INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-A.htm

Matematik A HTX 27. maj 2016
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

Opgave 1

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Afstanden mellem A og B udregnes vha. afstandsformlen.

$AB = \sqrt{(61.5-27)^2 + (54-27)^2}$

$$AB = 43.80924560 \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Som er afstanden fra A til B.

Spgm. b

For at bestemme skæringspunkterne D og E, løses et ligningssystem, hvor ligningerne for cirkel A og B indgår.

$evalf[5](solve(\{(x-27)^2 + (y-27)^2 = 27^2, (x-61.5)^2 + (y-54)^2 = 27^2\}))$

$$\{x = 53.979, y = 28.069\}, \{x = 34.521, y = 52.931\} \quad \textbf{(1.2.1)}$$

Hermed er punktet $D(34.521; 52.931)$ og $E(53.979; 28.069)$

Spgm. c

Da cirklen B har dobbelt y-koordinat end cirklen A, så kan man bestemme afstanden fra centrum af A til punktet $M(61.5; 27)$.

$AB = \sqrt{(61.5-27)^2 + (27-27)^2}$

$$AB = 34.50000000 \quad \textbf{(1.3.1)}$$

Adderes x-koordinaten for A's centrum med $2 \cdot 34.5$ fås x-koordinaten for C's centrum.

$27 + 2 \cdot 34.5$

$$96.0 \quad \textbf{(1.3.2)}$$

Dermed er cirklen for C givet ved

$(x-96)^2 + (y-27)^2 = 27^2$

$$(x-96)^2 + (y-27)^2 = 729 \quad \textbf{(1.3.3)}$$

Opgave 2

restart :; *with*(*Gym*) :
local O

Spgm. a

Afstanden mellem AD og AE er ens og denne bestemmes, ligeledes afstanden mellem DE bestemmes.

$$AD = \sqrt{(34.521 - 27)^2 + (52.931 - 27)^2}$$

$$AD = 26.99967041 \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$$DE = \sqrt{(34.521 - 53.979)^2 + (52.931 - 28.069)^2}$$

$$DE = 31.57107550 \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Cosinusrelationerne anvendes.

$$v = invCos\left(\frac{2 \cdot 26.99967041^2 - 31.57107550^2}{2 \cdot 26.99967041^2}\right)$$

$$v = 71.55747990 \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Spgm. b

Arealet af bordet bestemmes. Først bestemmes arealet for alle cirkler.

$$T_{alle\ cirkler} := 3 \cdot \mathrm{Pi} \cdot 27^2$$

$$T_{alle\ cirkler} := 2187\ \pi \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Da der overlappes, fratrækkes disse arealer. Arealet af et cirkelafsnit er givet ved følgende formel:

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{v \cdot \mathrm{Pi}}{180} - Sin\left(\frac{v \cdot \mathrm{Pi}}{180}\right)\right)$$

Indsætter vi tallene vi kender fås

$$T_{cirkelafsnit} := \frac{27^2}{2} \cdot \left(\frac{71.55747990 \cdot \mathrm{Pi}}{180} - Sin\left(\frac{71.55747990 \cdot \mathrm{Pi}}{180}\right)\right)$$

$$T_{cirkelafsnit} := 447.2844016 \quad \textbf{(2.2.2)}$$

Og dermed er arealet af bordet:

$$T = T_{alle\ cirkler} - T_{cirkelafsnit}$$

$$T = 6423.378732 \quad \textbf{(2.2.3)}$$

Spgm. c

Omkredsen af bordet bestemmes. Først bestemmes omkredset af alle cirkler.

$$\mathrm{O}_{alle\ cirkler} := 3 \cdot 2 \cdot 27 \cdot \mathrm{Pi}$$

$$\mathrm{O}_{alle\ cirkler} := 162\ \pi \quad \textbf{(2.3.1)}$$

Længden af cirkelbuen er

$$l = \frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r \cdot v}{360}$$

Og dermed er

$$\mathrm{O}_{cirkelbue} := 4 \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot 27 \cdot 71.55747990}{360}$$

