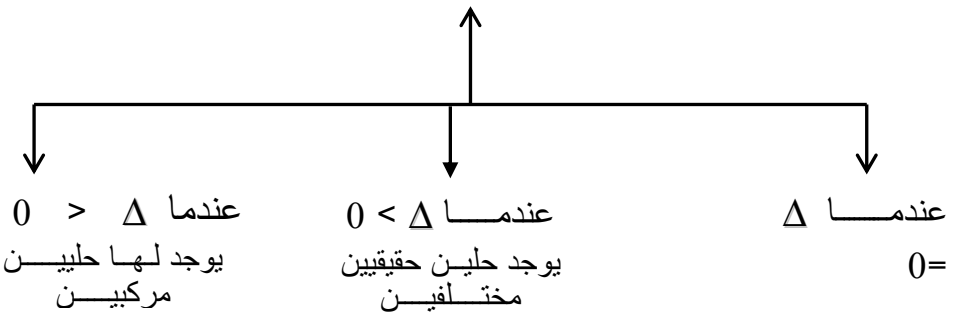
تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
http://ye-thirdsecondr.blogspot.com

حـل المعادلـة مـن الدرجـة الثانية

التـي من الشكل: $أ ع^2 + ب ع + جـ = 0$ حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح



: أي معادلـة من الدرجة الثانية لهـا حـلاً دائمـاً فـي م.

مثـــال: حل المعادلة: $ع^2 - 6ع + 13 = 0$

الحـــل:

$أ = 1$ ، $ب = -6$ ، $جـ = 13$

$\Delta = ب^2 - 4 أ جـ = -36 \times 1 \times 4 = 13 - 36 = 52$

$\Delta = -16$

$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ}$

$ع = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm 4ت}{2} = 3 \pm 2ت$

قيم ع = { (3 + 2ت) ، (3 − 2ت) }

مثـــال: حل المعادلة $ع^3 = 1$

الحـــل:

$\because$ ع^3 − 1 = 0 $\quad\quad$ $\therefore$ (ع − 1) (ع^2 + ع +1) = 0

إما ع−1 = 0 $\Leftarrow$ ع = **1**

أو إما ع^2 + ع + 1 = 0 $\quad\quad$ $\because$ أ = 1 ، ب = 1 ، جـ = 1

$\therefore$ Δ = ب^2 − 4 أ جـ = 1 × 1 ×4−1 = −3

$\therefore$ ع = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$ = $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2\times 1}$

$\therefore$ ع = $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ = $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$

$\therefore$ قيم ع: هي { 1 ، $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ }

اليمن: سنـ1993ـة

مثـال: حل المعادلة: ع^2 − (5 + 7ت) ع + (−6 + 17ت) = 0

الحـــل:

$\because$ أ = 1 ، ب = − (5+ 7ت) ، جـ = 0 (−6+ 17ت)

$\therefore$ Δ = ب^2 − 4 أ جـ

$\therefore$ Δ = (5 + 7ت)^2 − 4 × 1 × (−6 + 17ت)

= 25 − 49 + 70ت +24 −68ت = 2ت

(1) نحسب: $\sqrt{2\text{ت}}$

$\therefore$ $\sqrt{2\text{ت}}$ = $\sqrt{[2\ ،\ 90^\circ]}$ = [$\sqrt{2}$ ، 45°]

= $\sqrt{2}$ (جتا45° + ت جا 45°) = (1 + ت)

$\therefore$ ع = $\frac{(5+7\,\text{ت}) \pm \sqrt{2\text{ت}}}{2}$ = $\frac{(5+7\,\text{ت}) \pm (1\ +\ \text{ت})}{2}$

إما ع = $\frac{(5+7\,\text{ت}) + (1\ +\ \text{ت})}{2}$ = (3 + 4 ت)

أو إما ع = $\frac{(5+7\text{ت}) - (1+\text{ت})}{2} = \frac{4+6\text{ت}}{2}$ = (2 + 3ت)

∴ مجموعة الحل = {(3 + 4 ت) ، (2 + 3ت)}

ملاحظات هامة:

