ+2ب

$ح_3 - ح_2$= أ +2ب ⇐ المتتالية الحسابية.

$ح_1$= أ +2ب، د= أ +2ب ∴ $ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د

⇐ $ح_5$ = أ +2ب +4 (أ +2ب) = 5أ + 10ب

هـ) ⟨23.2، 23.8، 24.4،.....،...⟩

الحل: الفرق الثابت $ح_2 - ح_1$ = 23.8 − 23.2 = 0.6

$ح_3 - ح_2$ = 24.4 − 23.8 = 0.6

∴ الفرق ثابت والمتتالية حسابية د = 0.6

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د ⇐ $ح_5$ =23.2+ 4× 0.6 = 23.2 + 2.4

= 25.6

[3] أوجد ناتج ما يلي:

أ) الحدين الثامن والثاني عشر لمتتالية هندسية حدها الأول 64 وأساسها $(\frac{1}{2})$

الحل: $ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1}$

- $ح_8 = 64 \times (\frac{1}{2})^{8-1} = 64 \times (\frac{1}{2})^7 = 2^6 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $ح_{12} = 64 \times (\frac{1}{2})^{11} = 2^6 \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{5_2} = \frac{1}{32}$ #

ب) المتتالية الهندسية التي مجموع حديها الأول والثاني يساوي 72 ومجموع حديها الأول والرابع يساوي 56:

الحل: $ح_1 + ح_1 ر = 72 \Leftarrow \boxed{ح_1 (1 + ر) = 72} \leftarrow (1)$

$ح_1 + ح_1 ر^3 = 56 \Leftarrow \boxed{ح_1 (1 + ر^3) = 56} \leftarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{72}{56} = \frac{ح_1 (1+ر)}{ح_1 (1+ر^3)} \Leftarrow$

$\frac{9}{7} = \frac{(1+ر)}{(1+ر)(1-ر+ر^2)} \Leftarrow 9ر^2 - 9ر + 2 = 0$

$(3ر - 1)(3ر - 2) = 0$

أما $3ر - 1 = 0 \Leftarrow$ $\boxed{ر = \frac{1}{3}}$ أو $\boxed{ر = \frac{2}{3}}$

من أجل $ر = \frac{1}{3}$ عوض في (1) $\boxed{ح_1 (1 + \frac{1}{3}) = 72} \leftarrow$

$\frac{4}{3} ح_1 = 72 \Leftarrow ح_1 = 72 \times \frac{3}{4} = 18 \times 3 = 54$

$(54، 18، 6، \ldots)$

من أجل $ر = \frac{2}{3}$ عوض في (1) $\Leftarrow ح_1 \times (1 + \frac{2}{3}) = 72 \Leftarrow$

$\frac{5}{3} ح_1 = 72 \Leftarrow ح_1 = 72 \times \frac{3}{5} = \frac{216}{5}$

$\langle \frac{216}{5}، \frac{144}{5}، \frac{96}{5}، \ldots\ldots \rangle$

جـ(رتبة الحد الذي قيمته $\frac{1}{27}$ من المتتالية الهندسية:

$(3، \sqrt{3}، 1، \ldots\ldots)$

الحل: $ح_1 = 3$، $ر = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$ح_{ن} = \frac{1}{27}$ المطلوب ن= ؟

$ح_{ن} = ح_1 ر^{ن-1}$

$\frac{1}{27} = 3\times(\frac{1}{\sqrt{3}})^{ن-} \Leftarrow \frac{1}{3}\times 1 = (3^{-\frac{1}{2}})^{ن-1}$

$\frac{1+ن-}{2} = 3^{\frac{1+ن-}{2}} \Leftarrow \frac{4-}{1} = 4-3\ 3^{\frac{1+ن-}{2}} \Leftarrow \frac{1}{81} =$

$\Leftarrow -8 = -ن + \Leftarrow 1 ن=1 +8= 9 \therefore$ $\boxed{ن = 9}$

[9] أوجد ما يأتي:

أ) المتتالية الهندسية التي مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي 26 ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها (702).

الحل: $ح_1 + ح_1 ر + ح_1 ر^2 = 26 \Leftarrow$ $\boxed{ح_1(1+ر+ر^2) = 26} \leftarrow (1)$

$ح_4 + ح_5 + ح_6 = 702 \Leftarrow ح_1 ر^3 + ح_1 ر^4 + ح_1 ر^5 = 702$

$\boxed{ح_1 ر^3(1+ر+ر^2) = 702} \leftarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1(1+ر+ر^2)}{ح_1 ر^3(1+ر+ر^2)} = \frac{26}{702}$

$\frac{1}{ر^3} = \frac{1}{27} \Leftarrow ر^3 = 27 \Leftarrow$ $\boxed{ر = 3}$ عوض في (1)

$ح_1 (1+3+9) = 26 \Leftarrow ح_1 = \frac{26}{13} = 2$

$\langle 2، 6، 18، ..... \rangle$

ب) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الأول 9 وحدها السادس (−288)

الحل: $ح_{ن} = ح_1 ر^{ن-1}$

$ح_6 = 9\times(ر) \Leftarrow 9ر^5 = -288$

$ر^5 = \frac{288-}{9} = -32 = (-2) \Leftarrow ر = -2$

$\langle 9، -18، +36، -72، ... \rangle$

جـ(أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية ⟨320، 160،.....،10⟩

الحل: $ح_1 = 320$، $ر = \frac{160}{320} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$ح_ن = 10$ المطلوب (ن = ؟)

نعلم أن $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}$

$10 = 320 (\frac{1}{2})^{ن-1}$

$\frac{10}{320} = (\frac{1}{2})^{ن-1} \Leftarrow \frac{1}{32} = (\frac{1}{2})^{ن-1} \Leftarrow (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})^{ن-1}$

$\Leftarrow ن - 1 = 5 \Leftarrow ن = 6$

د) أوجد الحد السادس من متتالية هندسية موجبة مجموع الحدين الأول والثاني منها يساوي (24) وحدها الثالث يساوي (2).

الحل: $ح_1 + ح_1 ر = 24 \Leftarrow$ $\boxed{ح_1 (1+ر) = 24}$ $\leftarrow (1)$

$\boxed{ح_1 ر^2 = 2}$ $\leftarrow (2)$

قسمة (1) على (2) $\frac{ح_1 (1+ر)}{ح_1 ر^2} = \frac{24}{2} \Leftarrow 12ر^2 = 1+ر$

$\Leftarrow 12ر^2 - ر - 1 = 0$ $(4ر + 1)(3ر - 1) = 0$

أما $4ر + 1 = 0 \Leftarrow ر = -\frac{1}{4} \Leftarrow$ أو $3ر - 1 = 0 \Leftarrow$ $\boxed{ر = \frac{1}{3}}$

- لما $ر = -\frac{1}{4}$ عوض في (2) $\Leftarrow ح_1 (\frac{1}{16}) = 2 \Leftarrow$

$ح_1 = \frac{16}{1} \times 2 = 32$

$\Leftarrow ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_6 = 32 \times (-\frac{1}{4})^5 = -32 \times \frac{1}{5} = \frac{-1}{32}$

- لما $ر = \frac{1}{3}$ عوض (2) $ح_1 \times \frac{1}{3} = 2 \Leftarrow ح_1 = 2 \times \frac{9}{1}$

$\Leftarrow ح_6 = 2 \times 9 (\frac{1}{3})^{6-1} = \frac{9 \times 2}{5_3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$