Mathematics of Poker

Bill Chen, Jerrod Ankenman

Математика покера

Блок №3

(главы 22 – 30)

Перевод: OlegK

Оглавление

Глава 22

Остаемся на плаву: Риск банкротства

До этого момента мы изучали исключительно математическое ожидание и оптимальную игру в различных ситуациях. В самом начале книги мы специально отметили, что все гипотетические игроки, участвующие в наших раздачах имеют достаточные банкроллы и их единственной целью является максимизация собственного математического ожидания. Но давайте теперь зададимся вопросом: «А что значит иметь достаточный банкролл?»

Естественно, на него нет однозначного ответа, поскольку разные люди имеют разную степень толерантности к риску. Для кого-то потеря всего покерного банкролла является абсолютно неприемлемым исходом, кто-то же будет расценивать покер как особый вид стартапа, где высокие риски вполне окупаются потенциальной прибылью. С другой стороны, мы можем проанализировать теорию ведения банкролла с точки зрения численного анализа. Модель, которая наиболее часто используется для этих целей, называется ***риск банкротства*** (Risk of Ruin, RoR).

Значительная часть нижеизложенных расчетов и выводов была впервые опубликована Биллом Ченом и Томом Видманом на сайте rec.gambling.poker.

В рассматриваемой модели делаются следующие допущения:

- Мы постоянно играем в определенную игру с определенным набором исходов X,
- Все результаты сессий независимы и случайным образом выбираются из X,
- Мы обладаем стартовым банкроллом b,
- Банкролл b изменяется в зависимости от результата каждой сессии.

Мы будем продолжать играть что бы ни случилось, вплоть до того момента когда наш банкролл станет равным нулю.

Для описанного выше набора допущений на бесконечной дистанции существуют всего два возможных исхода: либо наш банкролл будет бесконечно увеличиваться, либо в какой-то момент мы потеряем все деньги. Естественно, в рамках этой главы нам будет интересна конкретная вероятность того, что мы проиграем все деньги. Ответом будет являться функция, которую мы назовем ***функцией банкротства***, $R_X(b)$, однако мы часто будем сокращать это наименование до $R(b)$.

У этой функции есть несколько свойств, которые позволят нам описать ее поведение и в конечном счете найти требуемое значение для рассматриваемой игры.

Свойство 1.
Если мы не можем проиграть, то R(b)=0 для всех значений b.

Здесь все просто – если для игры не существует отрицательных исходов, то мы в принципе не можем потерять свои деньги.

Свойство 2.
Если у игры имеется постоянное отрицательное ожидание, то R(b) = 1 для любых значений b.

Это свойство следует из нашего намерения играть вплоть до момента, когда у нас не останется денег. Несложно догадаться, что этот момент все равно наступит, если количество наших сессий с отрицательным ожидаемым выигрышем устремится к бесконечности. С другой стороны, если игра имеет для нас положительное ожидание, то наш банкролл будет постоянно увеличиваться, если только мы не проиграем его раньше в каком-либо витке дисперсии.

Свойство 3.
Если игра имеет хотя бы один исход из множества X, при котором мы теряем деньги, то R(b) > 0 для всех значений b.

Это свойство несложно доказать: пусть вероятность некоего отрицательного исхода игры X_L равна p, и мы при этом потеряем v денег. Если мы обладаем банкроллом B, то мы потеряем все деньги, когда исход X_L наступит B/v раз подряд. Вероятность такого события равна $p^{B/v}$, и хотя она может быть сколь угодно мала, функция банкротства всегда будет отлична от нуля, то есть *R(b)* > 0.

Свойство 4.
Если игра обладает положительным математическим ожиданием и ограниченным набором отрицательных исходов, то R(b) < 1 для всех значений b.

Пусть множество *X* обладает положительным ожиданием. Предположим, что x_n – последовательность независимых исходов (результатов сессий). Суммарный результат от игры тогда будет равен:

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Значит с вероятностью равной 1 верно следующее:

$$< X >= \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{n} > 0$$

Но теперь предположим, что для этого же множества *R(b) = 1*. Тогда мы можем утверждать, что суммарный результат для некоторого множества C_n будет отрицательным. Более того, для любого C_n найдется такое $m > n$, что $C_m < C_n$. Значит, получим следующую последовательность:

$$0 > C_{n1} > C_{n2} > C_{n3} > \ldots$$

А это противоречит изначальному условию, что множество X обладает положительным ожиданием.

Свойство 5.
Функция банкротства для суммы двух банкроллов равна произведению двух функций банкротства для каждого из них.

$$R(a + b) = R(a)R(b) \qquad \textbf{(22.1)}$$

Это свойство служит основной для вывода функции банкротства. Скажем, наш банкролл составляет 500$, ему соответствует определенный риск банкротства. Тогда какова вероятность, что мы проиграем не 500$, а 1000$? Мы можем считать, что после проигрыша одного банкролла, сразу получаем второй, такой же, и играем уже на него. Но поскольку проигрыш денег в этих двух случаях является независимым событием, вероятность того, что мы отдадим за столами всю 1000$ (то есть два раза по 500$) равна вероятности потерять 500$ в квадрате.

Давайте отметим одну тонкость, связанную с этим свойством. Пусть в некой игре минимальная ставка равна 100$, а наш банкролл составляет всего 50$. В этом случае мы уже «обанкротились». Однако мы можем взять два банкролла по 50$, чтобы принять участие в игре, и тогда будем иметь меньший риск банкротства, чем если бы не участвовали в ней вовсе. К счастью, в покере мы почти никогда не столкнемся с этим парадоксом, так что смело игнорируйте его в своих собственных рассуждениях.

Пример 22.1

Разберем небольшой пример. Предположим, что мы бросаем игральную кость. Если выпадает 1 или 2, мы проигрываем 100$, если любое число от 3 до 6 – выигрываем 100$. Вполне понятно, что от такой игры отказываться никак нельзя, ведь мы выигрываем в среднем 33$ за бросок. Но что если у нас в кармане всего 100$? Какова вероятность, что мы проиграем все свои деньги, если будет бросать кость снова и снова? Описанные выше свойства помогут нам дать правильный ответ.

На первом броске мы проиграем все деньги с вероятностью $^1/_3$, а оставшиеся $^2/_3$ раз нарастим банкролл до 200$. Давайте возьмем 100$ за единицу. Тогда риск банкротства для банкролла 100$ будет обозначаться как *R(1)*, а для банкролла в 200$ - *R(2)*.

$$R(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} R(2)$$

Из свойства 5 мы знаем, что $R(a + b) = R(a)R(b)$, тогда:

$$R(2) = R(1)R(1)$$

Проведем несложную подстановку:

$$R(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} R(1)^2$$
$$2R^2 - 3R + 1 = 0$$
$$(2R - 1)(R - 1) = 0$$

Однако из этого уравнения следует, что мы можем получить два значения функции: либо $\frac{1}{2}$, либо 1. Мы знаем, что эта игра обладает положительным ожиданием, следовательно, по свойству 4 значение функции риска должно быть меньше единицы. Поэтому $R(1)$ равно $\frac{1}{2}$.

Наши читатели могут убедиться в правильности этого ответа самостоятельно. Для этого вам потребуется игральная кость и немного терпения – попробуйте бросать кубик до тех пор, пока не проиграете 100$ или выиграете 1000$. После достаточно большого числа попыток, вероятность проиграть все деньги сойдется на значении $\frac{1}{2}$.

Вернемся к формуле 22.1:

$$R(a+ b)=R(a)R(b)$$

Мы можем провести над ней несколько алгебраических преобразований, которые помогут обнаружить важное свойство $R(x)$.

Для начала, давайте возьмем натуральный логарифм от каждой из частей уравнения:

$$\ln R(a + b) = \ln R(a) + \ln R(b)$$

Введем функцию $f(x) = \ln R(x)$, получим:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Это значит, что функция f является линейной:

$$f(1+1) = f(1) + f(1)$$
$$f(2) = 2 f(1)$$
$$f(2+1) = f(2) + f(1)$$
$$f(3) = 3f(1)$$

$f(n) = nf(1)$

...и так далее

Таким образом, $f(x)$ имеет вид $f(x) = -\alpha x$, где α есть некая константа (не стоит путать ее с α из формулы 11.1, где она обозначала отношение блефов к вэлью-бетам). Фактически, риск банкротства для любой игры имеет именно такое выражение, причем мы будем называть α ***константой банкротства***, она всегда положительна и равна натуральному логарифму от риска банкротства для банкролла в 1 единицу. Мы уже знаем, что функция $R(x)$ находится между 0 и 1 для всех *x*, поэтому перед константой используется знак «минус», ведь натуральный логарифм для чисел от 0 до 1 является отрицательным числом.

$$a = \ln (R(1))$$

Константа α связывает величину нашего банкролла с вероятностью банкротства. Например, располагаемый банкролл составляет одну единицу, тогда риск банкротства равен $e^{-\alpha}$. *e* или экспонента, одна из основных математических констант, равна примерно 2.71, в тексте книги мы будем обозначать ее через $\exp(x)$ и e^x.

Представьте, что ваш банкролл составляет две единицы, тогда риск банкротства равен произведению $e^{-\alpha}$ на $e^{-\alpha}$, или $e^{-2\alpha}$. Соответственно, если в банкролле N единиц, то и риск равен $e^{-N\alpha}$. Иными словами:

$$\ln R(x) = -\alpha x$$
$$R(x) = e^{-\alpha x}$$

Получается, что функция риска банкротства имеет экспоненциальный вид и зависит от величины банкролла, а также константы, описывающей распределение исходов от игры.

Вернемся к уже рассмотренному нами примеру. Как мы уже знаем, риск банкротства для банкролла в одну единицу составляет $1/2$. Давайте теперь сделаем следующее упрощение, и будем считать, что в этой игре банкролл равен 1 единице, а наш результат от броска кости может быть либо +1, либо -1.

$$R(b) = e^{-\alpha b}$$
$$R(1) = 1/2$$
$$1/2 = e^{-\alpha}$$
$$-\alpha = \ln 1/2$$
$$\alpha = \ln 2$$

Самое время поговорить о еще одном важном свойстве функции риска.

Свойство 6.
Для одной отдельно взятой сессии R(B) = <R(B + x)>, где x – один из случайных исходов в рамках множества X.

Фактически это свойство говорит нам, что риск банкротства для банкролла *B* – ни что иное как математическое ожидание от риска банкротства для банкролла *B* после одной игровой сессии. Следует это из того, что модель риска банкротства предполагает бесконечно долгую игру. Так что если у вас имеется некий банкролл и соответствующий ему риск *R(B)*, и вы планируете сыграть всего раз, то *R(B)* будет равно взвешенному среднему от двух возможных состояний вашего банкролла. Давайте поясним это определение на конкретном примере.

Пример 22.2

В игре с бросанием кости мы говорили о следующих вероятных исходах:

- +1, вероятность $^2/_3$
- -1, вероятность $^1/_3$.

Свойство 6 говорит нам, что для любого банкролла будет верно следующее:

$$R(B) = \langle R(B + x)\rangle$$
$$R(B) = {}^1/_3 R(B - 1) + {}^2/_3 R(B + 1)$$

Это уравнение показывает зависимость между риском банкротства и возможными исходами игры (сессии). В нашем примере после каждого броска кости существует конечное множество состояний банкролла (здесь – всего два), которое зависит от результата игры.

Мы можем использовать эту зависимость для экспоненциального уравнения:

$$R(B) = \langle R(B + x)\rangle$$
$$e^{-\alpha B} = \langle e^{-\alpha B} e^{-\alpha x} \rangle$$

Справа $e^{-\alpha B}$ является константой, так что мы можем вынести этот член за скобки расчетов математического ожидания:

$$e^{-\alpha B} = e^{-\alpha B} \langle e^{-\alpha x} \rangle$$
$$1 = \langle e^{-\alpha x} \rangle \qquad \textbf{(22.2)}$$

Теперь найдем константу риска:

$$^1/_3\, e^{\alpha} + {}^2/_3\, e^{-\alpha} = 1$$
$$e^{\alpha} + 2e^{-\alpha} = 3$$
$$1 + 2e^{-2\alpha} = 3e^{-\alpha}$$

Пусть $x = e^{-a}$

$$1 + 2x^2 = 3x$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$(2x - 1)(x - 1) = 0$$
$$x = {}^1/_2 \text{ или } x = 1$$
$$e^{-\alpha} = {}^1/_2 \text{ или } e^{-\alpha} = 1$$

В уравнении 22.2 для любой игры одним из решений всегда будет $\alpha = 0$. В случае с играми, где EV < 0, оно является верным, поскольку для них $R(b) = 1$. Однако если мы имеем дело с игрой, где наш ожидаемый выигрыш больше нуля, то ответом всегда будет второй корень, в нашем случае это $\alpha = \ln 2$. Как вы уже могли заметить, этот результат совпадает с нашими первоначальными вычислениями.

Теперь давайте немного отвлечемся от расчетов и посмотрим, к чему мы пришли. Во-первых, мы дали определение функции риска банкротства и назвали ее $R(b)$. Во-вторых, мы перечислили некоторые свойства этой функции, включая очень важное для нас, что $R(a +b)= R(a)R(b)$. Используя это и другие свойства, мы смогли вывести более общую формулу для расчета риска банкротства, $R(b) = e^{-ab}$, где α является константой, описывающей свойства и ожидание от игры, которую мы изучаем. Однако на тот момент мы не могли вычислить α никаким образом, кроме как решив уравнение для $R(1)$.

Затем мы дали определение дополнительному свойству функции $R(b)$, которое объяснило зависимость $R(b)$ от ожидаемого значения функции после одной сессии. С помощью данной формулы мы показали, что ***можно найти значение a непосредственно из параметров игры, не прибегая к вычислению частных значений функции риска***. Это, в свою очередь, делает целый класс более сложных задач вполне решаемыми. Поэтому самое время изучить свойства константы α.

Мы можем сделать несколько интересных наблюдений касательно поведения функции $\langle e^{-ax} \rangle$, которую пока будем называть $g(\alpha)$.

Для начала, нам уже известно, что $g(0) = 1$. Далее, мы можем взять частную производную от функции g по α. Получим:

$$g'(a) = \langle -xe^{-\alpha x} \rangle$$

При $g(0) = \langle -x \rangle$. Поскольку мы знаем, что игра имеет положительное ожидание, $g'(0)$ всегда меньше нулю, так что в точке 0 функция g примет значение 1 и начнет убывать.

