Matematik A niveau

Matematik Universet
Skriftlig eksamen i matematik A stx
Gammel ordning

15. august 2019

NB: Løsningerne er ikke garanteret fejlfrie.
Bemærk også, at dette ikke er en fuld elevbesvarelse, men blot løsningsforslag.

Delprøve 1

Opgave 1.

a) Af figuren ses det, at f er aftagende i intervallet $]-\infty;-1]$ og aftagende i intervallet $[2;\infty[$. Det ses, at f er voksende i intervallet $[-1;2]$.

Opgave 2.

a) Ved indsættelse af punktet i f fås ligningen

$$13 = a(-2)^2 + 2(-2) - 3 \iff 13 = 4a - 7 \iff 20 = 4a \iff a = 5$$

Dvs. $a = 5$ er konstanten.

Opgave 3.

a) Den afledede funktion bestemmes ved kædereglen. Den indre funktion er $x^2 - 3$. Man får

$$f'(x) = 4(x^2-3)^3 \cdot 2x = 8x(x^2-3)^3$$

Opgave 4.

a) Grafen for linjen l er C, da hældningskoefficienten er negativ, dvs. -1. Ved omskrivning af linjen m fås $y = \frac{2}{3}x + 2$ hvilket er en voksende funktion. Af grafen ses det at være A. Endelig er grafen for n netop B. Kan nemt eftervises, eller aflæses nemt ved retningsvektoren $\binom{3}{-1}$

Opgave 5.

a) Stamfunktionen F til f bestemmes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x - 2e^x)dx \\ &= \int xdx - 2\int e^x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2e^x + k \end{aligned}$$

Dernæst anvendes P og man får ligningen

$$3 = \frac{1}{2}0^2 - 2e^0 + k \iff 3 = 0 - 2 \cdot 1 + k \iff k = 5$$

Den ønskede stamfunktion igennem P er $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2e^x + 5$

Opgave 6.

a) Begge akser tangerer cirklen $\implies$ centrumkoordinaterne x og y er ens med radius, hvorfor der gælder $C(r, r)$. Vha. cirkelligningen fås

$$\begin{aligned} &r^2 = (4-r)^2 + (2-r)^2 \iff r^2 - 12r + 20 = 0 \iff \\ &(r-2)(r-10) = 0 \iff r = 2 \vee r = 10 \end{aligned}$$

Der gælder, at $r > 2$, så $r = 10$ og centrum er $C(10, 10)$. Det giver cirkelligningen $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$

Delprøve 2

Opgave 7.

a) Vha. cosinusrelationerne kan $|AC|$ bestemmes.

$$|AC| = \sqrt{10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos(120)} = 17.32050808$$

Dvs. længden $|AC|$ er ca. 17.32cm.

b) Arealet af flisen kan beregnes ved arealet af to trekanter ganget med arealet af et rektangel. (Hvilket formentlig er tanken med opgaven).

$$T_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin(120) = 43.30127020$$

Arealet af et rektangel er

$$A_{rektangel} = 10 \cdot 17.32050808 = 173.2050808$$

Det samlede areal er

$$A_{flise} = 2 \cdot 43.30127020 + 173.2050808 = 259.8076212$$

Dvs. arealet af flisen er $259.8cm^2$.

Alternativt kunne arealet af flisen beregnes hurtigere ved anvendelse af formlen

$$A = \frac{3}{2}\tan(60)\cdot l^2$$

Hvor l er længden af en side. Prøv det, sæt $l = 10$.

Opgave 8.

a) Kvartilsættet bestemmes vha. CAS. I Maple 2019 indtastes data.

```
restart :; with(Gym) :
OBS := ⟨10 ..20, 20 ..30, 30 ..40, 40 ..50, 50 ..60, 60 ..70|7, 27, 89, 73, 24, 10⟩ :
kvartiler(OBS)
                    [32.640, 39.101, 46.781]
```

Kvartilbredden ξ bestemmes som forskellen mellem øvre og nedre kvartil, så

$$\xi = 46.781 - 32.640 = 14.141$$

b) Halvanden kvartilbredde svarer til $\eta := 1.5\cdot\xi = 21.2115$. De aldre der er tale om er

$$\text{Nedre} - \eta = 32.640 - 21.2115 = 11.4285$$

$$\text{Øvre} + \eta = 46.781 + 21.2115 = 67.9925$$

Dvs. outliers vil være alderene fra 11.5år eller mindre, samt 68år eller mere.

