Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik A delprøve 1 og 2, vejledende opgavesæt 1.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Delprøve 1

Opgave 1:
(a) Hastighedsvektoren bestemmes og man regner $t = 2$.
$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $-4 \leq t \leq 4$, så er
$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$, $-4 \leq t \leq 4$ og med $t = 2$ fås
$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

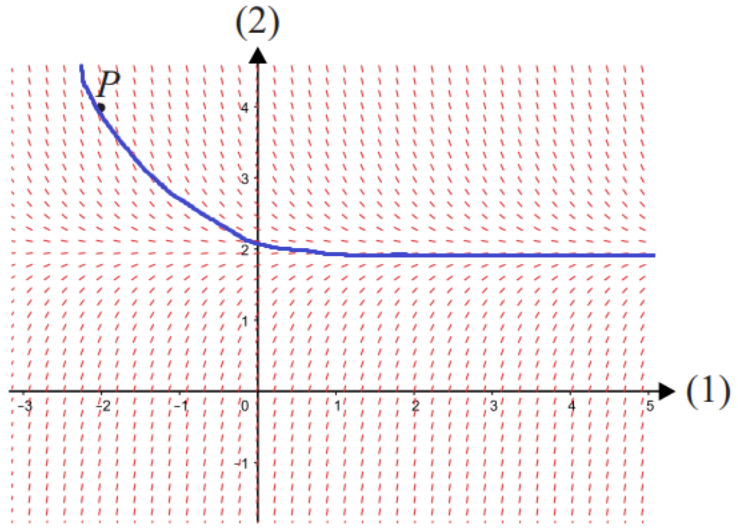
Opgave 2:
(a) Funktionen er $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Så er integralet
$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = \left[x^3 + x^2 + x\right]_1^2 = 11$$

Opgave 3:
(a) Der er givet
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
Dvs.
$$M^2 = M \bullet M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 15 & 19 \end{bmatrix}$$
NB: Det er ikke alm multikplikation!!!

Og dermed er
$$M^2 . \vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 15 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ 15 \cdot 1 + 19 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 91 \end{bmatrix}$$

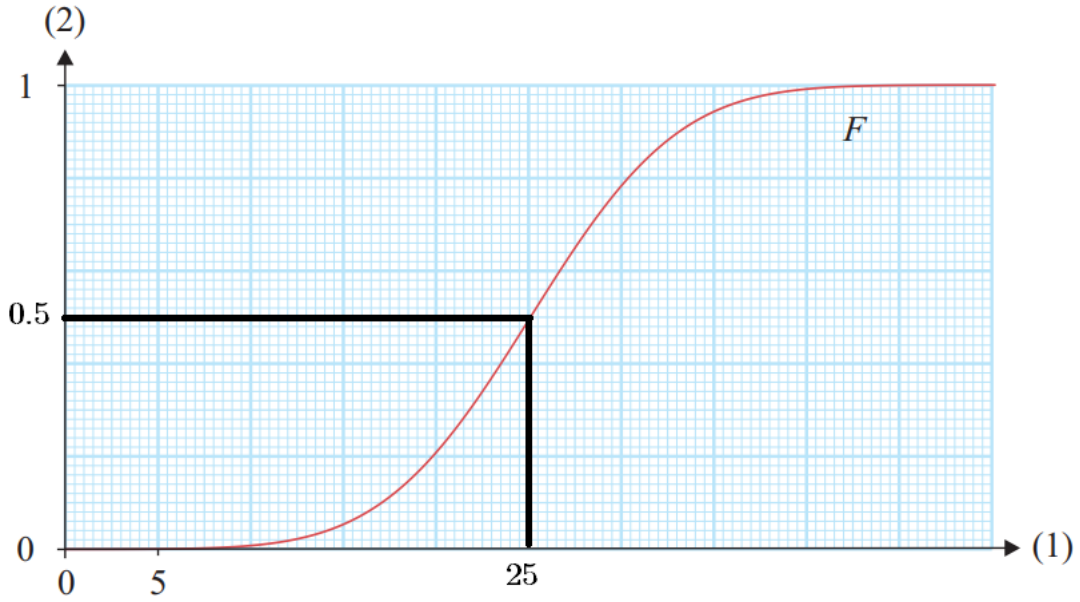
Opgave 4:
(a)
$M'(t)$: Væksthastigheden
$M(t)$: Massen af et træ, målt i kg
t: tiden målt iår.
$k = 1.04$ proportionalitetskonstant
En passende differentialligning er
$M'(t) = 1.04 \cdot M(t)$

Opgave 5:
(a) En cirka skitse



Mulig løsningskurve (blå) er skitseret og er formentlig på formen $y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$.