Мы можем найти производную второго порядка, g''(α) = < $x^2 e^{-ax}$ >. Эта функция, в свою очередь, всегда положительна.

Объединив все эти свойства, получим график для функции g, который должен начинаться в точке 1, идти вниз, а затем возрастать в бесконечность при α, стремящемся к бесконечности.

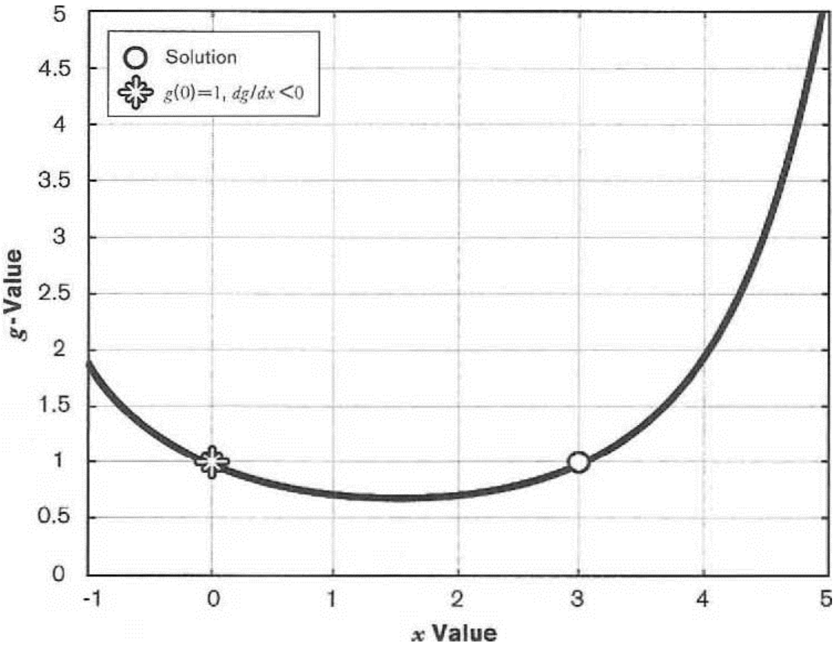

Рисунок 22.1. Пример функции g(x) для игры с положительным ожиданием

Таким образом, решение уравнения 22.2 существует при α > 0, и это решение единственное. Это, в свою очередь, устраняет несколько потенциальных подводных камней, на которые мы бы непременно наткнулись, если бы существовало несколько значений α, удовлетворяющих уравнению 22.2. Теперь же, как только мы найдем значение константы отличное от нуля, мы будем знать, что оно является искомым.

Только что мы вывели общее решение для любой задачи, связанной с определением риска банкротства при неизвестном распределении результатов игры – нужно лишь решить уравнение 22.2.

Пример 22.3

Давайте рассмотрим случай, где у игрока имеется некий ограниченный банкролл. Также скажем, что он не очень-то толерантен к риску, плюс игра является его единственным источником дохода, и он ему негде одолжить денег. Он принимает решение, что 200$+15$ SNG турниры дадут ему лучшую комбинацию риска и рентабельности. Структура призовых в этих турнирах выглядит следующим образом:

1 место: $1000
2 место: $600
3 место: $400

Его ожидание от турниров выглядит следующим образом:

Место	Вероятность	Ожидание
1 место	0.12	$785
2 место	0.13	$385
3 место	0.13	$185
4-10 места	0.62	-$215
Итого	**1**	**EV = $35/турнир**

Какова вероятность того, что этот игрок потеряет все свои деньги (при различных размерах стартового банкролла)?

Для начала давайте выпишем уравнение для этой игры на основании формулы 22.2:

$$0.12e^{-a(785)} + 0.13e^{-a(385)} + 0.13e^{-a(185)} + 0.62e^{-a(215)} = 1$$

Вручную такое уравнение решить не получится, однако есть множество программных методов, включая Microsoft Excel. Не имеет значения какой конкретно «калькулятор» ответа мы используем, в конечном счете, мы все равно получим:

$\alpha \approx 0.000632$
$R(b) = \exp(-0.000632b)$.

Можем составить таблицу со сводными значениями риска банкротства для различных банкроллов:

Банкролл	Риск банкротства
500	72.9%
1000	53.2%
2000	28.3%
3000	15.0%
4000	8.0%
5000	4.3%
7500	0.9%
10000	0.2%

Перед тем как мы продолжим, стоит сделать важное замечание по поводу концепции, на которой основывается модель риска банкротства. До этого момента мы предполагали, что все выигранные деньги будут реинвестироваться в банкролл, что позволит ему расти до бесконечности. Но вряд ли кто-то сможет удержаться от соблазна вывести часть денег из покера, видя столь низкие риски банкротства.

Риск банкротства для банкролла, который искусственно удерживается на одном уровне, равен 1 или 100%.

Если вы регулярно выводите деньги из своего банкролла, ваш риск банкротства многократно вырастает. Существует много рациональных стратегий для постепенного вывода денег, которые при этом не взвинчивают риски, однако важно понимать, что любое уменьшение банкролла или его стагнация ведет к увеличению уровня риска.

Полубанкроллы

Те из наших читателей, кто немного знаком с естественными науками, скорее всего заметили схожесть формулы риска банкротства с некоторыми специфичными функциями, например функцией радиоактивного распада.

Так, радиоактивный материал (обычно) содержит определенные изотопы некоего элемента. Они нестабильны и поэтому распадаются случайным образом ровно наполовину за период, который называется периодом полураспада. Здесь важно понимать, что за отрезок времени, равный двум периодам полураспада, вещество не исчезнет – второй «полураспад» затронет оставшуюся половину и так далее до бесконечности.

Фактически, экспоненциальные функции риска банкротства ведет себя точно так же. Поэтому давайте введем новое понятие, ***полубанкролл***. Определим его как величину банкролла, которая необходима, чтобы риск банкротства был равен ровно $^1/_2$ (или 50%). Тогда риск банкротства для двух полубанкроллов будет равен $^1/_4$, трех - $^1/_8$, и так далее.

Формула для вывода полубанкроллов вполне интуитивно получается из приведенных выше уравнений. Мы просто подставляем вместо значения функции риска $^1/_2$:

$$e^{-ab} = {}^1/_2$$
$$-\alpha b = -\ln 2$$
$$b = (\ln 2)/\alpha$$

Мы можем приблизительно посчитать полубанкролл для описанного выше примера с SNG турнирами: ln 2 равен примерно 0.693, а α, если вы помните, 0.00632. Таким образом, требуемый банкролл для риска в 50% составляет около

1100$. Мы также можем экстраполировать эти результаты на меньшие значения риска: получим полубанкроллы 2200$, 3300$ и так далее. Все они будут подчиняться геометрической прогрессии, описываемой формулой 0.5^b.

Полубанкроллы – это лишь частный случай формулы для вычисления риска банкротства. Они могут оказаться полезными для быстрого вычисления банкролла при определенной толерантности к риску, а также для сравнения банкроллов, требуемых в различных играх (мы еще вернемся к этой идее позже).

Риск банкротства для нормально распределенных исходов

Рассмотрим, как меняется формула риска банкротства в случае, если поле исходов *X* распределено нормально, а μ и σ являются его математическим ожиданием и стандартным отклонением соответственно.

Пусть *v*(x) – функция риска банкротства для непрерывной случайной величины, а p(x) – плотность вероятности, тогда:

$$< v(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)v(x)dx \qquad \textbf{(22.3)}$$

Примечание от переводчика: Здесь авторы используют свойство плотности вероятности, когда для некой непрерывной случайной величины можно задать математическое ожидание через функцию плотности вероятности, взятой на бесконечном интервале. Как вы можете помнить, для функции риска банкротства ранее уже было определено свойство, связывающее ее с ожидаемыми значениями банкролла после одной сессии.

Это уравнение поможет нам использовать уже выведенное определение для формулы риска банкротства в случаях, когда исходы распределены нормально.

Как вы уже знаете из первой части книги, нормальное распределение описывается следующей функцией плотности:

$$N(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

где μ - математическое ожидание, а σ – стандартное отклонение.

Начнем с уравнения 22.2:

$$<e^{-\alpha x}> = 1$$

Связав его с уравнением 22.3, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} N(x) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x) \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[(x-\mu)^2 + 2\alpha\sigma^2 x]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Давайте пока разберемся с экспоненциальным членом:

$$\frac{-(x-\mu)^2 + 2\alpha\sigma^2 x}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x\mu + \mu^2) \quad + 2\alpha\sigma^2 x}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x\mu + 2\alpha\sigma^2 + \mu^2)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x(\mu - \alpha\sigma^2) + \mu^2)}{2\sigma^2}$$

Мы можем несколько видоизменить числитель этого выражения, чтобы затем упростить конечный вид формулы. Дополним выражение взаимоисключающими членами, достроив квадраты:

$$\frac{-(x^2 - 2x(\mu - \alpha\sigma^2) + (\mu - \alpha\sigma^2)^2 + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-[(x - (\mu - \alpha\sigma^2))^2 + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2)]}{2\sigma^2}$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2) + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-[\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Поскольку второй экспоненциальный член не зависит от переменной x, мы можем вывести его из-под знака интеграла:

$$\exp\left(\frac{-[\mu^2-(\mu-\alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-[x-(\mu-\alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right)dx=1$$

Однако также верно следующее равенство:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-[x-(\mu-\alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right)dx=1$$

Оно выполняется, поскольку фактически мы имеем дело с интегралом функции плотности вероятности, где математическое ожидание взято не как μ, а как $\mu-\alpha\sigma^2$. И, как вам известно, площадь (а это и есть смысловое значение интеграла) под куполообразной кривой равна именно единице.

Таким образом, имеем:

$$\exp\left(\frac{-[\mu^2-(\mu-\alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right)=1$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей уравнения:

$$(-\mu^2-(\mu-\alpha\sigma^2)^2)/2\sigma^2=0$$

$$(-\mu^2-(\mu-\alpha\sigma^2)^2)=0$$

$$(\mu-\alpha\sigma^2)^2=\mu^2$$

$$\pm\mu=\mu-\alpha\sigma^2$$

$0 = \alpha$ или $2\mu/\sigma^2 = \alpha$

И снова мы нашли два возможных решения для α. В первом случае коэффициент становится равным нулю, во втором - $2\mu/\sigma^2$.

Подставим последнее значение в нашу общую формулу для риска банкротства:

$$R(b)=\exp\left(\frac{-2\mu b}{\sigma^2}\right) \quad \textbf{(22.4)}$$

Эта формула впоследствии окажется незаменимой при решении задач о риске банкротства для игр с нормально распределенными исходами. Однако покер не относится к этой группе, так что перед тем как применять полученную модель, стоит сказать несколько слов о ее ограничениях.

Дело в том, что в покере исходы сессий не распределены нормально по всей числовой прямой. Скорее они группируются вокруг отдельных значений, например «минус 1 блайнд», «минус 2 блайнда» и так далее. Из Центральной Предельной Теоремы мы знаем, что сумма достаточно больших выборок будет сходиться к нормальному закону, но тут необходимо пояснить, что имеется ввиду под «достаточно большой» выборкой.

Если у нас есть произвольное распределение X для некой игры, а также выборки определенного размера, которые приблизительно нормальны, мы можем оценить риск банкротства для этой игры, используя выборочное распределение X'. Полученный результат будет неточным, поскольку риск банкротства зачастую оказывается искажен разницей между формами выборочного распределения и генеральной совокупности.

Один из главных источников такого искажения – ***коэффициент асимметрии***, который в чем-то похож на дисперсию. Как вы можете помнить, при вычислении последней, мы рассматривали квадраты расстояний фактически наблюдаемых исходов от линии математического ожидания. Такой метод всегда давал положительные значения. Однако для асимметрии мы рассматриваем кубы расстояний, и из-за этого у каждого значения такого коэффициента появляется свой знак. Поэтому, например, распределения, где взвешенная сумма кубов расстояний больше нуля, называются распределениями с положительной асимметрией. При вычислении коэффициента мы будем делить сумму кубов на стандартное отклонение выборки в третьей степени.

Нормальное распределение обладает нулевой асимметрией по очевидной причине. С другой стороны, распределение возможных исходов турниров сильно сдвинуто в положительную сторону. Это несложно доказать: возьмем турнир на 100 человек, где победитель получает весь призовой фонд. Игрок средней руки получит 99 бай-инов 1% раз и проиграет 1 бай-ин 99% раз. ***Ожидание*** от такого турнира для него будет равно нулю, ***дисперсия*** - 99 бай-инов^2/турнир, а ***коэффициент асимметрии*** - примерно +9.84. Если говорить простым языком, то этот коэффициент отражает склонность распределения к бóльшим значениям по одну из сторон линии математического ожидания.

Сильно асимметричные распределения создают определенные проблемы при использовании нормального метода вычисления риска банкротства. Мы можем попробовать вычислить риск для указанного выше турнира так: представив, что рассматриваемое распределение является нормальным (но это будет лишь очень грубая оценка) или же рассчитав коэффициент α напрямую. И поскольку модель риска банкротства применима исключительно в играх с положительным ожиданием, мы будем считать, что наш игрок занимает первое место не 1% раз, а 2%.

Первый метод достаточно простой (предполагаем нормальность распределения):

w = 1 бай-ин/турнир
σ = 14.036 бай-инов/турнир
$R(b) = e^{-2b/197}$

При банкролле в 100 бай-инов риск банкротства составляет примерно 36.2%.

Теперь же давайте сравним этот результат с тем, что дает метод прямого расчета α:

$\langle e^{-\alpha x} \rangle = 1$
$\frac{1}{50} (e^{-99\alpha}) + \frac{49}{50} (e^{\alpha}) = 1$

Найти решение этого уравнения можно с помощью численных методов – получим $\alpha \approx 0.01683$.

Подставляем значение в формулу RoR:

$R(100) = e^{-1.683} = 18.6\%$

Таким образом, прямой расчет дает гораздо меньший риск банкротства. Это является следствием столь явной положительной асимметрии в результатах турнира, ведь у нас есть возможность выиграть 99 бай-инов, при этом в худшем случае потерять мы можем только один. В то же время, нормальное распределение (как в первом уравнении) предполагает значительное число исходов с отрицательными значениями, как например -5 или -10 бай-инов. Но поскольку по факту они являются невозможными, метод расчета через нормальное распределение сильно переоценивает риск потерять все деньги.

