1 Szeregi liczbowe

Definicja 1 (szeregu liczbowego)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ((a_n), (S_n)); \quad \text{gdzie: } S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Definicja 2 (zbieżności szeregu liczbowego)**.**

Mówimy, że szereg $((a_n), (S_n))$ jest zbieżny $\overset{\text{def}}{\iff} \exists S\colon \lim_{n\to\infty} S_n = s$.
Liczbę S nazywamy sumą szeregu.

Twierdzenie 1 (WK zbieżności szeregu liczbowego)**.**

Z: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- zbieżny*

T: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Twierdzenie 2 (o arytmetyce szeregów liczbowych)**.**

Z: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ((a_n), (S_n)), \sum_{n=1}^{\infty} b_n = ((b_n), (T_n))$ *- szeregi zbieżne*

T: $\displaystyle\forall c \in \mathbb{R} \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *- zbieżny* $\displaystyle\wedge\, \forall c \in \mathbb{R} \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *- zbieżny* $\displaystyle\wedge \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$

Definicja 3 (szeregu harmonicznego)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \implies \text{szereg zbieżny} \\ \alpha \leqslant 1 \implies \text{szereg rozbieżny} \end{array}$$

Definicja 4 (szeregu geometrycznego)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \begin{array}{l} |q| < 1 \implies \text{szereg zbieżny}, \quad S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}; \quad S = \frac{a}{1-q} \\ |q| \geqslant 1 \implies \text{szereg rozbieżny} \end{array}$$

Definicja 5 (bezwzględnej i warunkowej zbieżności szeregu)**.**

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym $\overset{\text{def}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym $\overset{\text{def}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie 3 (o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego)**.**

Z: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *jest bezwzględnie zbieżny*

T: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny*

Twierdzenie 4 (Kryterium d'Alemberta)**.**

Z: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \forall n \; a_n \neq 0$

$g = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

T: $g < 1 \implies$ *szereg zbieżny*

$g > 1 \implies$ *szereg rozbieżny*

Twierdzenie 5 (Kryterium Cauchy'ego)**.**

Z: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

T: $g < 1 \implies$ *szereg zbieżny*

$g > 1 \implies$ *szereg rozbieżny*

Twierdzenie 6 (Kryteria porównawcze)**.**

Z: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n \; a_n, b_n \geqslant 0$

$\exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 a_n \leqslant b_n$

T: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny* $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny* $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny*

Twierdzenie 7 (Kryterium porównawcze graniczne (ilorazowe))**.**

Z: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n \; a_n \geqslant 0, b_n > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$

T: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny*

Twierdzenie 8 (Kryterium całkowe)**.**

$$Z\!: \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\colon\ \forall n\, a_n \geqslant 0$$

$$f : [n_0, \infty) \to [0, \infty) \text{ - \textit{nierosnąca, całkowalna}}$$

$$\forall n \geqslant n_0\ a_n = f(n)$$

$$T\!: \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ \textit{jest zbieżny}} \iff \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx \text{ \textit{jest zbieżna}}$$

Definicja 6 (szeregu naprzemiennego)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\colon\ \forall n\, a_n > 0,\ (a_n) \text{ malejący, } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Twierdzenie 9 (Leibniza)**.**
Szereg naprzemienny jest zbieżny.
Ponadto: $\forall n\ |S - S_n| < a_{n+1}$

2 Ciągi funkcyjne

Definicja 7 (ciągu funkcyjnego)**.**

$$(f_n(x)):\quad \forall n\, f_n\colon X \to Y \text{ (przestrzenie Banacha)}$$

Definicja 8 (punktowej zbieżności)**.**

Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na $X \overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists f(x)\colon X \to Y\colon\ \forall x\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$$f_n \overset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\iff} \forall x\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definicja 9 (jednostajnej zbieżności)**.**

Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na $X \overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists f(x)\colon$

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\, \forall x\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 10 (WK zbieżności jednostajnej)**.**

$$Z\!: f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$$

$$T\!: f_n \overset{X}{\to} f$$

Twierdzenie 11 (o ciągłości funkcji granicznej)**.**

$$Z\!: \forall n\, f_n \in C\,(X) \quad f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$$

$$T\!: f \in C\,(X)$$

Definicja 10 (metryki Czebyszewa)**.**

$$\text{Z: } f, g \in B(X, Y)$$

$$d_C(f, g) \overset{\text{def}}{=\!=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Twierdzenie 12 (o związku jednostajnej zbieżności z metryką Czebyszewa)**.**

Z: $\forall n\ f_n \in B(X, Y)$

T: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n \to \infty} d_C(f_n, f) = 0$

Twierdzenie 13 (o różniczkowaniu funkcji granicznej)**.**

Z: $\forall n\ f_n\colon\ X \to \mathbb{R}$, $\quad X$ *- przedział na* $\mathbb{R}$

$\quad \forall n\ f_n \in D(X) \qquad f_n \overset{X}{\to} f \qquad f'_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$

T: $f \in D(X) \ \wedge\ f' = g$

$\quad \forall x \in X\ f'(x) = \left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$

Twierdzenie 14 (o całkowaniu funkcji granicznej)**.**

Z: $\forall n\ f_n\colon\ X \to \mathbb{R}$, $\quad X$ *- przedział na* $\mathbb{R}$

$\quad \forall n\ f_n \in C^{-1}(X) \qquad f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$

T: $\forall a, b \in X\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

3 Szeregi funkcyjne

Definicja 11 (szeregu funkcyjnego)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = ((f_n(x)), (S_n(x)))\,; \quad \text{gdzie: } \forall x \in X\ S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Definicja 12 (punktowej zbieżności szeregu)**.**
Mówimy, że szereg funkcyjny $((f_n(x)), (S_n(x)))$ jest zbieżny punktowo na $X \overset{\text{def}}{\iff} \exists S(x)\colon S_n \overset{X}{\to} S$.