Opgave 9.

a) Der bestemmes en retningsvektor $\vec{r}$.

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punktet A anvendes som fast punkt, så parameterfremstillingen er

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Parameterfremstillingen l omskrives til en ligning. Lad $x = 8t$ og $y = 2+4t$ være givet. Isoleres t i $x = 8t$ fås $t = \frac{x}{8}$ som indsættes i $y = 2+4t$. Det giver $y = 2 + 4\frac{x}{8} = 2 + \frac{x}{2}$. I Maple 2019 løses ligningssystemet.

$$solve\left(\left\{y = 2 + \frac{x}{2}, 7x + 2y - 20 = 0\right\}\right)$$

$$\{x = 2, y = 3\}$$

Opgave 10.

a) Arealet af M findes ved integralet $\int_0^3 f(x)dx$. I Maple 2019 beregnes integralet og dermed arealet af M.

$$M = \int_0^3 \left(-0.3 \cdot x^2 + 1.7 \cdot x + 3.5\right) dx$$

$$M = 15.45000000$$

b) Igen anvendes næsten samme fremgangsmåde. Nu det bare med volumen.

$$V = \text{Pi} \cdot \int_0^3 \left(-0.3 \cdot x^2 + 1.7 \cdot x + 3.5\right)^2 dx$$

$$V = 254.8742704$$

Dvs. volumen af skålen er $254.8cm^3$

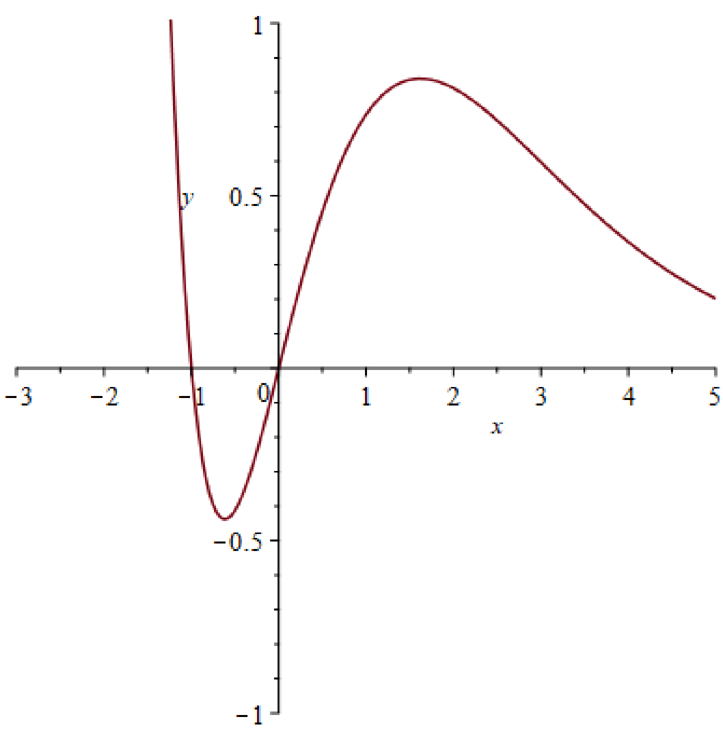
Opgave 11.

a) Vha. plot i Maple kan grafen for f tegnes.

```
restart :; with(Gym) :
f(x) := (x^2 + x) · exp(−x)
```

$$f := x \mapsto \left(x^2 + x\right) e^{-x}$$

```
plot(f(x), x = −3 ..5, y = −1 ..1)
```



Nulpunkterne kan aflæses eller bestemmes vha. solve.

$$solve(f(x) = 0, x)$$
$$-1, 0$$

Nulpunkterne er $P(-1, 0)$ og $O(0, 0)$.

b) Det ses, at $f(-1) = 0$ jf. a). Den afledede funktion er

$$f'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x)e^{-x}$$

Ved anvendelse af punktet P fås tangentligningen. Først bestemmes $f'(-1)$.

$$f'(-1) = (2(-1) + 1)e^{-(-1)} - ((-1)^2 + (-1))e^{-(-1)} = -e$$

Dvs. tangenten er

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(1) = -e(x - (-1)) + 0 = -ex - e$$

c) Ligningen $f'(x) = 0$ løses. Vha. Maple 2019 løses ligningen.

$$solve\left((2x + 1)\,e^{-x} - \left(x^2 + x\right)e^{-x} = 0, x\right)$$
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Anvendes den anden afledede funktion kan man hurtigt afgøre, om funktionen er maksimal eller minimal i netop det sted, hvor man har $f'(x) = 0$. Dette tjekkes i Maple 2019.