По этой причине мы настоятельно не рекомендуем использовать нормальное распределение для расчета риска банкротства, если вашей основной дисциплиной являются турниры. Рассмотренный выше пример не может считаться эталонным из-за выбранной нами структуры распределения призовых, однако асимметрия будет присутствовать даже в случае с более равномерными выплатами.

Теперь давайте посмотрим на лимитный покер. Здесь распределение наших выигрышей, хотя и слегка скошено вправо, не настолько искажено как в случае с турнирами.

В качестве отправной точки возьмем следующее распределение вероятных исходов раздачи. Оно может показаться немного упрощенным, но в реальности не сильно отличается от ожидания игрока среднего уровня.

Результат (SB)	Вероятность	Ожидание
0	70%	0
-1	4.07%	-0.0407
-2	8.14%	-0.1627
-4	4.41%	-0.1763
-6	2.03%	-0.1220
-8	1.01%	-0.0814
-12	0.34%	-0.0407
+2	2.81%	0.0563
+4	3.44%	0.1375
+8	2.5%	0.2
+16	0.94%	0.15
+32	0.31%	0.1
Итого	**100%**	**0.02 SB/раздача**

Если кто-то из наших читателей решит не согласиться с такой формой распределения, цифры в таблице выше можно без труда заменить на те, которые покажутся правдоподобными именно вам.

В рассматриваемом распределении ожидание составляет 0.02 SB/раздача, а дисперсия - 10.80 SB^2/раздача. Используя формулу для нормального распределения и банкролл в 300 SB, получим:

$$e^{-(2)(300)(0.02)/10.80} = 32.89\%$$

Мы также можем получить уравнение 22.1 для такого распределения. Само уравнение получается достаточно громоздким, так что мы предпочли опустить все промежуточные вычисления. Ответом для него будет α = 0.00378. Тогда риск банкротства составит:

$$e^{-300\alpha} = 32.17\%$$

Как вы можете видеть, полученные значения мало чем отличаются друг от друга. То же самое будет верно для большинства возможных распределений исходов раздачи. Из этого можно сделать достаточно очевидный вывод: хотя подобные распределения сами по себе смещены в ту или иную сторону, коэффициент асимметрии в лимитном покере гораздо меньше, чем в турнирах, даже с учетом плавной структуры выплат. Как правило, нормальное распределение хорошо подходит для оценки риска банкротства в кэш-играх – результаты, полученные с помощью такого приближения, почти идентичны тем, что выводятся из полной формулы RoR.

Давайте посмотрим на то, что нам удалось разобрать в этой главе. Сначала мы проанализировали игру в турнирах и обнаружили, что их характерной особенностью является перекос распределения результатов в положительную сторону. По этой причине же нормальное распределение не дает адекватную оценку риска банкротства для турниров, поскольку учитывает все возможные отрицательные исходы, которые попросту невозможны. Затем мы применили схожий подход к лимитному покеру, и результаты оказались несколько иными: нормальное распределение вполне точно предсказало реальное значение риска банкротства.

Теперь перейдем к другому популярному типу распределений исходов раздачи, который встречается только в Безлимитном Холдеме. Здесь будет присутствовать весь спектр значений: от положительных (когда мы выигрываем стэк оппонента) до отрицательных (когда сами отдаем все деньги). Из-за этого нормальное распределение иногда может давать не вполне адекватные предсказания, и основной причиной будет ***коэффициент эксцесса***, который отражает склонность «хвостов» распределения (левого и правого конца) к большей вероятности, чем обычно. Например, вы можете помнить правило трех сигм – исходы, располагающиеся на расстоянии трех стандартных отклонений от среднего значения, имеют вероятность всего 0.3%. Однако в безлимитном покере события, отстоящие от математического ожидания на несколько сигм, могут встречаться не так уж и редко. В то же время, для большинства распределений этот эффект будет почти незаметен.

Результат (BB)	Вероятность	Ожидание
0	70%	0
+1	15%	0.15
-1	13%	-0.13
+50	1.1%	0.55
-50	0.9%	-0,45
Итого	**100%**	**0.12 BB/раздача**

Снова сравним значения для риска банкротства, полученные с помощью нормального приближения, а также прямого метода вычисления. Пусть наш банкролл составляет 500 больших блайндов.

Ожидание в такой игре равно 0.12 BB/раздача, дисперсия 50.27 BB^2/раздача.

$$R(500) = e^{-2(0.12)(500)/50.27} = 9.19\%$$

Из уравнения 22.1 для заданного распределения следует, что:

$$\alpha = 0.004789$$

Таким образом, риск банкротства равен:

$$e^{-0.004789(500)} = 9.12\%$$

В этом случае эффект от эксцесса не сильно выражен; более того, при нормальном распределении мы даже получили переоцененное значение. Но в принципе, использование допущения, что результаты раздач распределены по нормальному закону, никогда не будет большой ошибкой.

Стоит, правда, отметить, что и в безлимитных кэш-играх может наблюдаться асимметрия схожая той, что присутствует в турнирах, особенно в случае с игроками, которые очень хорошо управляются с крупными банками. Так, даже если они отдают оппонентам множество мелких потов, коэффициент эксцесса будет минимальным, однако асимметрия такого распределения результатов приведет к завышенным оценкам риска банкротства.

Тип игры	Подходящая Формула	Ошибка нормального распределения
Лимитный кэш	Нормальное распределение	Незначительная
Турниры	Прямой расчет	Существенная (переоцененные значения)
Безлимитный кэш	Нормальное распределение	Незначительная

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………...

- Модель риска банкротства дает ценные предсказания о наших шансах потерять все деньги при заданном стартовом банкролле. В основе модели лежит предположение, что мы бесконечно долго участвуем в одной игре с известным распределением исходов.

…………………………………………………………………………………………………...

- Риск банкротства для игр с отрицательным ожиданием всегда равен 100%.

…………………………………………………………………………………………………...

- Искусственное удержание банкролла на одном уровне ведет к неминуемому банкротству.

…………………………………………………………………………………………………...

- Полубанкроллы оказываются весьма полезным инструментом для быстрых оценок величины банкролла, соответствующего заданному риску банкротства.

…………………………………………………………………………………………………...

- Для расчета риска банкротства при нормально распределенных исходах следует использовать формулу 22.4.

…………………………………………………………………………………………………...

- Некоторые распределения (например, турнирные) нельзя анализировать с помощью формулы для нормального распределения из-за присущей им асимметрии. В этом случае следует оценивать риск банкротства напрямую, через уравнение 22.2.

…………………………………………………………………………………………………...

Глава 23

Добавляем неопределенность: Риск банкротства при неизвестных винрейтах

Представьте, как было бы здорово, если бы над головами игроков за столом отображались винрейты для каждой руки/игры/сессии. Естественно, в жизни такого ожидать не приходится, так что нам остается лишь гадать об истинном значении этого ключевого показателя. Ниже мы постараемся скрестить формулу риска банкротства, выведенную ранее, с неопределенностью распределения винрейтов, которые мы получаем из различных выборок.

Хотя мы будем рассматривать преимущественно примеры из лимитного покера, все нижеизложенные формулы можно без труда применить и в Безлимитном Холдеме. Не стоит, правда, забывать, что поскольку весь наш анализ базируется на предположении о нормальном распределении, его ни в коем случае нельзя использовать в турнирах.

Представьте себе игрока, который провел за столами *N* часов, имеет винрейт *w* и стандартное отклонение *s*. Первое, что стоит отметить – стандартное отклонение выборки очень быстро сходится к стандартному отклонению генеральной совокупности. Поэтому здесь и далее мы будем считать, что *s* равносильно отклонению для всей игры в целом (σ). С другой стороны, как мы уже неоднократно показывали ранее, *w* не обладает этим свойством (т.е. не сходится к истинному винрейту μ), поскольку *s* гораздо больше *w*.

Чтобы проиллюстрировать это, давайте обратимся к простому примеру. Пусть мы знаем, что для некоего игрока μ = 1 ставка/час, σ = 12 ставок/час, и мы рассматриваем выборку из 100 часов, где его ожидаемый выигрыш равен *w*. Согласно правилу трех сигм, с 68% вероятностью *w* окажется в промежутке между 0 и 200 ставками; а 32% раз он окажется более чем на 1 ставку/час отдалено от среднего значения. Скажем, у нашего игрока банкролл составляет 200 ставок. Вполне очевидно, что разница для риска банкротства между ожиданием 0 ставок/час и 2 ставки/час более чем весомая!

0 ставок:

$R(200) = 1$

2 ставки:

$R(200) = e^{-800/144} = 0.387\%$

Фактически мы получили весь возможный спектр значений функции риска банкротства (от 0 до 1) в пределах всего одного стандартного отклонения от среднего значения генеральной совокупности. Даже если мы возьмем винрейты в 0.8 и 1 ставку/час, дисперсия никуда не пропадает:

0.8 ставки:

R(200) = $e^{-320/144}$ = 10.84%

1 ставка:

R(200) = $e^{-400/144}$ = 6.22%

Таким образом, перед нами стоит серьезная дилемма. С одной стороны, мы можем принять выборочные винрейт и стандартное отклонение за достоверные оценки показателей генеральной совокупности и уже на их основе проводить все последующие расчеты. Однако реальное математическое ожидание может существенно отличаться от того, что мы наблюдаем даже на больших выборках. Так что логичнее будет сделать скидку на неопределенность при оценке ожидаемого выигрыша и рассматривать распределение возможных винрейтов, а не одно конкретное значение. Сделать это можно с помощью нормального закона, где математическое ожидание и стандартное отклонение совпадают с винрейтом и стандартным отклонением из выборки. В этом случае мы сможем использовать функцию риска банкротства в качестве характеристической функции, а предполагаемое распределение винрейтов – как соответствующую ей функцию плотности.

Самое время сделать паузу и объяснить нашу задумку более простым языком. Скажем, у нас есть некая выборка с винрейтом *w*. Тогда мы говорим, что можем описать кривую нормального распределения с центром в *w*. Для каждого *w*, мы можем использовать формулу риска банкротства, которую мы использовали все это время для вычислений при заранее известном винрейте. Затем мы умножим все значения этой формулы на вероятность, что это каждое из значений является нашим истинным винрейтом, и сложим их. Вполне очевидно, что этот метод дает более точные результаты, нежели гадания о реальном винрейте. Более того, подобные вычисления мы можем проводить даже на основании очень скудных данных об игре и наших результатах.

Стоит отметить, что если мы располагаем лишь небольшой выборкой (скажем, в часах), дисперсия для распределения винрейтов будет огромной, а это, в свою очередь, сильно повлияет на точность значений функции риска банкротства.

Давайте зададим параметры нашей модели.

Некий игрок обладает базой в *N* рук с винрейтом *w* и стандартным отклонением за раздачу *s*. Его банкролл составляет *b*. Таким образом, его риск банкротства для заданного винрейта составляет:

R(w,b) = $\exp(\frac{-2wb}{s^2})$

f(x) = $\exp(\frac{-2wb}{s^2})$

Стандартная ошибка для выборочного винрейта тогда равна:

$$\sigma_w = s/\sqrt{N}$$

Для наблюдаемой выборки (мы предполагаем ее нормальность) можно задать функцию плотности вероятности с ожиданием *w* и стандартным отклонением σ_w.

$$p(x) = (\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}})\exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2{\sigma_w}^2}\right)$$

Используя уравнение 22.3 получаем:

$$< v(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} v(x)p(x)dx$$

Это уравнение требует взятие интеграла на промежутке от -∞ до +∞; однако мы знаем, что формула риска банкротства для винрейтов слева от нуля всегда принимает значение равное 1. Значит, мы можем разбить этот интеграл на две части: от 0 до ∞, где функция риска банкротства умножается на функцию плотности вероятности, плюс функция плотности, определенная на интервале от -∞ до 0 (здесь мы просто получим вероятность того, что наш винрейт отрицателен).

$$< v(x) >= \left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_{0}^{\infty} \exp\left(\frac{-2xb}{\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2{\sigma_w}^2}\right) + p(w < 0)$$

Последний член – самая важная особенность этой формулы. Он фактически отражает неопределенность значения истинного винрейта, а также что никакой банкролл не спасет игрока от банкротства, если он имеет отрицательное ожидание в игре. Эта вероятность, как мы покажем ниже, напрямую связана с неопределенностью параметра σ_w: чем больше дисперсия, тем больше шансы, что реальный винрейт ниже нуля. Более того, риск банкротства для положительных, но мелких винрейтов, также оказывается весьма значительным.

Также теперь можно объяснить и причину, по которой мы использовали нормальное распределение для выборки винрейтов: поскольку формулы риска банкроства и нормального распределения содержат экспоненты, мы можем упростить полученное выше уравнение!

$$\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{-2xb}{\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2{\sigma_w}^2}\right)dx + p(w<0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{-2xb}{\sigma^2}-\frac{x^2-2xw+w^2}{2{\sigma_w}^2}\right)dx + p(w<0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2-2x\left(2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2}-w\right)+w^2}{2{\sigma_w}^2}\right)dx + p(w<0)$$

Пусть u = $2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2}-w$, тогда:

$$\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+u)^2+w^2-u^2}{2{\sigma_w}^2}\right)dx + p(w<0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp(-\frac{(x-(-u))^2}{2{\sigma_w}^2})\exp\left(-\frac{w^2-u^2}{2{\sigma_w}^2}\right)dx + p(w<0)$$

Вторая экспонента не зависит от значений x, так что мы можем вывести ее из-под знака интеграла – получим константу, умноженную на функцию нормального распределения:

$$\exp\left(-\frac{w^2-u^2}{2{\sigma_w}^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\infty}\exp(-\frac{(x-(-u))^2}{2{\sigma_w}^2})dx + p(w<0)$$

Самое время сделать паузу и немного поговорить о нормальном распределении. Как вы можете помнить, в третьей главе мы ввели следующее определение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{z^2}{2})$$

Где z – нормированная z-оценка величины x.

Φ(z) называется функцией распределения и представляет собой площадь под графиком нормального распределения с ожиданием 0 и стандартным отклонением 1 слева от значения x.

Если бы границы интегрирования этой функции были от -∞ до ∞, то она была бы равна единице. Однако здесь мы рассматриваем пределы от 0 до ∞. Это значит, что она равносильна функции распределения для z-оценки $-u/\sigma w$, или $(w-2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2})$/σw. Значение полученной функции можно получить из соответствующих таблиц.