Opgave 6:
(a) Læs evt. formelsamlingen.



Man ser, at $E(X) = 25$, så man forventer, at gennemsnittet af sækkene med korn vejer 25kg.

Opgave 7:
(a) Man har $x=2$ og $f(2)=6$, så

$$f'(2)=\frac{6}{2}+3\cdot 2+1=10$$

Dermed er tangentligningen

$$y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)=10\cdot(x-2)+6=10x-14$$

Opgave 8:
(a) Perioden T er

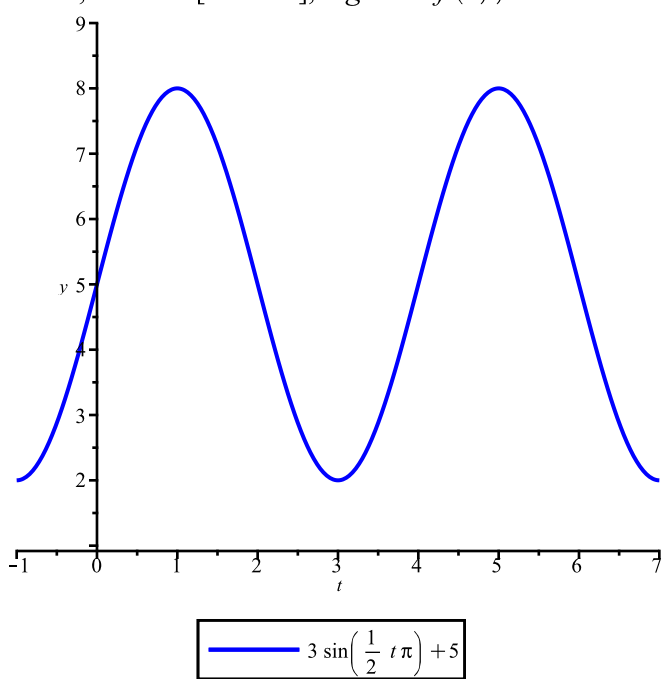
$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Pi}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=2\cdot 2=4.$$

Læs evt. formelsamlingen.

(b)
(Vi snyder lidt og lader Maple tegne funktionen).

$$f(t):=3\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Pi}\cdot t\right)+5:$$

$$plot(f(t), t=-1..7, y=1..9, color=["\text{Blue}"], legend=f(t))$$



Opgave 9:
(a) Produktreglen+kædereglen benyttes.
$a(x)=x^2-5x+6 \Rightarrow a'(x)=2x-5$
$b(x)=\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow b'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}$ (kædereglen: Ydre funktion $\ln(x)$, indre funktion x^2+1)
Dette giver

$$f'(x)=a(x)\cdot b'(x)+a'(x)\cdot b(x)=\left(x^2-5x+6\right)\cdot\frac{2x}{x^2+1}+(2x-5)\cdot\ln\left(x^2+1\right)$$
$$=\frac{2x^3-10x^2+12x}{x^2+1}+(2x-5)\cdot\ln\left(x^2+1\right)$$

Ved $f'(0)$ fås

$$f'(0)=\frac{2\cdot 0^3-10\cdot 0^2+12\cdot 0}{0^2+1}+(2\cdot 0-5)\cdot\ln\left(0^2+1\right)=\frac{0-0+0}{1}+(-5)\cdot\ln(1)=-5\cdot 0=0$$

Dvs. $f'(0)=0$.

(b) Denne ligning løses vha. nulreglen, dvs. $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$, så
$\left(x^2-5x+6\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3)=0 \vee \ln\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=3$ som er løsninger.