$$\mathrm{O}_{cirkelbue} := 134.8826719 \quad \textbf{(2.3.2)}$$

Og den endelige omkreds er så

$O = O_{alle\ cirkler} - O_{cirkelbue}$

$$O = 374.0553380 \quad \textbf{(2.3.3)}$$

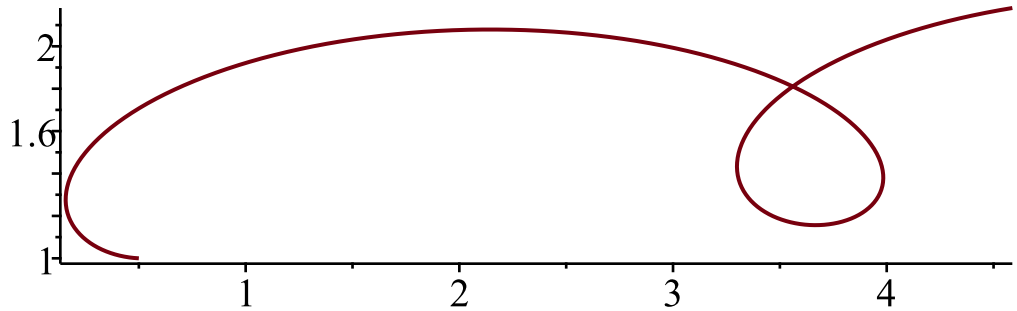
Opgave 3

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Man anvender plotkommandoen:

plot([$t + 0.5 - \sin(2 \cdot t)$, $0.05 \cdot t + 1.5 - 0.5 \cdot \cos(2 \cdot t)$, $t = 0 ..4.5$], *scaling* = *constrained*)



Spgm. b

Her anvendes begrænsningerne.

$t = 0$ og $t = 4.5$, s

$r(t) := [(t + 0.5 - \sin(2\,t), 0.05\,t + 1.5 - 0.5\cos(2\,t))]$

$$r := t \mapsto [t + 0.5 - \sin(2\,t), 0.05\,t + 1.5 - 0.5\cos(2\,t)] \quad \textbf{(3.2.1)}$$

$r(0)$

$$[0.5, 1.0] \quad \textbf{(3.2.2)}$$

$r(4.5)$

$$[4.587881515, 2.180565131] \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Så sommerfuglen starter ved $A(0.5; 1)$ og slutter ved $B(4.58; 2.18)$.

Spgm. c

Vi bestemmer den afledede og indsætter $t = 2.25$.

$r'(t)$

$$[1 - 2\cos(2\,t), 0.05 + 1.0\sin(2\,t)] \quad \textbf{(3.3.1)}$$

Så

$r'(2.25)$

$$[1.421591599, -0.9275301177] \quad \textbf{(3.3.2)}$$

Og normen tages.

$Fart = \sqrt{(1.421591599)^2 + (-0.9275301177)^2}$

$$Fart = 1.697420040 \quad \textbf{(3.3.3)}$$

Spgm. d

Sommerfuglens største højde over overfladen er

$y(t) := 0.05\,t + 1.5 - 0.5\cos(2\,t)$

$$y := t \mapsto 0.05\,t + 1.5 - 0.5\cos(2\,t) \quad \textbf{(3.4.1)}$$

$intervalsolve(y'(t) = 0, t = 0..4.5)$

$$[1.595806755, 3.116582225] \quad \textbf{(3.4.2)}$$

Vi tjekker ekstrema punkterne.

$y(1.595806755)$

$$2.079164947 \quad \textbf{(3.4.3)}$$

$y(3.116582225)$

$$1.156454502 \quad \textbf{(3.4.4)}$$

Samt endepunkterne

$y(0)$

$$1.0 \quad \textbf{(3.4.5)}$$

$y(4.5)$

$$2.180565131 \quad \textbf{(3.4.6)}$$

Vi ser nu, at den største højde er når $t = 4.5$.

Opgave 4

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

$A := [1, 2, -2] :; B := [-1, k, 3] :; C := [3, 5, 4] :$

Kuglens ligning kan bestemmes. Vi bestemmer radius vha. afstandsformlen.

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2 + (4-(-2))^2}$

$$\overrightarrow{AB} = 7 \quad \textbf{(4.1.1)}$$

Afstanden er 7, og dermed har vi radius. Kuglens ligning er

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, så

$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 7^2$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 49 \quad \textbf{(4.1.2)}$$

Spgm. b

Afstanden BC bestemmes, når $k = 3$.