В итоге имеем:

$$\exp\left(-\frac{w^2 - u^2}{2{\sigma_w}^2}\right)(\Phi(-u/\sigma w)) + p(w < 0)$$

$$-\frac{w^2 - u^2}{2{\sigma_w}^2} = -\frac{w^2 - (4b^2\frac{\sigma_w^4}{\sigma^4} - 4bw\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2} + w^2)}{2{\sigma_w}^2} = (2b^2\frac{\sigma_w^2}{\sigma^4} - \frac{2bw}{\sigma^2})$$

$$\exp(2b^2\frac{\sigma_w^2}{\sigma^4} - \frac{2bw}{\sigma^2})(\Phi(-u/\sigma w)) + p(w < 0)$$

Осталось произвести последнее упрощение:

$$\mathrm{RoRU} = R(w, b)\exp(2b^2\frac{\sigma_w^2}{\sigma^4})(\Phi((w - 2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2})/\sigma_w)) + \Phi(-w/\sigma_w) \qquad \textbf{(23.1)}$$

Это и будет нашей формулой для расчета риска банкротства в условиях неопределенности (RoRU). Фактически, она содержит в себе 4 разных члена.

Первый - *R(w,b)*, риск банкротства при нормальном распределении для наблюдаемого винрейта. Второй – экспонента от квадрата банкролла и стандартного отклонения для винрейта и игры в целом. Третий – функция распределения, зависящая от *w*, банкролла *b*, а также стандартных отклонений для обоих распределений. Полученное произведение и будет являться взвешенным риском банкротства для игрока с положительным винрейтом. Последний член – функция распределения для отрицательных винрейтов, умноженная на риск банкротства в таком случае (он равен 1 или 100%).

Ниже вы можете найти графики с некоторыми расчетами для обычной формулы банкротства (RoR), а также формулы, учитывающей неопределенность винрейта (RoRU):

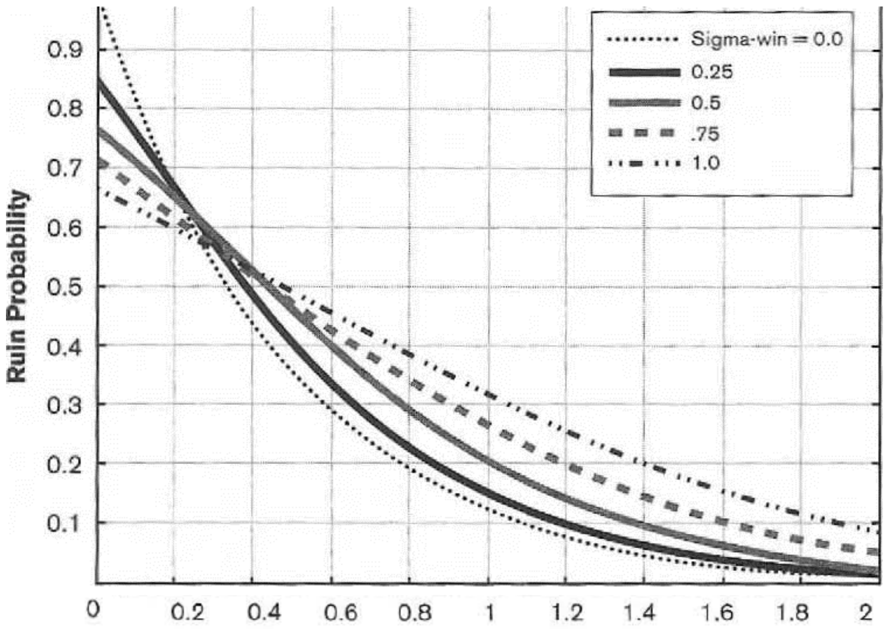

Рисунок 23.1. Риск банкротства и винрейт (банкролл: 100, отклонение 10)

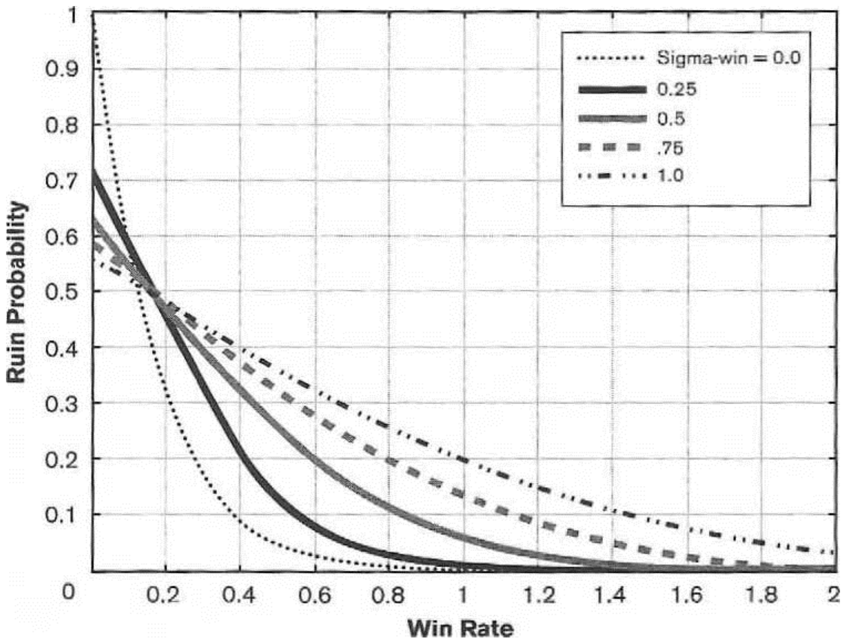

Рисунок 23.2. Риск банкротства и винрейт (банкролл: 300, отклонение 10)

Примечательно, что когда неопределенность винрейта высока (маленькая выборка), RoRU дает оценку банкротства менее 100%, даже если рассматривается минусовой игрок. Это происходит из-за ненулевой вероятности «черной полосы», которая съедает в целом положительный винрейт – а в таком случае RoR всегда будет меньше единицы.

Формула для расчета RoRU является отличным инструментом для оценки неопределенности, которая присуща винрейтам игроков, она позволяет ввести численную поправку на даунсвинг.

Конечно же, полученная формула кажется гораздо более сложной по сравнению с теми, что мы вывели в предыдущих главах. Но именно эта черта позволяет ей нивелировать склонность игроков приписывать себе более высокие винрейты и, как следствие, производить более правдоподобные прогнозы.

Несколько слов о внешних факторах

Большинство игроков переоценивают свой истинный винрейт при расчетах риска банкротства, и этому есть несколько причин.

1) Везение в начале карьеры – игроки, чей путь в покере начинается с сотни-другой выигранных долларов, с большей вероятностью вернутся за столы. И наоборот – если ваш банкролл заметно поредел уже после первой сессии, вы вряд ли снова запустите покерный клиент. И хотя в редких случаях успех в начале карьеры зависит от способности выигрывать в долгосрочной перспективе, невозможно игнорировать гигантскую роль дисперсии в оценке своих первых результатов.

Если вы посмотрите на выборку из всех игроков, вышедших в плюс после нескольких пробных сессий, большинство из них окажутся просто рыбой, которая удачно прокатилась по дисперсионной горке. Такие игроки почти наверняка будут склонны использовать исторические (и изрядно раздутые) винрейты для оценки своих навыков. Особенно ярко этот эффект выражается на примере тех, кто всерьез подумывает о карьере покерного профессионала – ведь чаще всего о такой возможности люди начинают задумываться после продолжительного апстрика, который редко отражает реальное изменение в долгосрочном винрейте.

2) Эго – покер невозможно представить без самомнения и эго. Многие игроки уже успели внушить себе мысль о превосходстве над полем и временности своих неудач. Хотя зачастую причиной является как даунстрик, так и просто низкий уровень игры.

3) Дезинформация – покерный мир перенасыщен информацией, которая льется рекой как из форумов, так и журналов, программ на телевидении и т.п. Причем никто не мешает игрокам завышать винрейты, чтобы не терять лица перед своей аудиторией, поскольку не существует реальной возможности опровергнуть их слова.

Кроме того, большинство книг о покере старательно уклоняются от ответа на вопрос о реальной оценке долгосрочного винрейта в различных играх. Вместо этого читателям предлагаются взятые из воздуха цифры наподобие «5 блайндов за 100 рук», которые никаким образом не отражают предполагаемое стандартное математическое ожидание для начинающих игроков.

4) Рост сложности игры – мы привыкли использовать статистику для того, чтобы предсказать свои будущие результаты на основании событий из прошлого. Однако игры меняются, становятся сложнее. Одни виды покера уступают место другим, более популярным, количество рыбы неуклонно сокращается, общий уровень игры растет. Все это делает статистический «взгляд в будущее» менее достоверным, чем нам бы того хотелось.

Лишь немногие из игроков, особенно из тех, кто потратил много времени на изучение и решение покера, готовы признать, что в конечном счете они едва ли способны побить рейк. Более того, не будет большой ошибкой сказать, что универсальным свойством всех игроков в покер является переоценка своих способностей.

Еще одним фактором, из-за которого расчеты риска банкротства часто уходят не в ту сторону, являются регулярные кэшауты. Как мы отметили выше, банкролл, из которого изымается большинство выигранных денег, всегда имеет оценку RoR близкую к единице.

Один из авторов этой книги является профессиональным игроком, а это значит, что у него есть расходы на ипотеку, еду, одежду и т.п. Когда мы говорим о винрейтах и банкроллах, мы подразумеваем, что все (или, по крайней мере, большая часть) выигранных нами денег оказываются у нас на руках, без каких-либо вычетов. Однако это не всегда так.

Начнем с того факта, что, скажем, в США все доходы от покера облагаются налогом по ставке 30% или больше (в зависимости от величины выигрыша). Таким образом, уже треть нашего винрейта обязана испариться, если вы не хотите коротать время в ближайшей тюрьме, а не за столами.

Далее, под термином «банкролл» следует понимать количество денег, которые мы можем позволить себе проиграть в покер за конкретным столом на конкретном лимите. Например, вы регуляр в лимитном холдеме за столоами $20-$40 с банкроллом $12,000 - в теории ваш банкролл составляет 300 больших ставок. Однако не стоит забывать, что даунстрик на $6,000 вполне может заставить вас задуматься о спуске на лимит ниже (о чем мы еще поговорим в следующих главах), и в таком случае у вас останется «всего» 150 больших ставок на текущий лимит. В случае проигрыша этих денег вы не окажетесь «банкротом», поскольку ваш банкролл не пропадет полностью; но было бы крайне нелогично рассматривать перспективу потери всех $12,000 на лимите $20-$40. Это значит, что ваш реальный риск банкротства будет суммой рисков проиграть определенные суммы денег на разных лимитах.

В-третьих, профессиональным игрокам в покер тоже нужно платить за еду и жилье – подобные ежедневные расходы в сумме дают мощный отток денег из банкролла, и должны рассматриваться как фактор, сдерживающий ваш винрейт.

Даже те, кто не считает себя профессионалами, редко переводят в банкролл 100% своих выигрышей за столами. Как правило, заветные блайнды из винрейта превращаются в отпуск на море, украшения или плазменные телевизоры.

Есть множество способов рационального изъятия денег из банкролла для финансирования своих текущих расходов (будь то еда или очередной Rolex), но мы предпочитаем, возможно, наиболее простой и понятный из них: платите себе определенную «зарплату» в час, но при этом не забывайте уменьшать свой винрейт аккурат на эту же величину.

Такой подход может вызвать справедливое удивление у некоторых из наших читателей. *Как можно вычитать свои расходы из винрейта? Что если мой винрейт в точности покрывает расходы, и ничего больше не остается?*

Дело в том, что если чистый винрейт какого-либо игрока близок к нулю (или еще хуже, оказывается отрицательным), ***его риск банкротства возрастает на порядок и зачастую может приближаться к 100%***. Огромное количество профессионалов уже успело убедиться в справедливости такого утверждения на своем примере. Не всегда подобная практика заканчивалась банкротством, однако любой серьезный даунсвинг вполне мог заставить их отказаться от львиной доли своей обычного дохода ввиду необходимости спуска по лимитам.

Каждый выведенный доллар уменьшает стойкость банкролла к свингам, поэтому при подсчете риска банкротства вам всегда следует руководствоваться ***не винрейтом, а количеством денег, которое вливается обратно в ваш банкролл***.

Для начинающих игроков все еще сложнее. В начале этой главы мы предложили метод оценки риска банкротства в условиях неопределенности, который учитывал вероятность того, что истинный винрейт игрока мог оказаться ниже наблюдаемого. Проблема многих «любителей» заключается в том, что они начинают оценивать свой риск банкротства исходя из винрейта, который целиком превращался в банкролл.

Приведем несложный пример. Пусть наш испытуемый отыграл в казино 40.000 рук в свою любимую игру с винрейтом 2.5BB/100 и стандартным отклонением 18BB/100. Его банкролл на текущий момент составляет 300 ставок. Если мы применим обе имеющиеся в нашем распоряжении формулы риска банкротства, то получим следующее:

RoRU = 3.67%
RoR (простой) = 0.98%

Разница между полученными цифрами не такая уж и большая – всего 2.69%; это произошло из-за того, что его результаты оказались на дистанции трех стандартных отклонений от нулевого винрейта. Поэтому оценка риска банкротства не сильно страдает от неопределенности.

Обрадовавшись полученной цифре, наш игрок собрался стать профессионалом и зарабатывать покером на жизнь. Он планирует выбирать из своего винрейта примерно 1BB/100 ежемесячно, чтобы кое-как обеспечивать себя и одновременно с этим пополнять банкролл. Однако это решение имеет серьезные последствия:

RoRU = 17.25%
RoR (простой) = 6.22%

Уменьшение реального винрейта на 1BB существенно повысило предполагаемый риск банкротства. Почему? ***С таким винрейтом у нашего игрока больше шансов оказаться минусовым***, поскольку теперь он всего в двух стандартных отклонениях от нуля.

Запомните, недостаточно просто быть в плюсе. Важно постоянно наращивать свой банкролл, причем выделять на это значительно больше половины винрейта. В случае профессиональных игроков сдерживающими факторами будут расходы на жизнь, поддержание своего имиджа, поездки, турниры и т.п. Однако у профессионалов есть и возможность заработать дополнительные деньги через бэкинг или спонсорские контракты – эти потоки также следует учитывать.