[1] جذري المعادلة أ ع^2 + ب ع + جـ = 0

هما ع = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$

[2] مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

[3] لتكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها هي:

ع^2 - (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضربهما = 0

مثال: أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

(1 + 4 ت) ع^2 + (5 − 3ت) ع + (8 − 2 ت) = 0

الحل:

∵ أ = (1+ 4 ت) ، ب = (5 − 3 ت) ، جـ = (8 −2ت)

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{(5-3\text{ت})}{(1+4\text{ت})} \times \frac{(1-4\text{ت})}{(1-4\text{ت})}$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-[5-20\text{ت}-3\text{ت}-12]}{1+16} = \left(\frac{7}{17} + \frac{23}{17}\text{ت}\right)$

(2) ∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$= \frac{8-2\text{ت}}{1+4\text{ت}} \times \frac{1-4\text{ت}}{1-4\text{ت}}$ $= \frac{8-32\text{ت}-2\text{ت}-8}{1+16}$

$= \frac{-34\text{ت}}{17} = -2\text{ت}$

مثال: كون المعادلة التي جذراها: (2− ت) ، (3 + 2ت)

الحل:

∴ مـج = (2 – ت) + (3 + 2 ت) = (5 + ت)

∴ حاصل ضرب الجذرين = (2 – ت)× (3 + 2ت) = 6 + 4ت – 3ت+2

= (8 + ت)

∴ المعادلة هي: ع^{2} – مج ع + جد = 0

∴ ع^{2}– (5 + ت) ع + (8 + ت) = 0

مثـــال: كون معادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها: $\frac{(1-2ت)(1+2ت)}{(2-ت)}$ يساوي

الحـــل:

∵ أحد الجذور = $\frac{1-4ت^{2}}{2-ت} \times \frac{2+ت}{2+ت}$ = $\frac{(2+ت)\cancel{5}}{\cancel{5}}$ = (2 + ت)

∴ الجذر الآخر = (2 – ت)

∴ مـج الجذرين = 4 ، حاصل الضرب = 5

∴ المعادلة هي: ع^{2} – 4ع + 5 = 0

مثـــال: إذا كان (ل + م ت)^{2} ، (ل – ت م)^{2}

هما جذرا المعادلة ع^{2} + 16ع + 100 = 0 أوجد قيمة ل ، م ∈ ح$^{+}$

الحـــل:

∵ مـج = – 16 ∴ (ل + م ت)^{2} + (ل – ت م)^{2} = 16

∴ 2ل^{2} – 2م^{2} = –16 ⇐ ل^{2} – م^{2} = –8 .....(1)

∵ حاصل ضرب الجذرين ∴ (ل + م ت)^{2} × (ل – م ت)^{2} = 100

∴ [(ل + م ت) (ل – م ت)]^{2} = 100

∴ (ل^{2}+م^{2})^{2}= 100 ⇐ ل^{2}+ م^{2}=10 .....(2)

⇐ ل^{2}– م^{2} = –8 .....(1) بالجمع

2ل^{2} = 2 ل^{2} = 1

∴ ل = (1)

من (1) ∴ -1 م^2 $= -8 \Leftarrow$ م^2 $= 9 \Leftarrow$ م $= 3$

حل تمارين ومسائل (1- 6) صـ (46)

61 حل المعادلات التاليـة حيث ع ∋ م

أ) 3ع^2 $+$ ع $+ 2 = 0$ ب) ع^2 $+ 2$ع $+ 3 = 0$

ج) ع^2 -6ع $+9-2$ت $= 0$ د) ع^2 $- 2\sqrt{2}$ع $+4 = 0$

هـ) 2ع^2 $-(4-$ت$)$ع $+(5-$ت$) = 0$ و) ع^2 $+2$ت $\bar{ع}$ $-1 = 0$

الحـــل:

[أ] أ $= 3$ ، ب $= 1-$ ، جـ $= 2$

∵ Δ $=$ ب^2 $-$ 4أ جـ $= 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$

∴ ع $= \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}} = \frac{1 \pm \sqrt{23}\text{ت}}{3 \times 2} = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{23}}{6}$ ت

[ب] الحل بنفس طريقة (أ)