Definicja 13 (jednostajnej zbieżności szeregu)**.**
Mówimy, że szereg funkcyjny $((f_n(x)), (S_n(x)))$ jest zbieżny jednostajnie na $X \overset{\text{def}}{\iff} \exists S(x)\colon S_n \overset{X}{\rightrightarrows} S$.

Twierdzenie 15 (WK punktowej zbieżności szeregu).

Z: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *- punktowo zbieżny na* X

T: $f_n \xrightarrow{X} 0$

Twierdzenie 16 (WK jednostajnej zbieżności szeregu).

Z: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *- jednostajnie zbieżny na* X

T: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *- punktowo zbieżny na* X

$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$

Twierdzenie 17 (Weierstrassa).

Z: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- szereg zbieżny*

$\forall x\, \forall n\, |f_n(x)| \leqslant a_n$

T: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest jednostajnie zbieżny na* X

Twierdzenie 18 (o ciągłości sumy szeregu funkcyjnego).

Z: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *- jednostajnie zbieżny na* X

$\forall n\, f_n \in C\,(X)$

T: $S \in C\,(X)$

Twierdzenie 19 (o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego).

Z: $\forall n\, f_n :\ x \to \mathbb{R}, \quad X$ *- przedział na* $\mathbb{R}$

$\forall n\, f_n \in D\,(X)$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *- punktowo zbieżny na* X

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *- jednostajnie zbieżny na* X

T: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Twierdzenie 20 (o całkowaniu szeregu funkcyjnego).

$$Z\!: \forall n\, f_n:\ X \to \mathbb{R}, \quad X \text{ - } \textit{przedział na}\, \mathbb{R}$$

$$\forall n\, f_n \in C^{-1}(X) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ - } \textit{jednostajnie zbieżny na}\, X$$

$$T\!: \forall a,b \in X \ \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

4 Szeregi potęgowe

Definicja 14 (szeregu potęgowego).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad x_0 \text{ - środek szeregu}$$

Twierdzenie 21 (o zbieżności szeregu potęgowego).
Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *jest zbieżny dla* x_1*, to jest zbieżny dla każdego* x_2: $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$.
Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *jest rozbieżny dla* x_1*, to jest rozbieżny dla każdego* x_2: $|x_2 - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Definicja 15 (obszaru i promienia zbieżności).
Obszarem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy zbiór wszystkich x, dla których szereg jest zbieżny.
Promieniem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy:

$$R = sup\{|x - x_0| : \text{ szereg jest zbieżny na } X\}$$

Twierdzenie 22 (o promieniu zbieżności).

$$Z\!: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \vee \lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$T\!: \quad R = \begin{cases} 0, & \lambda = \infty \\ \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty \\ \infty, & \lambda = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie 23 (o bezwzględnej i jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego).

$$Z\!: \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ - } \textit{zbieżny na } (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0$$

T: Szereg jest zbieżny bezwzględnie na $(x_0 - R, x_0 + R)$.
Szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na $(x_0 - R, x_0 + R)$

(tzn. jednostajnie zbieżny w kažnym przedziale domkniętym $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + r)$*).*

Twierdzenie 24 (o własnościach sumy szeregu potęgowego)**.**

Z: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *- zbieżny na* $(x_0 - R, x_0 + R)$

T: $S \in D((x_0 - R, x_0 + R))$

$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \;\; S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)'$

$\forall a, b, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_a^b S(x)\,(\,dx) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n \, dx$$

Twierdzenie 25 (Abela)**.**

Z: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *- zbieżny na* $[x_0 - R, x_0 + R)$ *(lub* $(x_0 - R, x_0 + R]$ *)*

$\exists a = \lim_{x \to x_0 - R^+} S(x) \quad (\exists b = \lim_{x \to x_0 + R^-} S(x))$

T: $S(x_0 - R) = a \quad (S(x_0 - R) = b)$

5 Szeregi Taylora

Twierdzenie 26 (o wzorze Taylora)**.**

Z: $f \in C^n(U)$, *U - otoczenie punktu* x_0, $\quad x \in U$

T: $\exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x_0, x)$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

Twierdzenie 27 (o rozwijaniu funkci w szereg Taylora)**.**

Z: $f \in C^{\infty}(U)$, *U - otoczenie punktu* x_0

$\forall x \in U \;\; \lim_{n \to \infty} R_n(x_0, x) = 0$

T: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Jeżeli $x_0 = 0$*, to szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.*

Lemat 28.

$$\mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\mathrm{e}^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z$$

$$\mathrm{e}^{\imath \pi} + 1 = 0$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(1+x)^\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \alpha, x \in \mathbb{R}$$

6 Szeregi Fouriera

Definicja 16 (zbioru funkcji całkowalnych z kwadratem)**.**

$$L^2[a,b] = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon \int_a^b f^2(x)\,dx < \infty \right\}$$

Twierdzenie 29.
$(L^2[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ *jest przestrzenią wektorową.*

Definicja 17 (iloczynu skalarnego funkcji)**.**

$$f \circ g := \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f, g \in L^2[a,b]$$

Twierdzenie 30.
$(L^2[a,b], \circ)$ *jest przestrzenią unitarną.*
$(L^2[a,b], \|f\| = \sqrt{f \circ f})$ *jest przestrzenią unormowaną.*
$(L^2[a,b], d(f,g) = \|f-g\|)$ *jest przestrzenią metryczną.*
Zbieżność w metryce d nazywamy zbieżnością przeciętną z kwadratem.

Definicja 18 (ciągu i szeregu ortogonalnego)**.**
Ciąg $(\varphi_n) \subset L^2[a,b]$ nazywamy ortogonalnym $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i,j \in \mathbb{N} \cup 0 \; i \neq j \implies \varphi_i \circ \varphi_j = 0$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \cup 0 \; \varphi_i \neq 0$$

Ciąg $(\varphi_n) \subset L^2[a,b]$ nazywamy ortonormalnym $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i,j \in \mathbb{N} \cup 0 \; \delta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j = \begin{cases} 0, \; i \neq j \\ 1, \; i = j \end{cases}$$

Szeregiem ortogonalnym nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, gdzie (φ_n) - ciąg ortogonalny, $(c_n) \subset \mathbb{R}$.