Opgave 10:
(a) Der gælder $f(x)>g(x)$, $x\in(0;2)$.

$$M=\int_0^2 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=[F(x)-G(x)]_0^2=F(2)-G(2)-(F(0)-G(0))=F(2)-G(2)-F(0)+G(0)=66-(-62)-0+0=66+62=128$$

Opgave 11:
Linjen l bestemmes.

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-4}{2-0}=-2$$

$b=y_1-a\cdot x_1=4-(-2)\cdot 0=4$, dvs.
$y=-2x+4$.

(a) $A(x)=x\cdot y=x\cdot(-2\cdot x+4)=-2x^2+4x$ i intevallet $0<x<2$.

(b) Da $A(x)$ er et andengradspolynomium med $a<0$, $(-2<0)$ fås toppunktet

$$T=-\frac{b}{2\cdot a}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$$

Dvs. $x=1$ giver det største areal.

Delprøve 2

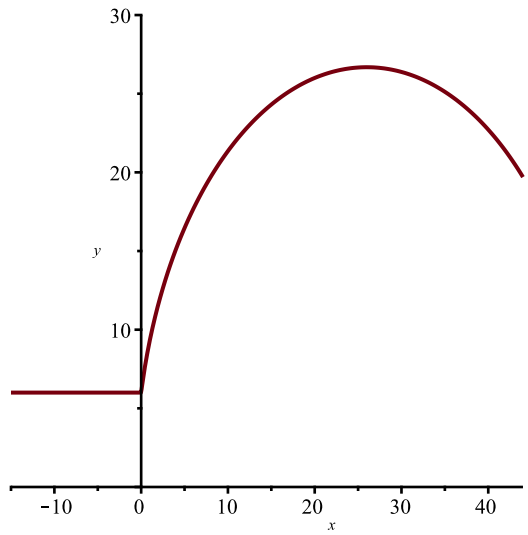
Opgave 12:

$restart : with(Gym) :$

(a) Funktionen defineres og der laves et plot.

$$f(x) := \begin{cases} 6 & -15 \le x \le 0 \\ \sqrt{-x^2 + 52 \cdot x + 36} & 0 < x \le 44 \end{cases} :$$

$plot(f(x), x = -15..44, y = 0..30)$



(b) Længden af det krummede område læses som $f(x)$, $0 < x \le 44$, så

$$L = \int_0^{44} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$L = 2 \arcsin\left(\frac{13\sqrt{178}}{178}\right)\sqrt{178} + 2 \arcsin\left(\frac{9\sqrt{178}}{178}\right)\sqrt{178} \quad \textbf{(1)}$$

$evalf[5](\%)$

$$L = 55.621 \quad \textbf{(2)}$$

Dvs den krumme længde er 55.6cm.

Opgave 13:

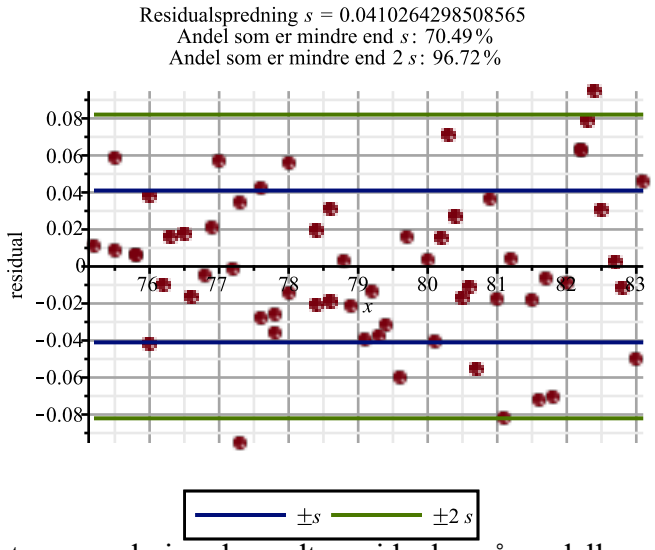
$restart : with(Gym) :$

$L1 := [83.1, 83, 82.8, 82.7, 82.4, 82.5, 82.2, 82.3, 82.2, 82, 81.8, 81.7, 81.5, 81.6, 81.2, 81.1, 81, 80.9, 80.7, 80.6, 80.5, 80.4, 80.1, 80.3, 80, 80.2, 79.6, 79.7, 79.3, 79.4, 79.1, 79.2, 78.8, 78.9, 78.6, 78.6, 78.4, 78.4, 78, 78, 77.8, 77.8, 77.6, 77.6, 77.3, 77.3, 77.2, 77, 76.8, 76.9, 76.5, 76.6, 76.2, 76.3, 76, 76, 75.8, 75.8, 75.5, 75.5, 75.2] :$