[ج] أ $= 1$ ، ب $= -6$ ، جـ $= 9 -2$ت

Δ $=$ ب^2 -4 أ جـ $= 36 - 4 \times 1$ $(9 - 2$ت$) = 36 - 36 + 8$ت

∴ $\Delta = 8$ ت $=$ $[8 ، 90]^5$

∴ $\sqrt{8\text{ت}} = \sqrt{[8 ، 90]^5} = [2\ 2 ،\ \sqrt{45}]^5$

$= 2\sqrt{2}$ $(\text{جتا}\ 45^5 + \text{ت جا}\ 45^5)$

$= (2 + 2$ ت$)$

∴ ع $= \frac{6 \pm (2 + 2\text{ت})}{1 \times 2}$ $= (4 \pm$ ت $)$

[د] الحل بنفس طريقة (أ)

[هـ] أ = 2 ، ب = −4 + ت ، جـ = 5 − ت

∴ Δ = ب^2 − 4أ جـ = (−4 + ت)^2 − 4 × 2(5 − ت)

= 16 − 8ت − 1 − 40 + 8ت = 41−16 = −25

∴ ع = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}} = \frac{(-4-\text{ت}) \pm 5\text{ت}}{2\times 2}$

∴ ع$_1$ = $\frac{-4-\text{ت}+5\text{ت}}{4} = \frac{4+4\text{ت}}{4}$ = 1 + ت

∴ ع$_2$ = $\frac{-4-\text{ت}-5\text{ت}}{4} = \frac{4}{4} - \frac{6\text{ت}}{4}$ = −1 − $\frac{3}{2}$ ت

[و] محلول كمثال.

---

62 كون المعادلة التي جذورها على النحو التالي:

أ) (3+5ت) ، (3−5ت) ب) 2ت ، (4− ت) ج) (1− ت) ، (3− ت)

الحـــل:

[أ] مـج = 5 + 3ت + 5− 3ت = 10

حاصل ضرب الجذرين = (5+ 3ت) (3−5ت) = 25 + 9 =34

∵ المعادلة هي: ع^2 − (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضرب الجذرين = 0

∴ المعادلة هي: ع^2 − 10ع + 34 = 0

[ب] بنفس الطريقة السابقة.

[ج] مـج = 4−2ت ،

حاصل ضرب الجذرين = (1− ت) (3− ت) = 4−3ت + ت^2+ ت^2 = 2−4ت

∴ المعادلة هي: ع^2 − (4 − 2ت) ع + (2 − 4 ت) = 0

---

63 أوجـد مجموعـة حـل كـل مـن المعـادلات الآتيـة حيـث ع ∋ م

أ) $ع^{-2}$ 3ع+ (3+1ت) = 0 ب) (1− ت)$ع^{-2}$ (3− ت)ع+(2−4ت)=0

جـ($ع^{-2}$ $\bar{ع}$ = 0 د) $ع^{-2}$ (2− ت) ع + (3 − ت) = 0

هـ(3− ت $ع^{-2}$ 10ع= −3(3+1ت) و) ت $ع^{+2}$ (2−1ت) ع + 3ت −1 = 0

الحـــل:

[أ] أ = 1 ، ب = −3 ، جـ = 1 +3ت

$\Delta = ب^{-2}$−4 أجـ = 9 − 4(1 + 3 ت) = 9−4−12 ت = 5−12ت

نوجد أولاً $\sqrt{\Delta}$ = $\sqrt{5-12ت}$ = س + ت ص بالتربيع.

$س^2 - ص^2 + 2$ س ص ت = 5 − 12ت

$س^{-2} ص^2$ = 5 .....(1)

2 س ص = 12 ..... (2) من (1) ، (2) بالتربيع والجمع

∴ $(س^2 + ص^2)^2$ = 25 + 144 = 169 ∴ $س^2 + ص^2$ = 13 ..... (3)

بجمع (1) ، (3) 2$س^2$ = 18 بطرح (1) من (3) ∴ 2$ص^2$ = 8

س = ± 3 ، ص = ±2

ومن (2) ∴ س ، ص من إشارة مختلفة ∴ $\sqrt{5-12ت}$ = ±(3 − 2ت)

ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ}$ = $\frac{3 \pm (3-2ت)}{1\times2}$

ع$_1$ = $\frac{3+3-2ت}{2}$ = 3 − ت ، ع$_2$ = $\frac{3-3+2ت}{2}$ = ت

∴ مجموعة الحل = { 3 − ت ، ت }

[هـ] بالقسمة على (3− ت) وجعلها معادلة صفرية.