Twierdzenie 31 (o współczynnikach Eulera-Fouriera)**.**

Z: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *- jednostajnie zbieżny do* $f \in L^2[a,b]$

T: $\displaystyle\forall n \; c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$

Definicja 19 (szeregu Fouriera)**.** Szeregiem Fouriera funkcji $f \in L^2[a,b]$ względem ciągu ortogonalnego (φ_n) nazywamy szereg ortogonalny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, gdzie $\forall n \; c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$.
Piszemy wówczas: $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ (funkcji f odpowiada szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$).

Twierdzenie 32 (o nierówności Bessela)**.**

Z: $\displaystyle f \in L^2[a,b] \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$

T: $\displaystyle\|f\|^2 \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$

Twierdzenie 33 (o tożsamości Parsevala)**.**

Z: $\displaystyle f \in L^2[a,b] \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$

T: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji* f *na* $[a,b] \iff$

$$\iff \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

(tzn. $\displaystyle\|S_n - f\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (S_n(x) - f(x))^2 \, dx} = 0, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i$*).*

Definicja 20 (ciągu zupełnego)**.**

Ciąg ortogonalny (φ_n) nazywamy zupełnym $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall f \in L^2[a,b] \; \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \, \|\varphi_n\|^2$$

Lemat 34.

Z: $f \in L^2[a,b] \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \quad (\varphi_n)$ *- ciąg zupełny*

T: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do* f

7 Szeregi trygonometryczne Fouriera

Lemat 35.

Ciąg $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx)$ *jest ciągiem zupełnym.*

Definicja 21 (szeregu trygonometrycznego Fouriera)**.**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \text{ gdzie:}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

Definicja 22 (warunków Dirichleta)**.**
f jest ograniczona na $[a,b]$;
f jest przedziałami monotoniczna na $[a,b]$ ($[a,b]$ da się podzielić na skończoną liczbę przedziałów, w których f jest monotoniczna);
f jest ciągła na $[a,b]$ poza co najwyżej skończoną liczbą punktów nieciągłości, w których zachodzi:

$$f(x_0) \frac{\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)}{2}, \quad x \in (a,b)$$

$$f(a) = f(b) = \frac{\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to b^-} f(x)}{2}$$

Twierdzenie 36 (Dirichleta)**.**

Z: f *spełnia warunki Dirichleta na* $[-\pi, \pi]$

T: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sinnx) \xrightarrow{[-\pi,\pi]} f$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

Twierdzenie 37 (o rozwijaniu funkcji parzystej w szereg Fouriera)**.**

Z: f *- parzysta na* $[-\pi, \pi]$ $\quad f$ *spełnia warunki Dirichleta na* $[-\pi, \pi]$

T: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \xrightarrow{[-\pi,\pi]} f$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

Twierdzenie 38 (o rozwijaniu funkcji nieparzystej w szereg Fouriera)**.**

Z: f - nieparzysta na $[-\pi,\pi]$ f spełnia warunki Dirichleta na $[-\pi,\pi]$

T: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \xrightarrow{[-\pi,\pi]} f$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Lemat 39.

Suma szeregu trygonometrycznego funkcji f na $[a,b]$ jest funkcją okresową o $T=2\pi$ na całym $\mathbb{R}$.

Definicja 23 (rozwinięcia w szereg cosinusów)**.**

Rozwinięciem w szereg cosinusów funkcji f nazywamy rozwinięcie w szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f przedłużonej na przedział $[-\pi,\pi]$ w taki sposób, aby f była parzysta i spełniała warunki Dirichleta w $[-\pi,\pi]$. Wtedy:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \xrightarrow{[-\pi,\pi]} f, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

Definicja 24 (rozwinięcia w szereg sinusów)**.**

Rozwinięciem w szereg sinusów funkcji f nazywamy rozwinięcie w szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f przedłużonej na przedział $[-\pi,\pi]$ w taki sposób, aby f była nieparzysta i spełniała warunki Dirichleta w $[-\pi,\pi]$. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \xrightarrow{[-\pi,\pi]} f, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Twierdzenie 40 (o rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera)**.**

Z: f spełnia warunki Dirichleta na $[x_0-l, x_0+l]$

T: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right) \xrightarrow{[x_0-l,x_0+l]} f$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

8 Funkcje wielu zmiennych

Definicja 25 (kuli)**.**

$$K(x_0,r) = \{x\in X : d(x_0,x)<r\}$$

Definicja 26 (zbioru otwartego).

$$U \text{ - zbiór otwarty} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x_0 \in U \; \exists r > 0 \colon K\left(x_o, r\right) \subset U$$

Definicja 27 (otoczenia i sąsiedztwa punktu).

Otoczeniem punktu x_0 nazywamy dowolny zbiór otwarty U taki, że $x_0 \in U$. Sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy jego otoczenie bez niego samego.

Definicja 28 (obszaru).

Przestrzeń metryczna X jest niespójna $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists A_1, A_2$- zbiory otwarte: $A_1 \neq \varnothing \wedge A_2 \neq \varnothing \wedge A_1 \cap A_2 = \varnothing \wedge A_1 \cup A_2 = X$.

Przestrzeń metryczną nazywamy spójną gdy nie jest ona niespójna.

Obszarem w (X, d) nazywamy dowolny zbiór otwarty spójny.