$L2 := [6.59, 6.49, 6.52, 6.53, 6.61, 6.55, 6.57, 6.59, 6.57, 6.49, 6.42, 6.48, 6.46, 6.41, 6.47, 6.38, 6.44, 6.49, 6.39, 6.43, 6.42, 6.46, 6.38, 6.5, 6.42, 6.44, 6.34, 6.42, 6.35, 6.36, 6.34, 6.37, 6.37, 6.35, 6.39, 6.34, 6.33, 6.37, 6.39, 6.32, 6.29, 6.3, 6.36, 6.29, 6.34, 6.21, 6.3, 6.35, 6.28, 6.31, 6.29, 6.26, 6.25, 6.28, 6.29, 6.21, 6.25, 6.25, 6.24, 6.29, 6.23] :$

(a) Der laves et residualplot.

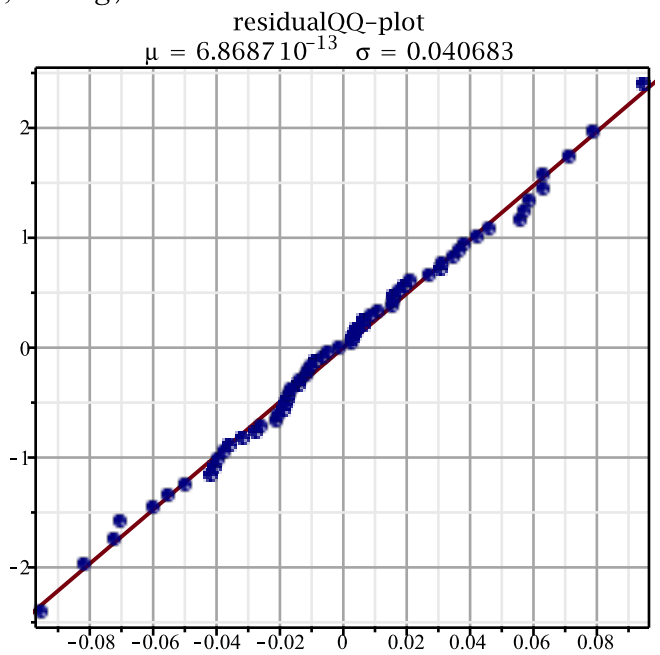
$plotResidualer(L1, L2, LinReg)$



Der er ikke noget mønster, men derimod spredte residualer, så modellen er brugbar.

Fortsættes.

(b) Man kan vise at punkterne er normalfordelte vha. et histogram eller et QQ-plot.
I Maple:
residualQQplot(*L1*, *L2*, *LinReg*)



Da residualerne ligger langs en ret linje kan man slutte, at data er normalfordelte. For at finde et 95%-konfidensinterval til a benyttes følgende kommando.
testLin(*L1*, *L2*)

	a	b
Koefficient	0.041148	3.124677
Standardfejl	0.002292	0.181607
t-stat	17.953392	17.205731
p-værdi	0.000000	0.000000
Nedre 95.00%	0.036562	2.761283
Øvre 95.00%	0.045734	3.488072
Frihedsgrader	59	

Konfidensintervallet er $[0.037; 0.046]$.

Opgave 14:
(a) Gennemsnittet bestemmes.
$E(X) = 0.7 \cdot (-10) + 0.2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 25$

$$E(X) = -3.5 \tag{3}$$

(b) Fortjeneste kræver:
$0.7 \cdot (-10) + 0.2 \cdot a + 0.1 \cdot a^2 > 0$

$$0 < -7.0 + 0.2\,a + 0.1\,a^2 \tag{4}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a < -9.426149773], [7.426149773 < a]] \tag{5}$$

Så man skal have en a-værdi på 7.43 for at have en fortjeneste.