$ع^{-2}$ $\frac{10}{3-ت}$ ع + $\frac{3(1+3ت)}{3-ت}$ = 0

أ = 1

ب = $\frac{-10(3+ت)}{(3-ت)(3+ت)} = \frac{10(3+ت)}{9+1} =$ [(3 + ت) −]

جـ = $\frac{(3+ت)(73+3ت3)}{(3-ت)(3+ت)} = \frac{3(3+3ت3+ت9+^2ت)}{9+1} = \frac{3\times10ت}{10} =$ 3 ت

Δ = ب^2 − 4 أجـ = (3+ ت)^2 − 4 × 1 (3ت)

= 9 + 6ت + ت^2 − 12ت = 8 − 6ت

نحسب $\sqrt{8-6ت}$ = س + ت ص بالتربيع

س^2 − ص^2 = 8 ..... (1)

2س ص = −6 ..... (2)

بتربيع (1) ، (2) ثم بجمع الناتج

∴ س^2+ ص^2 =10 ..... (3) ثم بحل (3) مع (1)

∴ 2س^2 = 18 ⇐ س = ± 3 ∴ص = ± 1

∴ الجذرين هما: ± (3 − ت)

∵ ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{2أ} = \frac{+(3+ت) \pm (3-ت)}{2}$

إما ع = $\frac{3+ت-3+ت}{2} = \frac{6}{2}$ =3

أو إما ع = $\frac{3+ت-3+ت}{2} = \frac{2ت}{2}$ = ت

مجموعة الحل = { 3 ، ت }

[و] تحل بنفس الطريقة السابقة.

---

64 أوجـد قيمـة س ، ص التـي تقعـد المعادلـة:

(س + ت ص)^2 −10 (س + ص ت) + 41=0

الحـــل:

نضع ع = س+ ت ص ∴ع^2− 10ع + 41 =0

Δ = $ب^2 - 4$ أ جـ = $100 - 4 \times 1 \times 41$

= $100 - 164$ = -64

ع = $\frac{+10 \pm 8 ت}{2}$ = $(5 \pm 4 ت)$

∴ س = 5 و ص = 4

أو س = 5 و ص = -4

65 أوجد مجموعة حل المعادلة: $ع^3 + ع^2 + ع + 1 = 0$، ع ∈ م

الحـــل:

∵ $(ع^3 + ع^2) + (ع + 1) = 0$ ⇐ $ع^2 (ع+1) + (ع+1) = 0$

⇐ $(ع+1)(ع^2 + 1) = 0$

⇐ $(ع+1)(ع^2 - ت^2) = 0$

∴ $(ع + 1)(ع - ت)(ع + ت) = 0$

أما ع + 1 = 0 أو ع − ت = 0 أو ع + ت = 0

∴ ع = -1 ∴ ع = ت ∴ ع = $-$ ت

مجموع الحلول = {-1 ، ت ، $-$ ت }

أمثلة عامة على الأعداد المركبة

1) اليمن سنة 1995ـ

مثـــال: إذا كان $ع_1$ = [ر ، هـ] ، $ع_2$ = [ر $\overset{\frown}{ت}$ ، هـ $\overset{\frown}{ت}$]

فبرهن أن $ع_1 \cdot ع_2$ = [ر ر $\overset{\frown}{ت}$ ، هـ + هـ $\overset{\frown}{ت}$]

الحـــل:

∵ $ع_1$ = ر (جتاهـ + ت جاهـ) $ع_2$ = ر $\overset{\frown}{ت}$ (جتاهـ $\overset{\frown}{ت}$ + ت جاهـ $\overset{\frown}{ت}$)