Definicja 29 (granicy ciągu).

$$(X, d) \text{ - przestrzeń metryczna} \quad (x_n) \subset X$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n \to \infty} d\left(x_n, x_0\right) = 0$$

Definicja 30 (granicy ciągu wielu zmiennych).

$$x_n = \left(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k \quad x_0 = \left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_k}\right) \in \mathbb{R}^k$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall i = 1, \ldots, k \lim_{n \to \infty} x_{n_i} = x_{0_i}$$

Definicja 31 (funkcji wektorowej).

$$f \colon D \to \mathbb{R}^k \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad \forall i = 1, \ldots, k \; f_i \colon D \to \mathbb{R} \text{ - funkcja skalarna}$$

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, f_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$$

Definicja 32 (granicy funkcji).

$$f \colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D, g \in \mathbb{R}^k \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \left(x_n\right) \subset D \; \Big(\left(\forall n \; x_n \neq x_0\right) \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x_0\Big) \implies \lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = g$$

Twierdzenie 41 (o granicy funkcji wektorowej).

Funkcja $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *ma granicę* $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ *w punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}^n \iff \forall i = 1, 2, \ldots, k \; \lim_{x \to x_0} f_i(x) = g_i$

Definicja 33 (ciągłości funkcji w punkcie).

$$f \colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D$$

$$f \in C\left(x_0\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$$

Twierdzenie 42 (o ciągłości funkcji w punkcie)**.**

Z: $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n})$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$

T: $f \in C(x_0) \iff \forall i = 1, 2, \ldots, k \; f_i \in C(x_0)$

Twierdzenie 43 (o arytmetyce funkcji ciągłych)**.**

Z: $f, g\colon D \to \mathbb{R} \quad x_o \in D \subset \mathbb{R}^n \quad f, g \in C(x_0)$

T: $f \pm g, fg \in C(x_0) \quad \dfrac{f}{g} \in C(x_0)) \; g(x) \neq 0, x \in U(x_0)$

Lemat 44.

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
Wielomiany i funkcje wymierne n zmiennych są ciągłe w $\mathbb{R}^n$.

9 Rachunek różniczkowy wielu zmiennych

Definicja 34 (pochodnej wzdłuż wektora)**.**

$f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U(x_0) \subset D \quad h \in \mathbb{R}^n$ - wektor

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż wektora h nazywamy:

$$D_u f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora h nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż wersora wektora h ($\hat{h} = \frac{h}{\|h\|}$).

Definicja 35 (pochodnej cząstkowej)**.**

$f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in d \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U(x_0) \quad x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n})$

Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie x_0 względem i-tej zmiennej nazywamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}) =$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_{i-1}}, x_{0_i} + \Delta x_i, x_{0_{i+1}}, \ldots, x_{0_n}) - f(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n})}{\Delta x_i}$$

Lemat 45.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{e_i} f(x_0), \quad e_i \text{ - wektor kanoniczny w } \mathbb{R}^n$$

Definicja 36 (różniczkowalności funkcji)**.**

$$f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D$$

Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w $x_0 \overset{\text{def}}{\iff} \exists L_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ - odwzorowanie liniowe:

$\forall h \in \mathbb{R}^n \; f\left(x_0+h\right) - f\left(x_0\right) = L_{x_0}(h) + r_{x_0}(h)$, gdzie:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

$df\left(x_0\right) = L_{x_0}$ - różniczka f w x_0

Twierdzenie 46 (WK różniczkowalności funkcji)**.**

Z: $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\colon \left(x_0\right) \subset D$

$f \in D\left(x_0\right)$

T: $\forall i = 1, 2, \ldots, n \; \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right)$

$$\forall \left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right) \in \mathbb{R}^n \; df\left(x_0\right)\left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right) \cdot h_i$$

Twierdzenie 47 (o postaci macierzowej różniczki)**.**

Z: $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad x_0 = \left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}\right) \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D$

$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, f_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$

$f \in D\left(x_0\right)$

$$T\text{: } df\left(x_0\right)\left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x_0\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(x_0\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\left(x_0\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ hn \end{bmatrix}$$

Macierz $f'\left(x_0\right) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_0\right)\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,n}}$ *nazywamy macierzą Jakobiego funkcji* f *w punkcie* x_0.

Wyznacznik macierzy Jakobiego nazywamy jakobianem.

$$J\left(x_0\right) = \det f'\left(x_0\right)$$

Twierdzenie 48 (WK różniczkowalności związany z istnieniem pochodnych wzdłuż wektora)**.**

Z: $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right) \quad f \in D\left(x_0\right)$

T: $\forall h \in \mathbb{R}^n \exists D_h f\left(x_0\right) \quad df\left(x_0\right)(h) = D_h f\left(x_0\right)$

Twierdzenie 49 (WW różniczkowalności funkcji).

> *Z:* $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right)$
>
> $\forall i = 1, 2, \ldots, n \; \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0\right) \in C\left(x_0\right)$
>
> *T:* $f \in D\left(x_0\right)$

Twierdzenie 50 (WK różniczkowalności związany z ciągłością).

> *Z:* $f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \in \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right) \in D \quad f \in D\left(x_0\right)$
>
> *T:* $f \in C\left(x_0\right)$

Twierdzenie 51 (o interpretacji geometrycznej różniczkowalności funkcji dwóch zmiennych).

> *Z:* $f\colon D \to \mathbb{R} \quad \left(x_0, y_0\right) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists U\left(x_0, y_0\right) \subset D$
>
> *T:*$f \in D\left(x_0, y_0\right) \iff$ *f ma płaszczyznę styczną w punkcie* $\left(x_0, y_0\right)$ *o równaniu:*
>
> $$z = f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right)$$

Twierdzenie 52 (o przybliżaniu wartości funkcji).

> *Z:* $f : D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad f \in D\left(x_0\right)$
>
> *T:* $\forall h \in \mathbb{R}^n \; x_0 + h \in D \implies f\left(x_0 + h\right) \cong f\left(x_0\right) + df\left(x_0\right)(h)$

Definicja 37 (pochodnej cząstkowej n-tego rzędu).

$$f\colon D \to \mathbb{R}^k \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D \quad x_0 = \left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}\right) \quad \forall x \in U \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji f w punkcie x_0 nazywamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_{j-1}}, x_{0_j} + \Delta x_j, x_{0_{j+1}}, \ldots, x_{0_n}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}\right)}{\Delta x_j}$$

Analogicznie definiujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_n}}\left(x_0\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_n}}\left(x_0\right)\right)$$

Definicja 38 (różniczki drugiego rzędu).