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.6180$$
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.61800$$

$$is(f''(1.6180) < 0)$$
$$true$$

Her er der tale om et lokalt maksimum pga. *true*.

$$is(f''(-0.61800) < 0)$$
$$false$$

Her er der tale om et lokalt minimum pga. *false*.

Dvs. funktionen $f(x)$ er aftagende i: $\left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right[$ og voksende i $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Opgave 12.

a) Vha. Maple 2019 foretages der lineær regression.

$$\begin{aligned}&restart:; with(Gym):\\&X := [0, 5, 10, 14, 16, 20, 22, 24, 26]:\\&Y := [4740, 5173, 5746, 6017, 6374, 6568, 6796, 6893, 7012]:\\&f(x) := LinReg(X, Y, x):\\&evalf[5](f(x))\end{aligned}$$

$$89.370\,x + 4786.1$$

Dvs. tallene er $a = 89.37$ og $b = 4786.1$.

b) En ønsket forskrift for h er

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{570000x + 7100000}{89.370x + 4786.1}$$

c) Vha. Maple 2019 kan man løse ligningen vha. solve.

$$\begin{aligned}&g(x) := 570000\cdot x + 7100000:\\&h(x) := \frac{g(x)}{f(x)}:\\&solve(h(x) = 3500, x)\end{aligned}$$

$$37.52469976$$

Dvs. det tidspunkt, hvor det gennemsnitlige antal ord pr. artikel i gældende danske love og bekendtgørelser ifølge modellen overstiger 3500 ord pr. artikel er i løbet af år 2028.

Opgave 13.

a) Eftersom der gælder, at $|AD| = |BD| = |CD|$, så kan afstandsformlen anvendes ved f.eks. at beregne længden af $|AD| = |CD|$, hvorfor det giver ligningen i Maple 2019. Ligningen løses i Maple, sådan så den ønskede x_0-værdi opnås for D.

$$solve\left(\left\{\sqrt{(4-x_0)^2 + (0-x_0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{\left(2+2\cdot\sqrt{3}-x_0\right)^2 + \left(2+2\cdot\sqrt{3}-x_0\right)^2 + (0-4)^2}\right\}, x_0\right)$$

$$\left\{x_0 = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Dermed er $D(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2; \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2; 4)$

b) Der opstilles to vektorer $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -4 \end{pmatrix}$$

Disse defineres i Maple 2019 og vha. arealT kommandoen i Maple kan man bestemme arealet af ABD. Alternativt kan man lave krydsprodukt og anvende arealformlen.

$$\overrightarrow{AD} := \left\langle 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, -4 \right\rangle :; \overrightarrow{BD} := \left\langle -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, -4 \right\rangle :$$

$$with(Gym):$$

$$evalf[5]\left(arealT\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}\right)\right)$$

$$12.220$$

Dvs. lærred udgør ca. $12.22m^2$.

c) Vinklen v bestemmes vha. Maple ved følgende kommando

$$v = vinkel\left(\overrightarrow{AD}, \langle 0, 0, 1 \rangle\right) - 90$$

$$v = 50.7684795$$

Overvej hvorfor vi trækker 90 fra.

Opgave 14.

a) Ved $x = 40$ er væksthastigheden 250 bakterier pr. time. Dette indsættes i differentialligningen og der løses for y. Dette gøres i Maple 2019.

$$250 = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y)$$

$$250 = 0.00002\, y\, (10000 - y)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for y}}$$

$$[[y = 8535.533906], [y = 1464.466094]]$$

b) I Maple 2019 anvendes dsolve med den mindste y-værdi, dvs. betingelsen $y(40) = 1416.466094$

$$dsolve(\{y'(x) = 0.00002 \cdot y(x) \cdot (10000 - y(x)), y(40) = 1464.466094\}, y(x))$$

$$y(x) = \frac{7322330470000\, e^{-8}}{732233047\, e^{-8} + 4267766953\, e^{-\frac{x}{5}}}$$