Opgave 15:
(a) Væksthastigheden er
$T'(x) = 1.54 - 0.259 \cdot (26 - 22)$

$$\frac{d}{dx}\, T(x) = 0.504 \tag{6}$$

Så ved en temperatur på $26^{o}C$ øges temperaturen hver time med $0.5^{o}C$.

(b) Differentialligningen løses.
$dsolve(\{T'(x) = 1.54 - 0.259 \cdot (T(x) - 22), T(0) = 22\}, T(x))$

$$T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37} \tag{7}$$

$$T(x) := \frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37}$$

$$T := x \mapsto \frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37} \tag{8}$$

$T(x) = 27$

$$\frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37} = 27 \tag{9}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{1000 \ln\left(\frac{7}{44}\right)}{259}\right]\right] \tag{10}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[x = 7.0977]] \tag{11}$$

Der skal gå lidt over 7 timer før man kan lukke den sarte fisk ud.

Opgave 16:

$$\vec{r}(t) := \begin{bmatrix} t^3 - 12\cdot t \\ t^2 - 2\cdot t \end{bmatrix}:$$

(a)

$\vec{r}(t_0)$

$$\begin{bmatrix} t_0^3 - 12\,t_0 \\ t_0^2 - 2\,t_0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

$$\begin{bmatrix} t^3 - 12\,t \\ t^2 - 2\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0^3 - 12\,t_0 \\ t_0^2 - 2\,t_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$solve\left(\left\{t^3 - 12\,t = t_0^3 - 12\,t_0,\ t^2 - 2\,t = t_0^2 - 2\,t_0\right\}\right)$

$$\{t = t,\ t_0 = t\},\ \{t = -2,\ t_0 = 4\},\ \{t = 4,\ t_0 = -2\} \tag{14}$$

Dvs. $t = -2$ og $t_0 = 4$.

(b) Hastighedsvektorfunktionen bestemmes...

$$\vec{v}(t) := \begin{bmatrix} \frac{d}{d\,t}\left(t^3 - 12\cdot t\right) \\ \frac{d}{d\,t}\left(t^2 - 2\cdot t\right) \end{bmatrix} : \vec{v}(t)$$

$$\begin{bmatrix} 3\,t^2 - 12 \\ 2\,t - 2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3\cdot(-2)^2 - 12 \\ 2\cdot(-2) - 2 \end{bmatrix} : \vec{b} := \begin{bmatrix} 3\cdot(4)^2 - 12 \\ 2\cdot(4) - 2 \end{bmatrix}:$$

$v = 180 - vinkel\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$

$$v = 80.53767776 \tag{16}$$

Dvs. den spidse vinkel er $v = 80.54^o$.

Opgave 17:

$restart :; with(Gym) :; with(LinearAlgebra) :$

Denne opgave kræver forberedelsesmateriale.

(a) Da 10% af eleverne skifter mening fra A til B, så må der være 90% af eleverne der ikke skifter mening, og 22% skifter fra B til A, så må 78% ikke skifte mening. Disse observationer kan indsættes i en matrice og der kan dannes et ligningssystem

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.22 \\ 0.1 & 0.78 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

(b) Man bruger

$M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$, som er ækvivalent med $(M - I \cdot \lambda) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ og I er identitetsmatricen.

Man får

$$\begin{bmatrix} 0.9 - 1 & 0.22 \\ 0.1 & 0.78 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.22 \\ 0.1 & -0.22 \end{bmatrix}$$

$ReducedRowEchelonForm(\%)$

$$\begin{bmatrix} 1. & -2.20000000000000 \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \tag{17}$$

Dermed er

$$\begin{bmatrix} 1 & -2.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man ser, at $1 \cdot v_1 - 2.2 \cdot v_2 = 0$ og isoleres v_1 fås $v_1 = 2.2\ v_2$. Dermed må egenvektoren være

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 \cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man åbne $with(LinearAlgebra)$ og skrive:

$$Eigenvectors\left(\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{22}{100} \\ \frac{1}{10} & \frac{78}{100} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{17}{25} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$evalf[5](\%) = \begin{bmatrix} 1. \\ 0.68000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.2000 & -1. \\ 1. & 1. \end{bmatrix}$$

Egenvektoren fortæller, at forholdet mellem eleverne der vælger sodavand A henholsvis sodavand B er 2.2 gange flere. Egenværdien 1 viser, at antallet af deltagere i undersøgelse til undersøgelse er den samme.