> $f\colon D \to \mathbb{R}^k x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U\left(x_0\right) \subset D \quad f \in D(U)$
>
> $f \in D^2\left(x_0\right) \overset{\text{def}}{\iff} x \to df(x) \in D\left(x_0\right)$
>
> $d^2 f\left(x_0\right) = d\left(df\left(x_0\right)\right)$

Twierdzenie 53 (Schwartza)**.**

Z: $f \in D^2(x_0)$

T: $\forall i, j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Definicja 39 (odcinka domkniętego)**.**

$$\mathbb{R}^n \supset [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + \Theta(b-a), \Theta \in [0, 1]\}$$

Definicja 40 (obszaru wypukłego)**.**

Obszar $U \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in U\ [a, b] \in U$.

Twierdzenie 54 (o wzorze Taylora dla funkcji wielu zmiennych)**.**

Z: $f : D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U(x_0) \in D \quad f \in C^n(U) \quad x = x_0 + h \in U$

T: $\exists c \in [x_0, x_0 + h] : f(x_0 + h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k f(x_0)(h)}{k!} + \frac{d^n f(c)(h)}{n!}$

10 Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Definicja 41 (ekstremów lokalnych)**.**

$f : D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$

Mówimy, że funkcja f przyjmuje maksimum (minimum) lokalne w $x_0 \overset{\text{def}}{\iff}$

$\exists S(x_0) \subset D : \forall x \in S\ f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$

Twierdzenie 55 (WK istnienia ekstremum lokalnego)**.**

Z: $f : D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad x_0 \in D \setminus \partial D \quad f \in D(x_0)$

f przyjmuje ekstremum lokalne w x_0

T: $df(x_0) = 0 \quad (\iff \forall h \in \mathbb{R}^n\ df(x_0)(h) = 0 (\iff \forall i = 1, 2, \ldots, n\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0))$

Definicja 42 (formy kwadratowej)**.**

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j &= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1n} x_1 x_n + \\ &+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{2n} x_2 x_n + \ldots + \\ &+ a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 =\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T A X \qquad \begin{matrix} A \text{ - macierz symetryczna} \\ (\forall i, j = 1, 2, \ldots, n\ a_{ij} = a_{ji}) \end{matrix}$$

Macierz A nazywamy macierzą formy kwadratowej.

Mówimy, że forma kwadratowa $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest:

1) dodatnio określona $\iff \forall h \in \mathbb{R}^n\ h \neq 0 \implies \varphi(h) > 0$

2) ujemnie określona $\iff \forall h \in \mathbb{R}^n\ h \neq 0 \implies \varphi(h) < 0$

3) nieujemnie określona $\iff \forall h \in \mathbb{R}^n\ \varphi(h) \geqslant 0$

4) niedodatnio określona $\iff \forall h \in \mathbb{R}^n\ \varphi(h) \leqslant 0$

5) nieokreślona $\iff \exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(h_1) < 0 \wedge \varphi(h_2) > 0$

Twierdzenie 56 (Sylvestera)**.**

Z: A - macierz formy kwadratowej $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ \text{- \textit{minory główne}} \end{array}$$

T: *1)* $(\forall k = 1, 2, \dots, n\ d_k > 0) \implies \varphi$ *jest dodatnio określona.*

2) $\left(\forall k = 1, 2, \dots, n\ (-1)^k d_k > 0\right) \implies \varphi$ *jest ujemnie określona.*

3) $(\forall k = 1, 2, \dots, n\ d_k \geqslant 0) \implies \varphi$ *jest nieujemnie określona.*

4) $\left(\forall k = 1, 2, \dots, n\ (-1)^k d_k \geqslant 0\right) \implies \varphi$ *jest niedodatnio określona.*

5) Jeśli nie zachodzi ani 3), ani 4), to φ *jest nieokreślona.*

Twierdzenie 57 (WW istnienia ekstremum lokalnego)**.**

Z: $f\colon D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \exists U(x_0) \subset D \quad f \in C^2(U)$

f *spełnia WK istnienia ekstremum lokalnego w* x_0

$$M(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix} \text{-\textit{macierz Hessego}}$$

T: *Jeżeli forma kwadratowa związana z macierzą pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (macierzą Hessego):*

1) …jest dodatnio określona, to f *ma minimum lokalne w* x_0.

2) …jest ujemnie określona, to f *ma maksimum lokalne w* x_0.

3) …jest nieokreślona, to f *nie ma ekstremum lokalnego w* x_0.

Definicja 43.

$$f\colon D\to\mathbb{R}, g\colon D'\to\mathbb{R} \quad D,D'\subset\mathbb{R}^n \quad g\text{ - warunek}$$
$$S:=\{x\in\mathbb{R}^n\colon g(x)=0\}\subset D$$

Definicja 44 (ekstremum lokalnego warunkowego)**.**

Mówimy, że f przyjmuje maksimum (minimum) warunkowe lokalne w punkcie $x_0\in S \overset{\text{def}}{\iff} \exists U\left(x_0\right)\subset D\colon \forall x\in U\cap S\; x\neq x_0 \implies f(x)\lesseqgtr f\left(x_0\right)$.