Виртуальный банкролл

Все рассуждения выше служили важной подводкой к новому понятию. Давайте немного поговорим о ***виртуальных банкроллах***, ведь мы никогда не играем в покер в вакууме, зачастую у нас есть доступ к различным источникам наличных, в том числе от работы в офисе или инвестиций. А это значит, что без учета подобных факторов анализ риска банкротства не может считаться полным. К примеру, игрок со сторонней зарплатой в $300,000 в год обладает гораздо более внушительным банкроллом, нежели тот, что в данный момент находится на его счете в покерной комнате. С другой стороны, для человека без дополнительных источников средств покерный банкролл будет на вес золота.

В этой связи необходимо запомнить простое правило: факторы, влияющие на риск банкротства не симметричны. Вы можете немного переоценить свой винрейт, и это выльется в катастрофу, в то время как его же незначительная недооценка не приведет к серьезным последствиям, даже если риск покажется вам чуть выше.

Кроме того, истинная оценка вероятности потерять все деньги не заключена в одной лишь формуле. Покер – далеко не самая статичная игра. Новые рынки то появляются, то закрываются, а вместе с ними меняется и сложность поля. Свой вклад вносят и апсвинги, которые подталкивают многих игроков к неверным решениям в отношении своих банкроллов и карьер в целом. Более того, сам по себе апсвинг является результатом неких изменений в вашем окружении и уровне игры: иногда длительных, иногда случайных. Все это должно склонить вас к мысли о том, что всегда лучше накинуть несколько лишних процентов к посчитанному риску банкротства, ведь опасность лишиться всегда банкролла не в пример серьезней, чем виртуальный выигрыш пары сотен долларов.

Нужно запомнить

……………………………………………………………………………………………...

- Мы часто вынуждены рассчитывать риск банкротства руководствуясь неточными оценками ключевых параметров, таких как винрейт и стандартное отклонение.

……………………………………………………………………………………………...

- Мы можем частично избавиться от неопределенности используя допущение о нормальном распределении нашего винрейта.

……………………………………………………………………………………………...

- Формула риска банкротства в условиях неопределенности выводится из основной формулы риска банкротства с поправкой на оценочный характер используемого значения винрейта. Такая модель может применяться, даже если у вас на руках нет большой выборки.

……………………………………………………………………………………………...

- Принимая решение о начале карьеры профессионального игрока, вы должны трезво оценить свой риск банкротства и учесть множество сторонних факторов.

……………………………………………………………………………………………...

Глава 24

Наращиваем банкролл: Критерий Келли и выбор столов

Хотя в начале этой книги мы сказали, что посвятим каждую страницу покерной математике, в этой главе вас ждет приятное лирическое отступление. Мы поговорим об идее, имеющей огромный вес во многих областях помимо покера – так называемом «Критерии Келли». Вы часто можете встретить его в статьях о портфельных инвестициях, блэкджеке и ставках на спорт.

В одной из первых глав мы уже упоминали достаточно широкий термин ***полезность***. Здесь и далее мы будем считать, что он обозначает ценность денег с поправками на характер предложенной ситуации. Последнее, пожалуй, требует пояснения. Представьте, что вам дали выбрать между купюрой в $20 и купюрой в $10. Конечно же, вы выберете ту, чей номинал больше – в ваших глазах ценность (то есть субъективная полезность) двадцати долларов выше. Однако в случае с получением здесь и сейчас $500.000 и монеткой на $1.000.000, выбор не столь очевиден, многие бы предпочли не рисковать. Причина кроется в законе убывающей предельной полезности – пятьсот тысяч уже достаточно внушительная сумма, и еще столько же вряд ли сделают нас гораздо счастливее, особенно учитывая тот факт, что альтернативой является выигрыш нуля долларов и нуля центов.

Все это должно натолкнуть вас на мысль, что в теории мы можем вывести некую ***функцию полезности***, в которой бы каждое значение банкролла x соотносилось с некой полезностью $U(x)$. Более того, эта функция была бы строго индивидуальна и обладала бы следующими свойствами:

- нелинейность – разным приращениям банкролла соответствуют разные (и далеко не линейные) приращения полезности; так, миллионер будет гораздо менее рад найденному доллару, чем человек, живущий без денег;
- непрерывность – это хоть и немного упрощенное представление (ведь деньги – величина дискретная, невозможно иметь доллар и одну миллиардную его часть, например), но в реальности оно ни на что не влияет;
- возрастает для всех значения $x > 0$; то есть мы никогда не захотим иметь банкролл меньшего размера.

Представьте, что нам предлагают ставку B. Тогда существует некое количество денег X, что полезность $U(X)$ равна полезности результата ставки, $\langle U(b)\rangle$, где b означает различные исходы ставки B. Для очень маленьких сумм, значение X может оказаться очень близко к $\langle B\rangle$, поскольку полезность начинает вести себя линейно при небольших значениях переменных. Однако если мы возьмем подбрасывание монетки за миллион долларов, наверняка найдется такое значение X, которые бы отражало реальную ценность такой ставки для нас.

Примечание от переводчика: Фактически, авторы говорят о следующем. Пусть нам предлагают подкинуть монетку за миллион долларов. Орел – миллион наш, решка – ничего не получаем. Ожидание такой ставки равно \$500,000. Тем не менее, очевидно, ожидание в \$500,000 не равно полезности от получения \$500,000 наличными, так как определенный процент раз мы не получим ничего. Тогда есть некая сумма X (возможно, мы удовлетворимся и \$350,000 сразу), полезность которой бы была равна полезности от ожидаемого выигрыша такой ставки.

Критерий Келли помогает найти такую функцию полезности, которая оптимизирует темп роста банкролла. Работу этого принципа можно объяснить следующим образом. Как мы можем максимизировать свое ожидание с имеющимся банкроллом? Естественно поставив все деньги на какое-то событие, которое имеет положительное математическое ожидание. Однако если нам не повезет, и мы проиграем, на следующую ставку нам попросту не хватит денег. Значит, имеет смысл максимизировать не ожидаемый выигрыш в долларах, а функцию полезности Келли, $U(x)$ для каждой ставки – так мы сможем найти баланс между риском и наращиванием банкролла. Не вдаваясь в лишние подробности:

$$U(x) = \ln x$$

Заинтересовавшиеся читатели могут прочитать о том, почему функция полезности Келли выглядит именно так, в любой хорошей книжке о финансовой математике. Решения, максимизирующие значения заданной функции полезности удовлетворяют ***критерию Келли***, или попросту следуют ***стратегии Келли***. У этой стратегии есть несколько важных особенностей:

- она максимизирует среднее значение банкролла после заданного количества событий;
- она минимизирует среднее время, требуемое для достижения заданного размера банкролла;
- образует лог-нормальное распределение банкроллов (логарифмы всех возможных значений банкролла имеют нормальное распределение).

Пример 24.1

В качестве примера рассмотрим игрока, который ставит на спорт. Ему повезло открыть некую модель, которая всегда позволяет ему делать ставки с преимуществом в 3% (после учета комиссии букмекера). То есть он выигрывает 51.5% раз, а проигрывает всего 48.5%. Скажем, выплаты делаются 1 к 1. Пусть его банкролл составляет \$5000, и он может ставить любое количество денег. Какой размер ставки обеспечит нашему игроку максимально быстрый рост банкролла?

Чтобы ответить этот вопрос необходимо максимизировать функцию полезности Келли. Если наш герой ставит *x* долларов, то всегда будет происходить одно из двух событий: 51.5% раз его банкролл вырастет до (5000 + *x*), а 48.5% раз его отбросит до уровня (5000 - *x*).

$$\langle U(x) \rangle = 0.515(\ln (5000 + x)) + 0.485(\ln(5000 - x)).$$

Мы уже не раз показывали, как нужно находить максимальное значение функции в подобных случаях – достаточно лишь взять первую производную:

$$0.515/(5000 + x) - 0.485/(5000 - x) = 0$$
$$x = 150$$

Таким образом, оптимальный размер ставки с 3% перевеса фактически равен 3% банкролла нашего игрока (при условии, что все выплаты производятся из расчета 1 к 1). Очевидно, что в случае выигрыша первой ставки, в следующий раз он вложит в матч 3% от $5150, в случае проигрыша – 3% от $4850 и так далее.

Поскольку эта книга не задумывалась как общее пособие по азартным играм, здесь мы и закончим наш небольшой экскурс в спортивные ставки.

Ключевой идеей в этом примере является замена функции полезности вида [ln x] на ожидаемую величину банкролла. В дальнейшем это позволит нам выбирать рабочий лимит, столы и так далее – иными словами, мы сможем дать численную оценку многим вещам, которые не связаны непосредственно с игрой в карты.

Перед тем как мы пойдем дальше, необходимо сделать несколько ремарок относительно функции полезности Келли:

- У этой функции риск банкротства равен нулю, поскольку предполагается бесконечная делимость банкролла. То есть в случае проигрыша мы всегда можем выделить из наших денег ровно требуемую величину и поставить снова, то же касается и выигрыша.
- Стратегия по Келли не может быть напрямую перенесена в покер, поскольку здесь не существует бесконечного количества игр на всех возможных лимитах (например, вы никогда не найдете стол со ставками $14.32-$28.64).
- Логарифмическая природа функции полезности Келли предполагает несколько интересных свойств. Например, удвоение нашего банкролла «стоит» для нас столько же, сколько проигрыш половины исходного. Поэтому с уменьшением банкролла проигрыши все меньших и меньших сумм бьет по нам гораздо больнее, чем выигрыш значительных (в монетарном выражении) сумм денег, когда наш банкролл уже достаточно раздут.

- Степень риска в этой стратегии значительно выше той, которую видят игроки на основании расчетов риска банкротства, поскольку она содержит в себе жесткое требование по смене лимитов, и очень немногие готовы пойти на это. Однако эта же особенность позволяет продолжать игру на различных ставках с относительно неглубоким банкроллом.

Здесь стоит отметить интересный факт (по крайней мере, по нашим собственным наблюдениям). Большинство игроков гораздо менее толерантны к риску, чем того требует игра в карты. Например, многие хотят, чтобы вероятность проиграть стартовый банкролл находилась в пределах 5%. Представьте себе, что бизнесмену сообщили, что его дело может прогореть лишь 5 раз из 100 – он был бы вне себя от счастья!

Конечно, тут стоит сделать оговорку, ведь вряд ли какой-то игрок сможет построить свой покерный бизнес, а затем продать его за пару миллионов. Но нам все же стоит трезво оценивать риск банкротства в сравнении с потенциальными выигрышами. Неправильный подход к этому аспекту игры заставляет излишне осторожных игроков торчать на низких лимитах месяцами, отказываясь от чуть более рискованной, но гораздо более прибыльной игры.

Стратегия Келли дает нам хороший инструмент для анализа собственного банкролла и выбора подходящих лимитов. Зачастую перед нами не простирается бесконечное поле возможностей: мы можем играть только в онлайне или в казино, куда легко попасть; доступные нам лимиты всегда ограничены, да и на них не всегда найдется хорошая игра. В результате мы нередко вынуждены выбирать всего между парой игр. Иногда наше решение будет очень простым, скажем, когда нам повезло найти стол с высоким ожидаемым выигрышем и приемлемой дисперсией. Однако чаще всего нам придется выбрать меньшее из двух зол: высокое ожидание и высокая дисперсия, либо низкое ожидание и низкая дисперсия.

В таких случаях мы можем использовать функцию полезности Келли в качестве ориентира. Естественно, только при условии, что нам доступны две разные игры, и мы не против спуска или подъема по лимитам. Это, в свою очередь, значит, что у нас есть возможность проследить, как различные варианты влияют на нашу функцию ***полезности***, и таким образом решить, какая из предложенных игр наилучшим образом подходит нашему банкроллу.

Перед тем как мы начнем говорить об этой модели, давайте посмотрим на критерий Келли с точки зрения ***оптимального банкролла***. Во всех примерах выше мы рассматривали некий статичный банкролл и определяли соответствующий ему оптимальный размер ставки. В то же время мы можем повернуть все формулы и в обратную сторону – это поможет нам найти оптимальный размер банкролла при фиксированном размере ставки.

Функция полезности Келли для игры с распределением исходов X имеет вид:

$$< \ln (B + x) > - \ln B$$

где B – размер банкролла, а *x* – случайная величина из распределения X.

По сути, изменение функции полезности Келли от какой-либо игры есть ни что иное как ожидаемая полезность минус значение функции до начала игры.

В качестве небольшого примера, давайте вернемся к ситуации, которую мы изучали в главе о риске банкротства. В ней мы бросаем кубик и выигрываем 1 единицу каждый раз, когда выпадает от 3 до 6, и проигрываем, если выпадает 1 или 2. Здесь размер ставки равен 1. Тогда для банкролла *B* мы можем выписать следующее уравнение:

$$U(B) = (1/3)(\ln (B - 1)) + 2/3 (\ln (B + 1)) - \ln B$$

Чтобы найти максимум этой функции, нам необходимо взять ее производную по *B*:

$$U'(B) = 1/(3(B - 1)) + 2/(3(B + 1)) - 1/B$$
$$0 = B(B + 1) + 2(B - 1)(B) - 3(B - 1)(B+ 1)$$
$$0 = B^2 + B + 2B^2 - 2B - 3B^2 + 3$$
$$B = 3$$

Таким образом, для этой игры мы получаем оптимальный темп роста банкролла при его изначальном размере в 3 единицы.

Теперь поставим следующие условия для рассматриваемой задачи о соответствии выбираемых игр нашему банкроллу:

- у нас будут две игры: Игра 1 и Игра 2, причем первая всегда дороже;
- мы знаем свои винрейты μ_1 и μ_2, а также стандартные отклонения σ_1 и σ_2 для рассматриваемых игр (ожидание всегда положительно, а дисперсия конечна);
- у нас есть некий ограниченный банкролл *B*.

Очевидно, что если бы нас заставили участвовать в одной из этих двух игр, и у нас был бы бесконечный банкролл, мы бы без колебаний выбрали Игру 1, поскольку она дороже. Для небольшого же банкролла лучше подходит Игра 2. Значит, наша модель должна предсказывать такой порог *c*, за которым нам следовало бы всегда выбирать более дорогую игру, и наоборот.