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2}$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{21} \quad \textbf{(4.2.1)}$$

Spgm. c

Afstanden mellem B og C anvendes. Da kuglen har radius 7, er ligningen

$\sqrt{(3-(-1))^2 + (5-k)^2 + (4-3)^2} = 7$

$$\sqrt{17 + (5-k)^2} = 7 \quad \textbf{(4.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 5 + 4\sqrt{2}], [k = 5 - 4\sqrt{2}]] \quad \textbf{(4.3.2)}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[k = 10.657], [k = -0.6568]] \quad \textbf{(4.3.3)}$$

Så de værdier af k, således at B er inde i kuglen er givet ved $-0.6568 \leq k \leq 10$. (ifølge opgavesættet).

Opgave 5

$restart :; with(Gym) :$

Funktionen defineres.

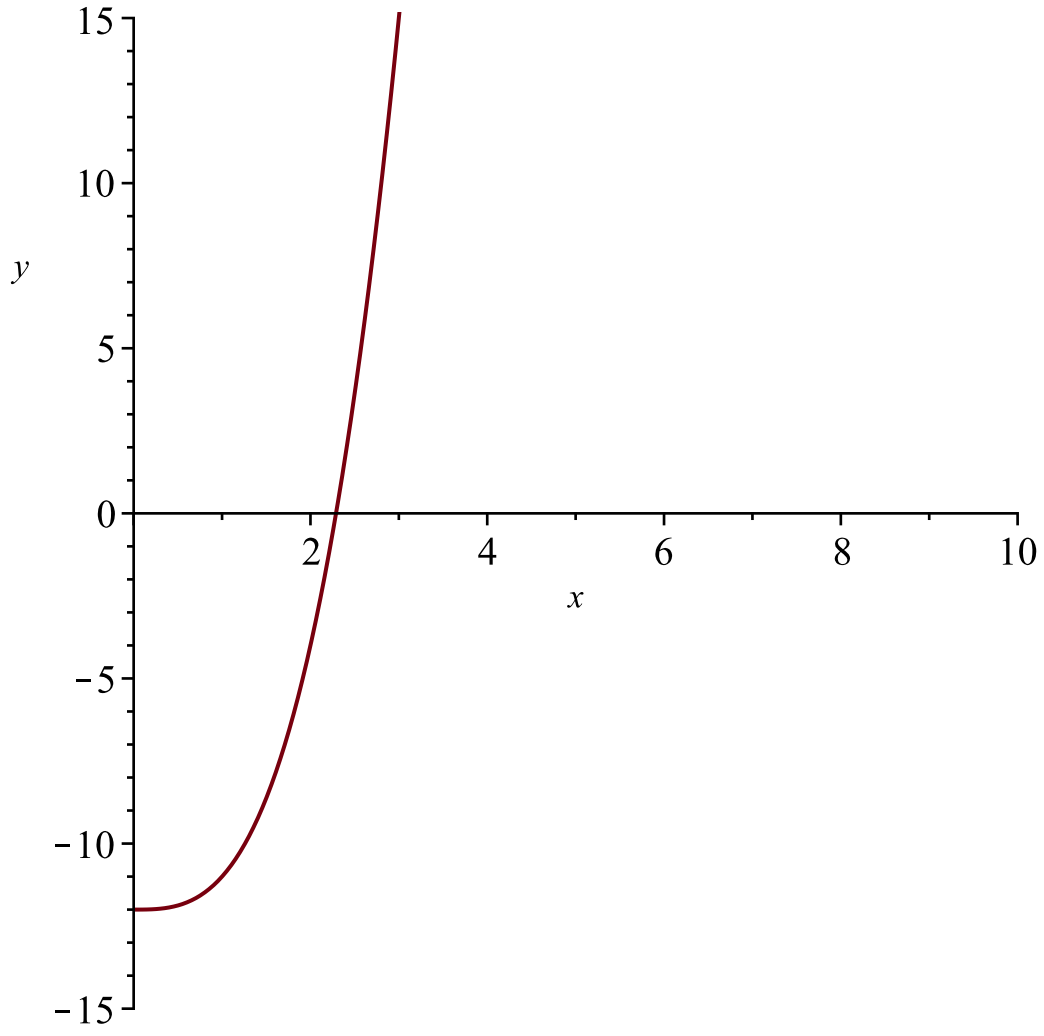
$f(x) := x^3 - 12$

$$f := x \mapsto x^3 - 12 \quad \textbf{(5.1)}$$

Her er $x \geq 0$.