Definicja 45 (funkcji Lagrange'a)**.**

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)$$

Twierdzenie 58 (WK istnienia ekstremum warunkowego lokalnego)**.**

Z: $f\in C^1(D), g\in C^1(D')$ *f przyjmuje ekstremum warunkowe lokalne w* $x_0\in S$

T: $\forall i=1,2,\ldots,n\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\left(x_0,\lambda\right)=0 \quad \wedge g\left(x_0\right)=0$

Definicja 46 (hesjanu obrzeżonego)**.**

$$H=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}\left(x_0\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_n}\left(x_0,\lambda\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_n}\left(x_0,\lambda\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_1}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_n}\left(x_0,\lambda\right) \end{bmatrix}$$

$$H_k=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_k}\left(x_0\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_k}\left(x_0,\lambda\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_k}\left(x_0,\lambda\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_k}\left(x_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_1}\left(x_0,\lambda\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_2}\left(x_0,\lambda\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_k}\left(x_0,\lambda\right) \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 59 (WW istnienia ekstremum warunkowego lokalnego)**.**

Z: $f\in C^2(D), g\in C^2(D')$ *f spełnia WK istnienia ekstremum warunkowego lokalnego*

T: *1)* $\forall k=2,3,\ldots,n\; H_k<0 \implies f$ *ma minimum warunkowe w* x_0.

2) $\forall k=2,3,\ldots,n\; (-1)^{k-1}H_k<0 \implies f$ *ma maksimum warunkowe w* x_0.

3) Jeśli nie zachodzi ani $\forall k=2,3,\ldots,n\; H_k\leqslant 0$, *ani* $\forall k=2,3,\ldots,n\; (-1)^{k-1}H_k\leqslant 0$, *to f nie ma ekstremum warunkowego w* x_0.

11 Funkcje uwikłane

Definicja 47 (funkcji uwikłanej).

$F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists V = U(x_0), W = U(y_0) \quad F(x_0, y_0) = 0$

Jeżeli istnieje taka funkcja $y\colon V \to W$, że $\forall x \in V\, F(x, y(x)) = 0$, to mówimy, że równanie $F(x, y) = 0$ możemy rozwikłać w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Funkcję $y = y(x)$ nazywamy funkcją uwikłaną daną równaniem $F(x, y) = 0$.

Twierdzenie 60 (WW istnienia funkcji uwikłanej).

Z: $F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists U(x_0, y_0) \subset D \quad F(x_0, y_0) = 0$

$F \in C^1(U) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

T: $\exists$ *funkcja uwikłana* $y = y(x)$ *dana równaniem* $F(x, y) = 0$ *w otoczeniu punktu* (x_0, y_0)

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Twierdzenie 61 (wzór na drugą pochodną funkcji uwikłanej).

Z: $F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists U(x_0, y_0) \subset D \quad F(x_0, y_0) = 0$

$F \in C^2(U) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

spełniony jest WK istnienia ekstremum lokalnego ($y'(x_0) = 0$ ($\iff \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$))

T: $y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

Definicja 48 (funkcji uwikłanej 2 zmiennych).

$F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0, z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3 \quad \exists V = U(x_0, y_0), W = U(z_0) \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0$

Jeżeli istnieje taka funkcja $y\colon V \to W$, że $\forall x \in V\ F(x, y, z(x, y)) = 0$, to mówimy, że równanie $F(x, y, z) = 0$ możemy rozwikłać w otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0). Funkcję $z = z(x, y)$ nazywamy funkcją uwikłaną daną równaniem $F(x, y, z) = 0$.

Twierdzenie 62 (WW istnienia funkcji uwikłanej 2 zmiennych).

Z: $F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0, z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3 \quad \exists U(x_0, y_0, z_0) \subset D \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$F \in C^1(U) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

T: $\exists$ *funkcja uwikłana* $y = y(x, y)$ *dana równaniem* $F(x, y, z) = 0$ *w* U

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Twierdzenie 63 (wzór na drugą pochodną funkcji uwikłanej 2 zmiennych).

Z: $F\colon D \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0, z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3 \quad \exists U\,(x_0, y_0, z_0) \subset D \quad F\,(x_0, y_0, z_0) = 0$

$F \in C^2(U) \quad \frac{\partial F}{\partial z}\,(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

spełniony jest WK istnienia ekstremum lokalnego ($\frac{\partial F}{\partial x}\,(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}\,(x_0, y_0, z_0) = 0$*)*

T: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}\,(x_0, y_0, z_0)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}\,(x_0, y_0, z_0)}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}\,(x_0, y_0, z_0)}$

12 Różniczka funkcji złożonej

Twierdzenie 64 (o różniczkowalności funkcji złożonej).

Z: $f\colon D \to \mathbb{R}^k, g\colon E \to \mathbb{R}^m \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, y_0 = f\,(x_0) \in E \subset \mathbb{R}^k$

$\exists U = U\,(x_0) \subset D, V = U\,(y_0) \subset E \quad f \in D\,(x_0) \quad g \in D\,(x_0)$

$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, f_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \ldots, f_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n))$

$g\,(y_1, y_2, \ldots, y_k) = (g_1\,(y_1, y_2, \ldots, y_k)\,, g_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_k)\,, \ldots, g_m\,(y_1, y_2, \ldots, y_k))$

T: $g \circ f$ *jest różniczkowalna w* $x_0 \quad d(g \circ f)\,(x_0) = dg\,(y_0) \circ df\,(x_0)$

$h = g \circ f$

$h\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (h_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, h_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \ldots, h_m\,(x_1, x_2, \ldots, x_n))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}\,(x_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}\,(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}\,(x_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\,(y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\,(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}\,(y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\,(y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\,(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial y_k}\,(y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}\,(y_0) & \frac{\partial g_m}{\partial y_2}\,(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}\,(y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\,(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\,(x_0) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\,(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\,(x_0) \end{bmatrix}$$

13 Całki wielokrotne

Definicja 49 (całki podwójnej po prostokącie).

$z = f(x, y) \quad f\colon P \to \mathbb{R}$

Tworzymy ciąg podziałów (Π_n) prostokąta P. $\quad \Pi_n\colon P_1, P_2, \ldots, P_n$
δ_n - średnica podziału Π_n (długość najdłuższej przekątnej prostokątów:

$P_1, P_2, \ldots, P_n)$
Ciąg (Π_n) nazywamy normalnym $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ wybieramy punkt pośredni $(c_i, d_i) \in P_i$
Tworzymy sumę całkową: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i, d_i) \cdot |P_i|$.