Для каждой игры у мы знаем некое распределение исходов *X*. Изменение функции полезности Келли для каждого распределения можно представить в виде:

$U = < \ln (B + x) > - \ln B$
$U = < \ln B(1 + x/B) > - \ln B$
$U = <\ln B> + <\ln (1 + x/B) > - \ln B$

$< \ln B >$ является константой, получаем:

$U = < \ln (1 + x/B) >$

Мы можем использовать ряд Тейлора для функции вида ln (1 + t):

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + [\dots]$$

Получим:

$$\ln\left(1 + \frac{x}{B}\right) = \frac{x}{B} - \frac{x^2}{2!\,B^2} + \frac{x^3}{3!\,B^3} - \frac{x^4}{4!\,B^4} + [\dots]$$

Скажем, что размер нашего банкролла, *B*, всегда значительно больше каждого из возможных исходов *x*. Тогда мы можем игнорировать члены в третьей степени и дальше, поскольку они содержат x^n в числителе и $(n!)(B^n)$ в знаменателе. В соответствии с нашим предположением о размере банкролла получается, что так мы делим очень маленькое число на очень большое, а это примерно нуль.

Мы пришли к выражению:

$$U \approx < \frac{x}{B} - \frac{x^2}{2B^2} >$$

Как мы уже отмечали выше, $<x> = \mu$ тогда:

$<(x - \mu)^2 > = \sigma^2$
$<(x^2 - 2x\mu + \mu^2) > \sigma^2$
$<x^2> - 2 <x> \mu + \mu^2 = \sigma^2$
$<x^2> - \mu^2 = \sigma^2$
$<x^2> = \mu^2 + \sigma^2$

Подставляем соответствующие значения в формулу для *U*:

$$U \approx \frac{\mu}{B} - \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2B^2}$$

Порог *c*, который мы ищем, предполагает, что функции полезности для каждой игры равны. Для всех значений больше *c* мы будем выбирать игру 1, для всех значений меньше *c* – игру 2.

$$\frac{\mu_1}{c} - \frac{\mu_1^2 + \sigma_1^2}{2c^2} = \frac{\mu_2}{c} - \frac{\mu_2^2 + \sigma_2^2}{2c^2}$$

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sigma_1^2 = 2c\mu_2 - \mu_2^2 - \sigma_2^2$$
$$2c(\mu_1 - \mu_2) = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$
$$2c = \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/(\mu_1 - \mu_2)$$

Поскольку в покере μ_1 и μ_2 обычно оказываются гораздо меньше значений дисперсии, мы можем сократить эту формулу до следующего вида:

$$c \approx \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2(\mu_1 - \mu_2)} \qquad \textbf{(24.1)}$$

Теперь давайте рассмотрим менее абстрактный пример.

Пример 24.2

Скажем, у нас есть выбор из двух игр: $20-40, где наш винрейт составляет $35/час а стандартное отклонение $400/час, и $40-80 с винрейтом $60/час и стандартным отклонением $800/час.

В таком случае, мы можем посчитать порог *c*:

$$2c = 60 + 35 + (800^2 - 400^2)/(60 - 35)$$
$$c = \$19{,}295$$

Это значит, что с точки зрения теории полезности с банкроллом больше $19,295 нам следует всегда выбирать дорогую игру.

Такая модель позволяет численно сравнивать разные варианты для игры и при этом учитывать возможный риск. Правда, формулы, выведенные выше, перестают работать при использовании таких распределений, где результаты сессий сравнимы по размеру с нашим банкроллом (в таком случае выбрасывать члены из разложения в ряд Тейлора ни в коем случае нельзя). Это обычно случается в крупных турнирах, где выплата за первое место может достигать 500 бай-инов. Но для кэш-игр рассмотренный метод почти всегда будет давать адекватные предсказания.

Нужно запомнить

………………………………………………………………………………………………..

- Мы редко можем использовать одно лишь математическое ожидание для выбора игры. Лучше всего для таких целей подходит теория полезности.

………………………………………………………………………………………………..

- Одна из наиболее известных функций полезности, которая применяется и в финансах, называется критерием Келли или $U(x) = \ln x$.

………………………………………………………………………………………………..

- Используя критерий Келли для сравнения двух разных игр, мы можем найти конкретные значения функции полезности для каждой из них, а затем вывести размер банкролла, который позволил бы нам сесть за более дорогой стол.

………………………………………………………………………………………………..

Глава 25

Инвестпокер: Портфельная теория и бэкинг

Сфера применения финансовой математики в покере далеко не ограничивается критерием Келли – в этой главе мы рассмотрим две теории, которые наверняка пригодятся самому широкому кругу игроков.

Первая касается оценки дисперсии и математического ожидания виртуального портфеля покерных игр и проектов. Как и в трейдинге, какие-то виды диверсификации окажутся хорошими, какие-то нет. В рамках обсуждения второй теории мы поговорим о бэкинговых соглашениях и их математической составляющей.

Теория портфельных инвестиций

Одним из главных показателей в портфельной теории является ***коэффициент Шарпа*** – он считается как отношение математического ожидания к стандартному отклонению. При условии бесконечной масштабируемости инвестиций (рынок акций для большинства инвесторов вполне подходит под этот критерий) максимизация этого коэффициента дает наилучшее соотношение риска и доходности.

$$S = \frac{\mu}{\sigma} \qquad \textbf{(25.1)}$$

Пожалуй, основным способом максимизации коэффициента Шарпа является диверсификация: покупка нескольких акций, которые в своей совокупности имеют более высокий коэффициент, чем если бы мы владели только одной из них. Ниже мы приведем пару примитивных примеров, чтобы познакомить наименее искушенных читателей с этой теорией. Люди, изучавшие портфельный анализ, наверняка заметят, что мы обходим стороной многие важные детали, однако в этом нет ничего страшного – мы постарались убрать из наших рассуждений все, что не находит применения в покере.

Представьте два независимых инвестиционных предложения A и B. У обоих ожидание по \$10 и стандартное отклонение в \$100 (на вложенные нами деньги). Иными словами, если мы поддержим проект A, то в среднем получим \$10 с отклонениями по \$100 в каждую сторону. То же самое верно и для B. Однако, если мы вложим половину наших денег в A и половину в B, то наше суммарное ожидание все еще будет равно \$10, в то время как стандартное отклонение снизится до $\$100/\sqrt{2}$, или \$70. Получается, что мы увеличили коэффициент Шарпа с 0.1 до 0.14.

Теперь посмотрим на другой портфель, пусть он состоит из инвестиций А и С с ожиданием $5 и стандартным отклонением $100. Очевидно, что С гораздо хуже А по абсолютным показателям, так что для максимизации коэффициента Шарпа, казалось бы, нам стоит всегда вкладывать свои деньги только в А? На самом деле нет.

Скажем, мы инвестировали 80% в А и 20% в С. Получим следующее ожидание на вложенные деньги: (0.8) ($10) + (0.2) ($5) или $9. Стандартное отклонение в таком случае составит $\sqrt{((80)^2+(20)^2)}$ = $82.46. Значит, коэффициент Шарпа будет равен 0.1091, то есть выше, чем для портфеля, состоящего исключительно из А. Наилучший портфель должен быть составлен из двух вариантов, хотя С и является доминируемой инвестицией.

С тем же успехом мы можем применить эту теорию в покере. Представьте себе, что два игрока решают снизить свою дисперсию и обменяться долями в разных турнирах. Игрок А имеет ожидание 1 бай-ин со стандартным отклонением в 9 бай-инов. Игрок В в среднем также выигрывает 1 бай-ин за турнир, однако его сигма выше – 12 бай-инов. Если игрок А хочет максимизировать свой коэффициент Шарпа, какой долей от своего экшена ему следует обменяться с игроком В?

Пусть (1- α) – процент от экшена, которым игроки обменяются. Тогда игрок А создает портфель P, в котором доля А составляет α, а доля В – (1 - α). Винрейт такого портфеля будет равен 1 бай-ину, поскольку все его составляющие имеют один и тот же винрейт.

Таким образом, нашей целью будет минимизация стандартного отклонения, а сделать мы это можем найдя минимальное значение дисперсии:

$$\sigma P^2 = (9\alpha)^2 + ((1 - \alpha)12)^2)$$

Возьмем производную по α и приравняем все выражение к нулю:

$$0 = 162\alpha - 288(1 - \alpha)$$
$$0 = 450\alpha - 288$$
$$\alpha = 0.64$$

Игроку А стоит обменять 36% своего экшена, чтобы максимизировать коэффициент Шарпа.

Мы можем вывести более общую формулу для таких случаев. Пусть у нас есть выбор из двух потенциальных инвестиций с ожиданием w_1 и w_2, и сигмами σ_1 и σ_2. Мы можем нормировать их стандартное отклонение просто умножив σ_1 на w_2/w_1 – получившуюся величину назовем s_1. Теперь обе инвестиции будут иметь одинаковый винрейт w_2, и мы можем составить из них портфель (в долях α_1 и α_2 соответственно) по принципу, что мы использовали выше.

$\alpha_1 = 1 - \alpha_2$

Дисперсия портфеля P в таком случае составит:

$\sigma P^2 = (\alpha_1^2)(s_1^2) + (\alpha_2^2)(\sigma_2^2)$

Это уравнение подходит для определения дисперсии только в случае с независимыми инвестициями (то есть корреляция которых равна нулю). Однако этот аспект имеет значение по большей мере на рынке акций, в то время как в покере даже если пара игроков регистрируется в один крупный турнир, корреляция их ожиданий в любом случае оказывается ничтожной.

Поскольку $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, получим:

$\sigma P^2 = (\alpha_1^2)(s_1^2) + (1 - \alpha_1)^2(\sigma_2^2)$

Возьмем производную по α_1:

$0 = 2\ \alpha_1 s_1^2 - 2(1 - \alpha_1)^2(\sigma_2^2)$
$2\sigma_2^2 = 2\ \alpha_1 s_1^2 + 2\ \alpha_1 \sigma_2^2$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + s_1^2} \qquad \textbf{(25.2)}$$

Мы также без труда можем найти α_2:

$$\alpha_2 = \frac{s_1^2}{\sigma_2^2 + s_1^2} \qquad \textbf{(25.3)}$$

Чтобы максимизировать коэффициент Шарпа нам необходимо составить портфель именно в таких пропорциях. В финансовой математике этот подход экстраполируется на произвольное количество инвестиций. Покерным же игрокам, как правило, не нужно строить настолько сложные модели, чтобы понять, каким образом они могут уменьшить дисперсию своих результатов. И как мы уже показали выше, даже игрокам с более высоким ожиданием часто стоит меняться долями.

Те читатели, которые раньше сталкивались с подобными финансовыми расчетами, наверняка уже задумались: а нельзя ли применить в покере и другие виды диверсификации? Например, стоит ли играть в различные разновидности покера (SNG, MTT, Лимитный покер и т.п.)? На наш взгляд, да, это того стоит. Ведь в таком случае у вас появляется дополнительное место для маневра, потенциально вы даже сможете чаще оказываться за хорошими столами, а также использовать знания и приемы, почерпнутые из новых форм покера (скажем, понимание важности блокеров в Омахе иногда может пригодиться и в Холдеме). Однако ни одна из этих причин не имеет ничего общего с вашим «портфелем», более того, это нельзя назвать диверсификацией.

Когда мы покупаем акцию, мы вкладываем в нее 100% наших денег и владеем ею столько, сколько захотим. Когда мы покупаем две акции, мы также можем их держать сколь угодно долго, но вкладываем в каждую лишь 50% всех средств. В то же время, если мы решаем играть в две разные формы покера, это равносильно покупке акции на короткий промежуток времени – затем мы ее продаем и покупаем другую. Поэтому такая «диверсификация» не уменьшает вашу дисперсию.

С другой стороны, играя на нескольких столах одновременно (скажем, за двумя с блайндами $10-$20 вместо одного $20-$40), вы вполне можете получить фиксированный винрейт при меньшем стандартном отклонении.

Бэкинг

Последняя тема, которую мы рассмотрим в четвертой части нашей книги, затрагивает математическую сторону бэкинга.

Бэкинг – неотделимая часть покера, поскольку имеющийся банкролл не всегда удовлетворяет желание некоторых людей играть на более высоких лимитах. В таком случае заключается соглашение следующего вида: игрок получает некую сумму денег (обычно небольшую, на одну-две сессии за раз) от бэкера и при этом обязуется садиться за строго определенные столы, а также регулярно отдавать часть своей прибыли. Все убытки, как правило, относятся на счет бэкера, однако если игрок хочет продолжать сотрудничество, то ему придется отыграть весь «минус» перед тем, как он снова сможет получать долю в выигрыше.

Для начала, давайте рассмотрим несложное бэкинговое соглашение:

- Игрок обладает известным винрейтом $40/час и стандартным отклонением $600/час, но у него нет банкролла;
- Бэкер соглашается предоставить все необходимые деньги на 100 часов игры. Все выигрыши они поделят поровну, а любой убыток бэкер покроет за свой счет;
- Игрок обещает, что будет стараться максимизировать совместное ожидание.

На протяжении последних двух глав мы то и дело использовали идеи и формулы из мира финансов. Тема бэкинга не станет исключением. Мы будем рассматривать описанное выше соглашение в следующем ключе: «Результат игры от бэкера мы выберем случайным образом из некоторого предварительно заданного распределения. Если значение ниже нуля – игрок не получает ничего.

Если выше – игрок получает ровно половину».

Фактически, такое определение эквивалентно ***опциону***. В биржевой торговле опционом называется контракт, который дает покупателю право, но не обязанность купить (или продать) некий товар по заранее оговоренной цене в определенный момент времени в будущем. Наш игрок получает так называемый опцион на покупку (или «опцион-колл») со страйком (то есть ценой исполнения) в нуле.

Это все данные, которые нам нужны, чтобы найти ожидание от такого соглашения для игрока. Распределение исходов для всех 100 часов игры будет нормальным, с ожиданием в точке \$4,000 и стандартным отклонением в \$6,000. Ожидание игрока зависит исключительно от результата его игры и будет меняться только в случае выигрыша. Чтобы его найти, мы можем проинтегрировать произведение результата (*x*) и функции плотности вероятности для нормального распределения от 0 до ∞.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \textbf{(25.4)}$$

Произведем замену следующего вида: *x = (x + w) – w*, получим:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}[(x-w)e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}} + we^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}}dx]$$

Мы можем разделить такое выражение на два интеграла. Во втором нам следует вынести *w* из-под знака интеграла, тогда оставшееся выражение есть ни что иное как функция распределения:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(x-w)e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}}dx + w\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \qquad \textbf{(25.5)}$$

Чтобы найти первообразную для выражения $(x-w)e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}}$, введем замену: $u = \frac{-(x-w)^2}{2}$, du = -*(x - w)*. Получим:

$$\int -e^{\frac{u}{\sigma^2}} du = -\sigma^2 e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}} + C$$

Упростим уравнение 25.5:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(x-w)e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}}dx + w\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \sigma^2 e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}}]_0^\infty$$

$$< \text{Выигрыш} > = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2\sigma^2}} + w\Phi(\frac{w}{\sigma}) \qquad \textbf{(25.6)}$$

Уравнение 25.6 – и есть денежная оценка опциона, то есть ожидание для игрока, если бы он получал 100% от выигрыша и не возмещал убытки. Очевидно, что для того, чтобы свести эту формулу к заданному бэкинговому соглашению, нам следует умножить ее на долю игрока в прибыли.