∴ $ع_1 \cdot ع_2$ = ر ر $\overset{\frown}{ت}$ (جتاهـ+ ت جاهـ) (جتاهـ $\overset{\frown}{ت}$ + ت جاهـ $\overset{\frown}{ت}$)

= ر ر$_{\theta}$ (جتاه جتاه θ + ت جتاه جاه θ + ت جاه جتاه − جاه جاه θ)

= ر ر$_{\theta}$ $_{\theta}$ (جتاه جتاه θ − جاه جاه θ) + ت (جاه جتاه θ + ت جاه θجتاه θ)

= ر ر$_{\theta}$ [جتـــا (هـ + هـ θ) + ت جـــا (هـ + هـ θ)] = [ر ر$_{\theta}$ ، هـ + هـ θ]

2) اليمن سنـ1995ـة

مثـــال: إذا كان ع$_1$ = ت ص ، ع$_2$ = (0 ، ص)

أكتب ع$_1$. ع$_2$ بالصورة [ر ، هـ]

الحـــل:

∵ ع$_1$. ع$_2$ = (ت ص × ت ص) = − ص^2 = [ص^2 ، π]

مثـــال: إذا كان ع$_1$ = $\frac{-7}{3}$ ت ، ع$_2$ = [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{7\pi}{6}$]

فأوجد: (1) ع$_1$. ع$_2$ على صورة [ر ، هـ]

(2) 3ع$_1$ ، 2ع$_2$ بالصورة الديكارتية.

الحـــل:

(1) نحول ع$_1$ = $\frac{-7}{3}$ ت = [$\frac{7}{3}$ ، $\frac{3\pi}{2}$]

∴ (1) ع$_1$. ع$_2$ = [$\frac{21}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ + $\frac{3\pi}{2}$] = [$\frac{7}{2}$ ، $\frac{16\pi}{6}$]

(2) 3ع$_1$ = 3 × $\frac{-7}{3}$ ت = − 7 ت

∴ 2ع$_2$ = 2 × $\frac{3}{2}$ [جتا $\frac{7\pi}{6}$ + ت جا $\frac{7\pi}{6}$] = 3 (جتا 210° + ت جا210°)

= 3 (− $\frac{\sqrt{3}}{2}$ − $\frac{1}{2}$ ت)

مثـــال: إذا كانت ع = [ر ، هـ] فما قيمة هـ ، ر في كل الحالتين:

(1) -2ع = [2 ، 240°]

(2) [2، 30°] ع^2 = [8 ، 90°]

الحـــل:

(1) ∵ -2ع = [2 ، 240°]

∴ ع = $\frac{1}{-2}$ [2 ، 240°] = $\frac{[2 ، 240°]}{[2 ، 180°]}$ = [1 ، 60°]

(2) [2 ، 30°] ع^2 = [8 ، 90°]

∴ ع^2 = $\frac{[8 ، 90°]}{[2 ، 30°]}$ = [4 ، 60°]

ع = [4 ، 60°] = $\frac{1}{2}$ [2 ، 30°]

∴ هـ = 30° ، ر = 2

مثـــال: ليكن ع$_1$ = -1 ت ، ع$_2$ = س + ت ص

وكان ع$_2^2$ $-$ ع$_1^2$ = ع̄$_2^2$ $-$ ع̄$_1^2$ اثبت أن : س ص + 1 = 0

الحـــل:

∵ ع$_2^2$ $-$ ع$_1^2$ = ع̄$_2^2$ $-$ ع̄$_2^{-2}$

∴ (س + ت ص)^2 $-$ (-1 ت)^2 = (س $-$ ت ص)^2 $-$ (1+ ت)^2

∴ س^2 $-$ ص^2 + 2س ص ت $-$ (-2ت) = س^2 $-$ ص^2 $-$ 2س ص ت $-$ (+2ت)

∴ 2س ص ت + 2ت = -2 س ص ت $-$ 2 ت

∴ 4 س ص ت = $-$ 4 ت ∴ س ص = -1 ∴ س ص + 1 = 0

مثـــال: اختر الإجابة الصحيحة.