Spgm. a

$plot(f(x), x = 0..10, y = -15..15)$



Spgm. b

Vi løser ligninge

$f'(x) = 0$

$$3x^2 = 0 \quad \textbf{(5.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0],[x=0]] \tag{5.2.2}$$

Tallet 2 anvendes, da $2 > 0$ og opfylder at $x \geq 0$.
$f'(2)$

$$12 \tag{5.2.3}$$

Da fortegnet er positivt, så er $f(x)$ voksende i intervallet $x \in [0;\infty)$
(Man kunne også se grafen).

Spgm. c

$f(x)=0$

$$x^3 - 12 = 0 \tag{5.3.1}$$

Vi anvender Newtons metode og starter med
$x_0 := 3.$

$$x_0 := 3. \tag{5.3.2}$$

$$x_1 := evalf[6]\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$$

$$x_1 := 2.44444 \tag{5.3.3}$$

$$x_2 := evalf[6]\left(x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right)$$

$$x_2 := 2.29905 \tag{5.3.4}$$

$$x_3 := evalf[6]\left(x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right)$$

$$x_3 := 2.28947 \tag{5.3.5}$$

$$x_4 := evalf[6]\left(x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}\right)$$

$$x_4 := 2.28943 \tag{5.3.6}$$

Da vi ser, at x_3 og x_4 (med fem decimaler) ligner meget hinanden med en lille decimalafvigelse, så er $\sqrt[3]{12} \approx 2.28943$.

Spgm. d

1	$x_{n+1} = N(x_n)$	Den generelle rekursionsligning fra Newtons metode opskrives.
2	$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - w}{3\,x_n^2}$	Vi indsætter funktionen og den afledede funktion ind i rekursionsligningen.
3	$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{3}$	Her adskildes brøkerne, og x_n^3 deles med $3\,x_n^2$, så man får $\frac{x_n}{3}$.

	$+\frac{w}{3\,x_n^2}$	
4	$x_{n+1}=\frac{2\,x_n}{3}+\frac{w}{3\,x_n^2}$	Her omskrives x_n til $\frac{3\,x_n}{3}$, så vi får $\frac{3\,x_n}{3}-\frac{x_n}{3}=\frac{3\,x_n-x_n}{3}=\frac{2\,x_n}{3}$.
5	$x_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(2\,x_n+\frac{w}{x_n^2}\right)$	Endelig, da 3 indgår i nævneren i begge led, kan vi faktorisere $\frac{1}{3}$ ud foran en parentes.

Opgave 6

$restart :; with(Gym) :$

Funktionen defineres.

$f(x) := -0.0916\cdot x^4+1.099\cdot x^3-4.943\cdot x^2+9.887\cdot x-5.816$

$$f := x \mapsto -0.0916\,x^4+1.099\,x^3-4.943\,x^2+9.887\,x-5.816 \quad \textbf{(6.1)}$$

Her er intervallet $x \in [1.4; 4.6]$.

Spgm. a

På kagefiguren bestemmer vi bredden b.

$b=2\cdot 4.6$

$$b=9.2 \quad \textbf{(6.1.1)}$$

Kagen er 9.2cm.

Spgm. b

Højden h findes hvor $f(x)$ er maksimal.

$f'(x)=0$

$$-0.3664\,x^3+3.297\,x^2-9.886\,x+9.887=0 \quad \textbf{(6.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$3.302202087 \quad \textbf{(6.2.2)}$$

$f''(3.302202087)$

$$-0.09754829 \quad \textbf{(6.2.3)}$$

Så multiplieres $f(3.302202087)$ med 2, så

$f(3.302202087)\cdot 2$

$$3.22711378 \quad \textbf{(6.2.4)}$$

Endelig er højden $h=3.23$cm.

Spgm. c

Volumen af kagen, roteret om y-aksen er

$$V = 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \int_{1.4}^{4.6} x \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$V = 180.3806461 \qquad \textbf{(6.3.1)}$$