Jeżeli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów prostokąta P istnieje granica właściwa ciągu sum całkowitych S_n i granica ta nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów, ani od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji f po prostokącie P i oznaczamy:

$$\iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy$$

Twierdzenie 65 (WW całkowalności funkcji na prostokącie)**.**
Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie P, to f jest całkowalna na P.

Twierdzenie 66 (Fubiniego)**.**

$$Z\!: P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad f \in C^{-1}(P) \quad \varphi\colon\ [a_1, b_1] \to \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \int_{a_2}^{b^2} f(x, y)\, dy$$

$$T\!: \varphi \in C^{-1}([a_1, b_1]) \iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)\, dx = \int_{a_1}^{b^1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\, dx$$

Definicja 50 (obszaru normalnego)**.**

$$D = \{(x, y)\colon x \in [a, b], \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}, \quad \varphi, \psi \in C([a, b])$$

Twierdzenie 67 (o całce iterowanej dla obszaru normalnego)**.**

Z: $f\colon d \to \mathbb{R} \quad f \in C(D) \quad D$ *-obszar normalny względem osi* Ox

$$T\!: \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Definicja 51 (obszaru regularnego)**.**

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\ D_i \text{ - obszar normalny względem którejś z osi}$$

$$\forall i, j = 1, 2, \ldots, n\ \ int\, D_i \cap int\, D_j = \varnothing$$

Twierdzenie 68 (o całce iterowanej dla obszaru regularnego)**.**

$$Z\!: D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \text{ - obszar regularny} \subset \mathbb{R}^2 \quad f : D \to \mathbb{R} \quad f \in C^{-1}(D)$$

$$T\!: \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x, y)\, dx\, dy$$

Twierdzenie 69 (o zamianie zmiennych w całce podwójnej).

Z: $f\colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad f \in C(D) \quad \Phi\colon D' \to D \quad \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$\Phi[int\, D'] = int\, D \quad \Phi'(u,v)$ - *macierz Jacobiego odwzorowania* Φ *dla* (u,v)

$J(u,v) = det\, \Phi'(u,v)$ - *jakobian odwzorowania* Φ *dla* $(u,v) \quad \forall (u,v) \in int\, D'\, J(u,v) \neq 0$

T: $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J(u,v)|\,du\,dv$

Twierdzenie 70 (o przejściu na współrzędne biegunowe).

Z: $f\colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$ - *obszar regularny* $\quad f \in C(D)$

$\Phi\colon D' \to D \quad \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

T: $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$

Twierdzenie 71 (o interpretacji geometrycznej całki podwójnej).

Z: $f\colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$ - *obszar regularny* $\quad f \in C(D)$

$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x,y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\Big\}$

T: $\displaystyle |V| = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

Twierdzenie 72 (o wzorze na objętość bryły).

Z: $\Phi, \Psi\colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$ - *obszar regularny* $\quad \Phi, \Psi \in C(D)$

$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x,y) \in D, \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y)\Big\}$

T: $\displaystyle |V| = \iint\limits_D \left(\Psi(x,y) - \Phi(x,y)\right) dx\,dy$

Twierdzenie 73 (o zastosowaniach całki podwójnej).

Z: $\rho\colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$ - *obszar regularny* $\quad \rho \in C(D)$

T: $\displaystyle |D| = \iint\limits_D dx\,dy \qquad M = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

$\displaystyle M_{Ox} = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy \qquad M_{Oy} = \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy$

$\displaystyle (x_0, y_0) = \left(\frac{M_{Oy}}{M}, \frac{M_{Ox}}{M}\right) \qquad M_b = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho(x,y)\,dx\,dy$

Twierdzenie 74 (Fubiniego dla całki potrójnej).

Z: $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \qquad f \in C(P)$

T $\displaystyle\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dz$

Definicja 52 (obszaru normalnego w $\mathbb{R}^3$).

$\Phi, \Psi \colon D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$ - obszar regularny $\quad \Phi, \Psi \in C(D)$

$V = \{(x,y,z) \colon (x,y) \in D, \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y)\}$

Twierdzenie 75 (o całce iterowanej dla obszaru normalnego w $\mathbb{R}^3$).

Z: $f \colon V \to \mathbb{R} \quad V \subset \mathbb{R}^3$ - *obszar normalny* $\quad f \in C(V)$

T: $\displaystyle\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iint\limits_D \int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

Definicja 53 (współrzędnych sferycznych).

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$|J| = r^2\sin\theta$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\varphi \\ y &= r\cos\psi\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$|J| = r^2\cos\psi$$

Twierdzenie 76 (wzór na przejście na współrzędne sferyczne).

$$\iiint\limits_V f(x,y,x)\,dv = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,x)\,dv = \iiint\limits_{V''} f(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi)r^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi$$

Twierdzenie 77 (o zastosowaniach całki potrójnej).

Z: $\rho \colon V \to \mathbb{R} \quad V \subset \mathbb{R}^3$ - *obszar regularny* $\quad \rho \in C(V)$

T: $|V| = \displaystyle\iiint\limits_V dv \quad M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dv$

$$M_{Oxy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dv \quad M_{Oxz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dv \quad M_{Oyz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dv$$

$$(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{M_{Oyz}}{M}, \frac{M_{Oxz}}{M}, \frac{M_{Oxy}}{M}\right) \quad M_b = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dv$$

Definicja 54 (całki niewłaściwej wielokrotnej).

D - obszar nieograniczony lub f - funkcja nieograniczona na D

Tworzymy ciąg zbiorów $D_1, D_2, \ldots, D_n\colon \quad \forall i\ D_i \subset D_{i+1}$ obszar regularny $\quad D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$

$$\int\limits_D \cdots \int f(x_1,x_2,\ldots)\,dd = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} \cdots \int f(x_1,x_2,\ldots)\,dx_1\,dx_2\ldots$$

14 Całki krzywoliniowe

Definicja 55 (łuku gładkiego).