Мы можем найти ожидание каждой из сторон сделки.

w = 4000
σ = 6000
z = $({}^{4000}/{}_{6000}) = {}^{2}/{}_{3}$
$(6000/\sqrt{2\pi})(e^{-0.22222}) + (4000)\ (\Phi({}^{2}/{}_{3})) = \$4,906.72$

Поскольку мы знаем, что общее ожидание игрока должно составлять $4,000 (если бы он забирал всю прибыль), то возможные убытки равны -$906.72.

Значит, если ожидание игрока складывается только из половины выигрышей, то по такому бэкинговому соглашению он может получить $2,453.36, в то время как бэкеру придется покрывать вероятные убытки из своей доли, и его ожидание составит $1,547.64.

Примечание от переводчика: Расчеты бэкера и игрока ведутся на основании выигранных игроком денег. Ожидаемый выигрыш за 100 часов составляет $4,000, а это значит, что в среднем сумма выплат бэкеру и игроку должна сводиться именно к этому числу. Однако бэкер вынужден покрывать вероятные убытки из своей доли. Мы можем их найти, вычтя ожидание за 100 часов из оценки опциона. Полученное число будет представлять дополнительную выгоду для игрока (поскольку он не возмещает проигранные деньги), и, в то же время, потенциальный проигрыш бэкера по ожиданию от такой сделки.

Подобная модель может быть использована для оценки любого бэкингового соглашения схожего типа. Однако мы можем пойти еще дальше и модифицировать уравнение 25.6 для случаев, когда игрок начинает получать долю от прибыли только после некоего порога α (для этого нужно взять интеграл от α до ∞).

Тогда получим:

$$< \text{Выигрыш} >= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(w-a)^2}{2\sigma^2}} + w\Phi(\frac{w-a}{\sigma}) \qquad \textbf{(25.7)}$$

Скажем, условия соглашения остаются неизменными за одним лишь исключением: игрок получает 50% от прибыли только после выигрыша $1,000.

$(6000/\sqrt{2\pi})(e^{-.125}) + (4000)\ (\Phi(^1/_2)) = \$4,878.24$

Очевидно, что в таком случае доля бэкера возрастает, ведь ему больше не придется делиться прибылью с игроком на отрезке от $0 до $1,000.

Изменение значения порога α влечет за собой и изменения в условиях бэкинга. Представьте себе, что игрок предлагает следующее:

> *Вместо половины от всех выигрышей, я буду получать долю, только когда мой общий выигрыш превысит ожидаемый (о котором мы договоримся). Однако за это я должен буду получать больший процент.*

Дельное предложение. Но какой процент от прибыли игрок должен попросить в таком случае?

Порог α здесь равен $4,000:

$(6000/\sqrt{2\pi})(e^0) + (4000)\ (\Phi(0)) = 4,393.65$

Как вы можете помнить, при простом разделении прибыли 50/50, игрок получал бы $2,453.36. Однако если он хочет получать долю только если его общий выигрыш превысит ожидаемый, ему стоит требовать как минимум 55.8%.

Другим типом бэкингового соглашения может быть «лесенка», которая предполагает динамичную структуру расчетов:

- Игрок имеет винрейт $20/час и стандартное отклонение $240/час.
- Бэкер и игрок договариваются о сделке на 100 часов. Бэкер предоставляет всю необходимую сумму и покрывает все убытки. Прибыль же будет разделяться в соответствии со следующей таблицей:

Общая прибыль	Доля бэкера	Доля игрока
0 - $1000	75%	25%
$1000 - $2000	60%	40%
$2000 - $3000	50%	50%
$3000 - $4000	40%	60%
$4000 - $6000	30%	70%
$6000+	25%	75%

То есть, если игрок заработал $1,500, он получит 25% от $1,000 и 40% от оставшихся денег (в сумме $450).

Воспользуемся уравнением 25.7, чтобы посчитать ожидание каждой стороны от подобного соглашения:

w = $2,000
σ = $2,400

Ожидание от первой ступени сделки ($0-$1,000) равно ожиданию от опциона с порогом в 0 минус ожидание от опциона с порогом в 1000:

$$(2400/\sqrt{2\pi})(e^{-.34722}) + (2000)(Z(5/6)) = \$2{,}271.93$$
$$(2400/\sqrt{2\pi})(e^{-.08681}) + (2000)\ (Z(5/12)) = \$2{,}200.93$$

Разница между ними составляет $71 – это и будет ожиданием первой ступени. Мы можем продать то же самое для каждого случая:

Общая прибыль	Доля бэкера	Доля игрока	Ожидание	Ожидание игрока
$0 - $1000	75%	25%	$71.00	$17.75
$1000 - $2000	60%	40%	$243.47	$97.39
$2000 - $3000	50%	50%	$402.69	$201.34
$3000 - $4000	40%	60%	$473.53	$284.12
$4000 - $6000	30%	70%	$746.02	$522.84
$60000+	25%	75%	$334.33	$250.74
Итого			**$2,271.93**	**$1,374.19**

Последний пример может послужить отправной точной для решения, по крайней мере, одной из двух основных проблем бэкинга в целом. Первая из них состоит в несоответствии интересов игрока и интересов бэкера.

Чем ближе срок окончания бэкингового соглашения и чем дальше игрок находится от порога выплат, тем больше у него соблазн ввязываться в дисперсионные раздачи. В качестве крайнего, но иллюстративного примера можно привести следующую ситуацию: последняя рука в рамках соглашения, игрок в минусе на $2,000. Ему сдают QQ, и он замечает, что у его соседа по столу AA. Он может выставиться на префлопе на $3,000, однако, очевидно, это просто ужасный сценарий развития событий для бэкера (и при обычных обстоятельствах – для игрока тоже). В то же время, в этом конкретном случае, ожидание игрока составляет 18% от его доли в $1,000, с которой он может закончить игру, а ожидание от фолда – ноль. Получается, что его интересы разительно отличаются от интересов бэкера.

Одним из способов разрешения такого противоречия является зарплата, которая выплачивается игроку вне зависимости от его результатов (при этом причитающаяся ему доля от выигрышей уменьшается). У такого подхода есть и недостаток: имея постоянный источник дохода, игрок может расслабиться и, как следствие, начать показывать весьма посредственный покер.

Вторая проблема заключается в ***справедливом вознаграждении для обеих сторон***. И игрок и бэкер хотят заработать, так что, в идеальном случае, бэкинговое соглашение должно вознаграждать всех участников. Но как можно «честно» разделить выигрыши? Здесь стоит руководствоваться несколькими основными принципами:

- *Премия за риск для бэкера*
  Бэкер берет на себя обязательство покрыть все возможные проигрыши, поэтому он обязан получить за это вознаграждение в виде более высокого процента.

- *Игроку не всегда требуется бэкинг*
  Зачастую люди, которые ввязываются в такие сделки, могли бы без проблем выигрывать на низких лимитах с чуть меньшим винрейтом. И с точки зрения игрока, бэкинговое соглашение должно отражать плату за эту упущенную возможность и потраченное время (поскольку бэкер только дает деньги, но не сидит за столами целый день). Значит, игрок также может потребовать премию за «работу» на бэкера.

- *Неопределенность винрейта*
  При составлении бэкингового соглашения стороны часто используют (явно или нет) некоторые предположения о винрейте и стандартном отклонении. Однако если истинный винрейт игрока оказывается ***ниже*** оговоренного, ожидание от бэкингового «опциона» для него существенно возрастает. Например, бэкер и игрок договорились о 100 часах при винрейте w = \$20 и отклонении σ = \$200. Реальный же винрейт оказывается на уровне w = \$15 при σ = \$200. Ожидание от опциона при таком винрейте получается ниже (на 19%), и игрок получает значительно больше денег, чем ему в действительности причитается.

Важно понимать, что в этой главе мы даже не затронули такие темы как риск мошенничества, когда игрок пропадает с деньгами или сообщает бэкеру недостоверные результаты. Еще одной особенностью бэкинга является тот факт, что выигрывающим игрокам не требуется постоянных денежных вливаний, поэтому основной аудиторией в этом деле являются нулевые или не очень сильные игроки, с которыми нужно заключать долгосрочные соглашения, чтобы остаться в плюсе.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- Покерный банколл имеет несколько общих черт с портфелем ценных бумаг, поэтому определенные элементы портфельной теории инвестиций находят применение и в покере.

…………………………………………………………………………………………………..

- Коэффициент Шарпа позволяет выбрать инвестиции с наилучшим соотношением ожидаемого дохода и риска.

…………………………………………………………………………………………………..

- Даже сильным игрокам часто стоит меняться долями, поскольку таким образом они максимизируют свой коэффициент Шарпа и снижают дисперсию.

…………………………………………………………………………………………………..

- Бэкинговые соглашения очень похожи на опционы и могут быть оценены с помощью идентичных моделей.

…………………………………………………………………………………………………..

Глава 26

Удваиваемся: Турниры, часть 1

Самой быстро развивающейся областью покера в последние несколько лет были, несомненно, турниры. Количество их форм и видов уже не поддается исчислению – чемпионом может стать кто угодно, хоть за 1$, хоть за $10,000. Однако с точки зрения теории, все турниры объединяют два основных принципа:

Турнирные фишки нельзя докупать – потеря стэка равносильна вылету из турнира.

Эта особенность подразумевает определенные подстройки, нехарактерные для тех же кэш-игр. Так, чем выше ваш уровень игры, тем реже вам стоит ввязываться в пограничные раздачи, тем самым сохраняя свой стэк до более прибыльных ситуаций.

Правда, некоторые игроки принимают этот совет слишком близко к сердцу. Нельзя полностью отказываться от агрессии, если вы действительно хотите иметь «преимущество над полем», а не раздать свое ожидание всему столу в череде «незначительных» раздач. В конце концов, блайнды не будут вас ждать вечно, а чем короче стэки, тем сложнее получить существенный перевес над оппонентами.

Тем не менее, свое преимущество учитывать необходимо, и в этой главе мы постараемся разобраться в том, как его можно оценить.

Интересно, что слабые игроки должны действовать в ровно противоположном ключе – имея отрицательное ожидание от турнира, они обязаны идти на риск каждый раз, когда предоставляется такая возможность. Только так они смогут «раскачать» дисперсию и занять высокое место.

Призовой фонд выплачивается в соответствии с заранее оговоренной структурой, и порядок мест определяется не количеством имеющихся у игроков фишек, а очередностью вылетов из турнира.

В кэш-играх максимизация математического ожидания тождественна максимизации ожиданию по фишкам, так как в них каждая фишка связана с неким долларовым номиналом. В турнирах, особенно на поздних стадиях, это правило не работает.

Мы не станем отрицать, что существует сильная корреляция между размером стэка и причитающимися призовыми, однако в турнирах следует различать ***ожидание по фишкам*** (какая часть от всех фишек в турнире окажется у вас на руках) и ***ожидание по призам*** (сколько эти фишки стоят сейчас).

Давайте рассмотрим простой пример. Турнир по Лимитному Холдему на 200 человек. Явных фаворитов среди участников нет. В игре остается 19 человек, руки сдаются одновременно на всех столах до первого вылета. За 10-18 места платят по $250, за первое место - $6.000, а общий призовой фонд составляет $20.000. Всего в турнире 300.000 фишек, блайнды 300-600.

За одним столом оказались три игрока с очень короткими стэками. У игрока А остается всего 100 фишек и у него же баттон. У игрока В, в свою очередь, 400 фишек, он в позиции UTG. У игрока С – 500 фишек, его позиция UTG+1.

В самом начале турнира фишки всех игроков стоили бы одинаковое количество денег – по соответствующим долям в призовом фонде. Например, стэк игрока А оценивался бы в $^1/_{3000}$ от призового фонда в $20.000, или $6.67. Но в рассматриваемой нами ситуации его 100 фишек оказываются гораздо более дорогим активом. Что если он скинет свою руку на баттоне? Тогда в следующей раздаче оба его оппонента в позициях UTG окажутся на блайндах, и будут вынуждены поставить олл-ин. Пусть у каждого из них есть 40% шанс на победу в сравнении, тогда с вероятность 84% игрок А попадет в призы.

Так что даже если мы абстрагируемся от возможности выиграть турнир, 100 фишек на баттоне в этом случае стоят как минимум $210 – гораздо больше, чем $6.67 в начале турнира! Структура выплат сама по себе сделала их более ценными.

И хотя может показаться, что такая ситуация достаточно экстремальна, подобные вещи случаются практически в каждом турнире. Сохранение своего места за столом всегда стоит какой-то части призового фонда. Особенно хорошо это проявляется в случае с короткими стэками, чьи места на баббле стоят дороже, чем их фишки. Кроме того, на каждой ступеньке призовой структуры игроки с небольшим количеством фишек получают дополнительный стимул играть более тайтово, чтобы заработать больше денег.

Однако этот принцип работает только до определенного момента. Дело в том, что некоторые авторы ошибочно считают такую стратегию единственно верной и распространяют ее также и на ситуации, возникающие в самом начале турнира. Аргументируют они это тем, что сильным игрокам следует стараться выжить любой ценой, в надежде попасть в призы и возможно дойти до первого места.

На наш взгляд, такой подход сжигает турнирное ожидание любого игрока, поскольку ожидание по фишкам и ожидание в турнире не сильно разнятся в самом начале игры. Более того, при высоких блайндах практически невозможно выставиться далеко впереди и компенсировать потерю в ожидании по фишкам из-за слабой и легко эксплуатируемой стратегии в начале турнира. Также из-за распространенной плоской структуры призовых, где 20-25% денег выплачиваются победителю, большая часть фонда сосредотачивается на первых трех местах, и количество фишек у вас на руках зачастую и говорит о ваших шансах на попадание в эту зону.