(1) مجموع حل المعادلة $س^2 + 9 = 0$ [{ 3 }، {3 ، −3} ، { 3ت ، −3ت }]

(2) المعكوس الضربي للعدد ع =(3 + 2ت) هو:

[(3 −2ت) ، $\frac{1}{3-2ت}$ ، $\frac{3}{13}$ − $\frac{2}{13}$ ت]

(3) إذا كان ع، $\bar{ع}$ عددان مترافقان فإن ع . $\bar{ع}$ يمكن أن يساوي:

{ (9 − 4ت) ، 5 ت ، 13 ، (1 + ت) }

الحـــل:

(1) { 3ت ، −3ت }

(2) { $\frac{2}{13}$ − $\frac{3}{13}$ ت}

(3) { 13 }

مثـــال: عددان مركبان مترافقان مجموعهما يساوي (8) وحاصل ضربهما يساوي (15) أوجد العددين؟

الحـــل:

نفرض أن العددان

(س + ت ص) ، (س − ت ص) ⇐ مجموعهما = 2س = 8

⇐ س = (4)

∴ حاصل ضربهما = $س^2 + ص^2$ ∴ $س^2 + ص^2$ = 25

∴ $16 + ص^2$ = 25

∴ $ص^2$ = 9 ∴ ص = ± 3

∴ ع = (4 ± 3 ت)

اليمن: سنـ1995ـة

مثـــال: حل المعادلة: $ع + 2\,\bar{ع} = ت$

الحـــل:

نفرض $ع = (س + ت ص)$ ، $\bar{ع} = (س + ت ص)$

$\therefore (س + ت ص) + 2\,(س - ت ص) = ت$

$\therefore س + ت ص + 2س - 2\,ت ص = ت$

$\therefore 3س - ت ص = ت$ $\quad\therefore 3س = 0 \Leftarrow 0 = س$

$\therefore -ص = 1 \Leftarrow ص = -1$ $\quad\therefore ع = س + ت ص = 0 - ت$

ع = − ت تخيلي بحث

مثـــال: إذا كان $ع = [1 ، هـ]$ فبرهن أن $\frac{1}{ع+1} = \frac{1}{2}(1 - ت\ ظا \frac{هـ}{2})$

الحـــل:

$\because ع = [1 ، هـ] = 1\ (جتاهـ + ت\ جاهـ)$ $\quad\therefore ط_1 = \frac{1}{1+(1\ جتاهـ + ت\ جا هـ)}$

$= \frac{1}{(1+\ جتاهـ) \times ت\ جا هـ} \times \frac{(جتاهـ + 1) - ت\ جا هـ}{(جتاهـ + 1) - ت\ جا هـ} = \frac{(جتاهـ + 1) - ت\ جا هـ}{(جتاهـ + 1)^2 + جا^2 هـ}$

$\therefore ط_1 = \frac{(جتاهـ + 1) - ت\ جا هـ}{جتا^2 هـ + 1 + 2\ جتاهـ + جا^2 هـ} = \frac{(جتاهـ + 1) - ت\ جا هـ}{2(1+\ جتاهـ)}$

$= \frac{1}{2}[\ 1 - ت \frac{جا هـ}{1+\ جتاهـ}\ ]$

نعلم أن $جتاهـ + 1 = 2\ جتا^2 \frac{هـ}{2}$ $\quad جاهـ = 2 جا \frac{هـ}{2}\ جتا \frac{هـ}{2}$

$\therefore ط_1 = \frac{1}{2}[1 - ت \times \frac{2\ جا \frac{هـ}{2}\ جتا \frac{هـ}{2}}{2\ جتا^2 \frac{هـ}{2}}]$ $\quad\therefore ط_1 = \frac{1}{2} = [1 - ت\ ظا \frac{هـ}{2}]$

$\therefore ط_1 = ط_2$

مثـــال: إذا كانت $ع \ni ق^*$ وكان $ع + \frac{1}{ع} = \bar{ع}$ فبرهن أن ع حقيقي.

الحـــل:

$$(س + ت ص) + (س - ت ص) = \frac{1}{س + ت ص}$$

$$\therefore \frac{1}{ع} = س - 2 \qquad \therefore ع = \frac{1}{2 س} \in ح \qquad \therefore ع \text{ حقيقي } \#$$