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad x, y \in C^1([\alpha, \beta]) \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$$

Definicja 56 (łuku regularnego).

$$L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i, \quad \forall i \ L_i \text{ - łuk gładki}$$

Twierdzenie 78 (o liczeniu całki krzywoliniowej nieskierowanej).

Z: $f\colon L \to \mathbb{R}$ $\quad$ *L - łuk gładki* $\quad f \in C(L)$

T: $$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Z: $f\colon L \to \mathbb{R}$ $\quad L\colon y = y(x) \quad x \in [\alpha, \beta] \quad y(x) \in C^1([\alpha, \beta]) \quad f \in C(L)$

T: $$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Twierdzenie 79 (o zastosowaniach całki krzywoliniowej nieskierowanej).

Z: $\rho\colon L \to \mathbb{R}$ $\quad$ *L - łuk regularny* $\quad \rho \in C(L)$

T: $$|L| = \int\limits_L dl \quad M = \int\limits_L \rho(x, y)\, dl \quad M_{Ox} = \int\limits_L y\rho(x, y)\, dl \quad M_{Oy} = \int\limits_L x\rho(x, y)\, dl$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{M_{Ox}}{M}, \frac{M_{Oy}}{M} \right) \quad M_b = \int\limits_L \left(x^2 + y^2 \right) \rho(x, y)\, dl$$

Twierdzenie 80 (o liczeniu całki krzywoliniowej skierowanej).

Z: $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ *- pole wektorowe* $\quad$ *L - łuk gładki* $\quad \vec{F} \in C(L)$

T: $$\int\limits_L \vec{F} \circ \vec{dr} = \int\limits_L (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t))\, dt$$

Definicja 57 (obszaru jednospójnego).

Mówimy, że obszar D jest jednospójny $\overset{\text{def}}{\iff}$ wnętrze każdej krzywej zamkniętej (bez punktów wielokrotnych) $L \subset D$ zawiera się w D.

Definicja 58 (krzywej Jordana).

Jeżeli obszar D jest jednospójny i ograniczony, to brzeg tego obszaru jest krzywą Jordana (krzywą zamkniętą, bez punktów wielokrotnych).

Definicja 59 (orientacji brzegu obszaru).

Brzeg obszaru ograniczonego jednospójnego D nazywamy zorientowanym dodatnio $\overset{\text{def}}{\iff}$ poruszając się po tym brzegu zgodnie z wybraną orientacją obszar D mamy po lewej stronie.

Twierdzenie 81 (Greena).

Z: $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ *- pole wektorowe* $\quad D$ *- obszar ograniczony jednospójny*

∂D *- zorientowany dodatnio* $\quad \vec{F} \in C^1(D)$

T: $$\int\limits_{\partial D} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Definicja 60 (pola potencjalnego).

Mówimy, że pole wektorowe $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ jest potencjalne w obszarze $D \overset{\text{def}}{\iff}$

$$\vec{F} \in C^1(D) \quad \exists u\colon D \to \mathbb{R}\colon \forall (x, y) \in D \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

Funkcję u nazywamy potencjalem pola wektorowego $\vec{F}$ w D.

Twierdzenie 82 (WKW potencjalności pola).

Z: $\vec{F}\, (P(x, y), Q(x, y))$ *- pole wektorowe* $\quad D \subset \mathbb{R}^2$ *- obszar jednospójny* $\quad \vec{F} \in C^1(D)$

T: $\vec{F}$ *jest polem potencjalnym* $\iff \forall (x, y) \in D\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)$

Twierdzenie 83 (o całce krzywoliniowej skierowanej w polu potencjalnym).

Całka krzywoliniowa skierowana po dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w obszarze D, w którym pole jest potencjalne jest równa 0.

Twierdzenie 84 (o niezależności całki krzywoliniowej skierowanej od krzywej w polu potencjalnym).

Z: $\vec{F}\, (P(x, y), Q(x, y))$ *- pole wektorowe* $\quad D \subset \mathbb{R}^2$ *- obszar jednospójny*

$\vec{F} \in C^1(D) \quad \vec{F}$ *jest potencjalne w* $D \quad L = \overset{\frown}{AB}$

T: Całka krzywoliniowa skierowana nie zależy od krzywej L, ale od jej końców.

$$\int\limits_{L} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = u(B) - u(A)$$

15 Całki powierzchniowe

Definicja 61 (płata powierzchniowego gładkiego)**.**

$$S = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D, z = f(x,y)\} \quad f\colon D \to \mathbb{R} \quad D \in \mathbb{R}^2 \text{ - obszar regularny} \quad f \in C^1(D)$$

$$\vec{N} = \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right] \text{ - wektor normalny do powierzchni}$$

$$z = f(x,y) \text{ w punkcie } (x_0,y_0)$$

Twierdzenie 85 (o liczeniu całki powierzchniowej nieskierowanej)**.**

Z: $F\colon S \to \mathbb{R} \quad S \subset \mathbb{R}^3$ *- płat powierzchniowy gładki* $\quad f \in C(S)$

T: $$\iint\limits_S F(x,y,z)\,ds = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dx\,dy$$

Twierdzenie 86 (o zastosowaniach całki powierzchniowej nieskierowanej)**.**

Z: $\rho\colon S \to \mathbb{R} \quad S$ *- płat powierzchniowy gładki* $\quad \rho \in C(S)$

T: $$|S| = \iint\limits_S ds \qquad M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,ds$$

$$M_{Oxy} = \iint\limits_S z\rho(x,y,z)\,ds \qquad M_{Oxz} = \iint\limits_S y\rho(x,y,z)\,ds \qquad M_{Oyz} = \iint\limits_S x\rho(x,y,z)\,ds$$

$$(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{M_{Oyz}}{M}, \frac{M_{Oxz}}{M}, \frac{M_{Oxy}}{M}\right) \qquad M_b = \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,ds$$