Opgave 18:

$restart :; with(Gym) :$

$f(x, y) := x^3 - 3 \cdot x \cdot y + y^3 :$

(a) De partielle afledede beregnes.

$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$3\,x^2 - 3\,y \tag{18}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$$3\,y^2 - 3\,x \tag{19}$$

(b)

Gradienten er

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3\,x^2 - 3\,y \\ 3\,y^2 - 3\,x \end{bmatrix}$$

Og dermed stationære punkter:

$\nabla f(x, y) = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 3\,x^2 - 3\,y \\ 3\,y^2 - 3\,x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ved at løse et ligningssystem fås

$evalf[5]\left(solve\left(\left\{3\,x^2 - 3\,y = 0, 3\,y^2 - 3\,x = 0\right\}\right)\right)$

$$\{x = 0., y = 0.\}, \{x = 1., y = 1.\}, \{x = -0.50000 - 0.86603\,\mathrm{I}, y = -0.50000 + 0.86603\,\mathrm{I}\} \tag{20}$$

De komplekse værdier forkastes.

Arten af de stationære punkter beregnes.

$r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x, y))$

$$r = 6\,x \tag{21}$$

$s = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} (f(x, y))$

$$s = -3 \tag{22}$$

$t = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f(x, y))$

$$t = 6\,y \tag{23}$$

For $x_0 = 0 = y_0$ fås

$r = 6 \cdot 0;\ s = -3;\ t = 6 \cdot 0$

$$r = 0$$
$$s = -3$$
$$t = 0 \tag{24}$$

Og

$0 \cdot 0 - (-3)^2 < 0$

$$-9 < 0 \tag{25}$$

Der er saddelpunkt.

For $x_0 = 1 = y_0$ fås
$r = 6 \cdot 1;\ s = -3;\ t = 6 \cdot 1$

$$r = 6$$
$$s = -3$$
$$t = 6 \tag{26}$$

Og
$6 \cdot 6 - (-3)^2 > 0$

$$0 < 27 \tag{27}$$

Og da $r > 0$, s
Der er lokalt minimum.

Gympakken kan heldigvis også afgøre det for os.
$art(f(x, y), [x, y] = [0, 0])$

$r = 0 \quad s = -3 \quad t = 0$
Diskriminanten er $\Delta = r\,t - s^2 = -9$
Da $\Delta < 0$ har funktionen et saddelpunkt i
$[0, 0]$
og funktionsværdien er 0

og
$art(f(x, y), [x, y] = [1, 1])$

$r = 6 \quad s = -3 \quad t = 6$
Diskriminanten er $\Delta = r\,t - s^2 = 27$
Da $\Delta > 0$ og $r > 0$ har funktionen et lokalt minimum i
$[1, 1]$
og funktionsværdien er -1

Opgave 19:
(a) Definér funktionen.

$f(x) := \frac{1}{x}$:

Løs:

$solve(f(x) = 5)$

$$\frac{1}{5} \tag{28}$$

Fra 0 til $\frac{1}{5}$ løses uden integral, men ved hjælp af formlen for en cylinder. Radius er $r = 5$ og højden er $h = \frac{1}{5}$, så

$V_{cylinder1} := \frac{1}{5} \cdot \mathrm{Pi} \cdot 5^2$

$$V_{cylinder1} := 5\,\pi \tag{29}$$

Og $\frac{1}{5}$ til 5 løses med integral, dvs. omdrejningslegeme.

$V_{cylinder2} := \mathrm{Pi} \cdot \int_{\frac{1}{5}}^{5} \left(f(x)^2\right) \mathrm{d}x$

$$V_{cylinder2} := \frac{24\,\pi}{5} \tag{30}$$

Totalt:

$V = V_{cylinder1} + V_{cylinder2}$

$$V = \frac{49\,\pi}{5} \tag{31}$$

$evalf[5](\%)$

$$V = 30.788 \tag{32}$$

Dvs. volumen er 30.788.