Поэтому мы предлагаем придерживаться стратегии, которая учитывает влияние структуры призовых, а также подстройки, вызванные необходимостью оставаться в игре на средней и поздней стадиях. Важно понимать, что последнее – вынужденная мера только когда у вас есть реальное преимущество над полем. Причем чем дальше от денег, тем реже вы должны избегать пограничных ситуаций. С эксплуатационной точки зрения, вам следует искать оппонентов, которые не понимают перечисленные выше правила, особенно во время баббла. Такая стратегия приведет к большему количеству вылетов прямо перед деньгами, но это будет с лихвой компенсироваться более высокими призовыми местами.

В первой модели, которую мы рассмотрим ниже, нашей целью будет численная оценка влияния мастерства игрока на его желание ввязываться в пограничные ситуации на ранней стадии турнира.

Теория Даббл-апа

Многие люди склонны пропускать даже очень прибыльные ситуации в начале турнира, аргументирую это (почти всегда ошибочно) тем, что позднее им еще не раз удастся забрать гору фишек у своих оппонентов. Правда, в таком случае их преимущество над полем было бы поистине колоссальным, ведь чем дольше идет турнир, тем короче стэки, и тем менее выражено преимущество одной руки над другой.

Поэтому ниже мы постараемся описать зависимость между скиллом игрока и необходимостью отказываться от пограничных ситуаций в начале турнира. Причем нам бы хотелось найти некое численное значение, поскольку так мы сможем определять математическое ожидание от конкретных решений.

Начнем с определения ценности турнирных стэков. Модель, которую мы выведем ниже, может быть использована только в начале или середине турнира, так как предполагает отдаленность призовых мест и относительно глубокие стэки.

Давайте рассмотрим турнир, где за победу дается 100% призового фонда. В таком случае, ожидание игрока по призам прямо пропорционально размеру его стэка. Здесь стоит сделать важное замечание: *Вероятность удвоиться мы будем считать константой на протяжении всего турнира*.

Вообще на вероятность даббл-апа влияют несколько факторов. Первый – естественный отбор. Сильные игроки чаще доходят до поздних стадий турнира. Это значит, что чем дольше идет игра, тем сильнее будет ставиться поле (в среднем). А это уменьшает шансы каждого из оставшихся участников удвоиться.

Второй – рост блайндов, который постепенно сокращает шансы всех игроков на даббл-ап до 50%. Это происходит из-за сокращающегося количества раздач, где результат зависит исключительно от мастерства. В то же время на ранней стадии турнира более опытные игроки всегда найдут множество прибыльных ситуаций.

Но ни один из этих факторов не оказывает решающего влияния, так что мы вполне можем ограничиться предположением, что шансы удвоиться на протяжении турнира в целом не сильно меняются – это существенно упростит наши расчеты.

Теперь мы можем создать модель турнира, где победитель забирает все деньги. Пусть в нем участвует X одинаковых игроков, каждый из которых получает одно и то же количество фишек. Пусть E – его шанс выиграть турнир для конкретного игрока, C (константа) – шанс удвоиться, а N – количество раз, которое он должен удвоиться, чтобы выиграть.

Получаем следующее уравнение.

$$E = C^N \qquad \textbf{(26.1)}$$

Например, если в турнир зарегистрировались 128 игроков, нам нужно удвоиться 7 раз: 1-2-4-8-16-32-64-128. Поскольку каждое из этих удвоений можно с определенными оговорками считать независимым, то шанс выиграть турнир составляет C^7.

С помощью этой формулы мы всегда посчитаем значение неизвестного параметра, если знаем два других. Поскольку все игроки в нашем турнире (X) обладают одинаковым уровнем мастерства, то шансы на победу у них также ничем не отличаются: $E = 1/X$. Еще мы знаем, что после N удвоений рассматриваемый игрок займет первое место:

$$X=2^N$$

Тогда для хэдс-ап турнира N равно 1 ($X = 2$), а для турнира с 128 участниками N равно 7. Это можно написать и в более общем виде:

$$N = \log_2 X$$

Произведем замены в первоначальном уравнении:

$$1/X = C^{\log 2X}$$
$$\log_2 1/X = (\log_2 X) \log_2 C$$
$$\log_2 C = -1$$
$$C = 0.5$$

Такой ответ вполне ожидаем для турнира, где все призовые отходят первому месту, а игроки имеют равные шансы на победу. Это также значит, что ценность фишек в нашем примере выражается абсолютно линейной функцией.

Мы можем использовать уравнение 26.1 и в случаях, когда участники не равны по своим навыкам. Например, пусть некий игрок А участвует в турнире на 100 человек и имеет ожидание в 1 бай-ин (2 бай-ина с учетом уже внесенного). Рассчитаем *C*:

$$E = C^N$$
$$2/_{100} = C^{\log_2 100}$$
$$0.02 = C^{6.643856}$$
$$C = 0.5550$$

Получается, что шансы игрока А удвоить свой текущий стэк до вылета из турнира составляют 55.5%. Теперь мы можем посчитать вероятность его победы для произвольного стэка *S* (выраженного через число стартовых стэков), подставляя соответствующие значения в формулу $E = C^N$. В таком случае *N* конечно же будет числом даббл-апов до 100.

При стэке в 2 начальных, шанс игрока А выиграть турнир составляет $E = C^{\log_2 50}$, или 0.0360. Заметим, что это значение немного больше, чем априорная ценность фишек (которая в нашем случае равна 0.02), но меньше, чем удвоенная вероятность выиграть турнир с самого начала.

Фактически, эта модель позволяет нам оценить премиальное ожидание в турнире с учетом ***мастерства игрока, принимающего решение***. Иными словами, высказывание вида: «У меня преимущество над полем, мне надо поберечь фишки» – выливается в скорректированную вероятность победы для любого размера стэка, при условии, что соблюдаются обозначенные выше условия. Давайте посмотрим, как такая модель помогает нам увязать ожидание по фишкам и ожидание по призам.

В турнире 250 участников, стартовые стэки по 1500, блайнды 75-150. Игрок В со стэком 3000 делает рейз на баттоне до 450 с QsTs. Малый блайнд скидывает, игрок на большом блайнде делает колл. На флоп выходят Ks 8c 2s, блайнд делает чек. Префлоп рейзер ставит 500 и тут же получает олл-ин на весь свой стэк. Игрок В считает, что его эквити составляет 36%, а колл стоит 2050 фишек.

Если бы мы смотрели на эту ситуацию исключительно с позиции ожидания по фишкам, ответ был бы вполне очевидным: (0.36) (6075) - 2050 = 137 фишек. Легкий колл, ведь в среднем мы выиграем почти десятую часть бай-ина! Но давайте представим, что у игрока В имеется преимущество над полем в $3/_4$ бай-ина в начале турнира. Тогда константа *C* для него примет значение:

$$^{1.75}/_{250} = C^{\log_2 250}$$
$$C = 0.5364$$

Теперь мы можем рассчитать турнирное ожидание (E) для каждого из трех сценариев:

Если игрок B делает колл и выигрывает, у него будет 6075 фишек, или 4.05 стартовых стэка.

$$E = 0.5364^{\log_2 (250/4.05)} = 0.024603 \text{ бай-ина}$$

Если игрок B делает колл и проигрывает, его ожидание в турнире будет равно 0.

Если игрок B делает фолд, у него останется 2050 фишек или 1.36667 стартовых стэка.

$$E= 0.5364^{\log_2 (250/1.36667)} = 0.009269 \text{ бай-ина}$$

Тогда мы можем сказать, что ожидание игрока B от сравнения составляет (0.024603)(0.36), или 0.008857 бай-ина. Получается, что колл на самом деле является неверным решением, с учетом преимущества нашего подопечного.

Еще один вывод, который можно сделать из теории даббл-апа, касается проблемы коинфлипа: какой шанс на победу оправдает выставление 50/50 на все фишки в самой первой раздаче? Поскольку $E_0 = C^N$ в начале турнира, если вы делаете колл и удваиваетесь, ваше ожидание становится равным $E_1 = C^{N-1}$. Если вы принимаете флип с шансом на победу W, ваше ожидание превращается в WE_1 (поскольку в (1-W) случаев вы вылетите из турнира с ожиданием 0). Если же вы откажетесь, то останетесь с E_0. Приравняв эти два выражения, получим:

$$C^N = WC^{N-1}, \text{ или } W = C.$$

Таким образом, если ваш шанс победу в коинфлипе равен C, вам нет разницы, что делать (колл или фолд). Но постарайтесь вспомнить, сколько игроков вам говорили, что не хотели бы выставляться с QQ против AK (57/43) в начале турнира. Давайте посчитаем их предполагаемое ожидание в турнире на 250 человек:

$$E = C^N = (0.57)^8 = 0.01114$$

…или около 2.78 бай-ина за турнир (умножаем полученную цифру на 250). Иными словами, чтобы отказаться от такой монетки, вам нужно иметь ожидание почти в три раза больше среднего. Такой винрейт почти наверняка поставил бы вас в один ряд с лучшими игроками в мире!

Еще одним следствием рассмотренной модели является расчет ожидания для минусовых игроков. Мы искренне надеемся, все наши читатели имеют строго положительный винрейт, однако чтобы покерные турниры оставались прибыльными, кто-то должен проигрывать. По теории Даббл-апа, минусовым игрокам стоит играть на весь стэк даже в пограничных и убыточных ситуациях – удивительно, но наиболее дисперсионная стратегия является их единственным шансом выиграть турнир. Если же они будут сидеть и ждать руки, более опытные оппоненты без труда заберут у них все фишки.

Также стоит отметить несколько интересных выводов касательно мультивей банков. Вы не удивитесь, если мы скажем, что игрок, заходящий в олл-ин третьим, часто имеет очень сильную руку. Но вот что интересно: это правило становится еще более императивным с учетом структуры выплат. Представьте себе следующую ситуацию: два игрока ушли в олл-ин на флопе в большом банке, а мы должны решить, стоит ли делать оверколл или нет. В кэш-игре для нулевого колла нам бы потребовалась рука с 25% эквити. В турнире же все иначе: если мы выиграем, наши фишки будут стоить в четыре раза дороже, чем в случае фолда, ведь мы выбьем сразу двух оппонентов и уменьшим количество требуемых удвоений. Поэтому если наш изначальный шанс на даббл-ап был равен, скажем, 55%, нам нужно как минимум 30.25% эквити, чтобы сделать этот колл нулевым по турнирному ожиданию.

Теперь давайте представим основную формулу этой модели в несколько ином виде. Изначально она выглядела так:

$$E = C^N$$

Пусть у нас есть некий стэк размера S (рассчитанный как часть от всех фишек в игре). Тогда число требуемых удвоений составляет:

$$N = \log_2 (1/S) = -\log_2 S$$

$$E = C^{-\log_2 S}$$
$$\ln E = (-\log_2 S)(\ln C)$$
$$\ln E = (\ln S)(-\log_2 C)$$
$$\log_S E = -\log_2 C$$
$$E = S^{-\log_2 C}$$

Обозначим $-\log_2 C$ как β, тогда:

$$E = S^{\beta} \qquad \textbf{(26.2)}$$

Мы получили переформулированное уравнение 26.1 с той лишь разницей, что теперь оно зависит от размера стэка. Мы можем пойти еще дальше и включить в расчеты несколько других соображений, которые могут повлиять на оценку турнирного ожидания. Например, до этого момента мы не рассматривали влияние структуры призовых – самое время исправить этот недочет.

Представьте себе турнир на 256 игроков, где все деньги забирает победитель. Тогда ожидание одного игрока равно (256) (C^8), или вероятность даббл-апа 7 раз подряд, умноженная на количество выигранных бай-инов:

$$(256)(C^8) = (2C)^8$$

Более того, мы можем модифицировать изначальное уравнение $E = C^N$ для того, чтобы выразить ожидание в призовом фонде на X бай-инов:

$$E_X = XC^N$$
$$E = (2C)^N$$

(где N – число требуемых удвоений)

Теперь давайте рассмотрим другой турнир, где призовой фонд разделен между первым, и вторым местом (равными частями по 128 бай-инов). Тогда ожидание нашего игрока равно (128)(C^7), или $(2C)^7$, поскольку по достижению определенного порога, его выигрыш не изменится.

Как это значение соотносится с полученным ранее?

$$(2C)^8 > (2C)^7$$
$$C > \frac{1}{2}$$

Разделение призового фонда между двумя первыми местами уменьшает ожидание игрока, если его шанс удвоиться больше $\frac{1}{2}$. Если подумать, то это вполне очевидный вывод – вместо того, чтобы последним удвоением выиграть 256 бай-инов, здесь он может получить всего 128. Таким образом, его шанс выиграть последнее сравнение можно просто заменить на $\frac{1}{2}$, поскольку оно не имеет значения.

Это также показывает, что в турнирах, где призовой фонд распределяется между многими участниками, влияние навыка на ожидание падает, ведь победитель забирает лишь небольшую часть от всех денег. В примере выше рассматриваемый игрок имел ожидаемый выигрыш на *2C* меньше лишь из-за того, что появилось дополнительное призовое место. Согласно нашим оценкам из теории Даббл-апа, мультипликатор уровня игры здесь будет равен таковому для турнира с 128 игроками, а не с 256.

Мы называем это ***реальным полем турнира*** – фактически, мы даем численную оценку влиянию структуры выплат на возможность реализовать свое преимущество над остальными игроками. Можно легко показать, что для турнира на 256 игроков с двумя призовыми местами эта оценка почти совпадает с таковой для турнира на 128 игроков, где победитель забирает все деньги. Обозначать реальное поле мы будем через коэффициент *k,* причем по определению, его значение должно удовлетворять следующему уравнению (при заданном распределении призовых):

$$(2C)^{\log 2\, k} = E_N \qquad \textbf{(26.3)}$$

Где *C* – вероятность удвоиться, а E_N – количество бай-инов, которые игрок может выиграть при заданной структуре. Тогда *k* будет величиной поля эквивалентного турнира (для формулы даббл-апа) с выплатой только за первое место.

Естественно, сегодня сложно найти такой турнир, где бы все призовые распределялись между первым и вторым местом поровну. Давайте рассмотрим турнир, в котором выплата за первое место составляет *f* от всех денег, а за второе - (1 - *f*). Теперь формула ожидания игрока примет следующий вид:

(призовой фонд)[(первый приз)(p($1^{ый}$)) + (второй приз)(p($2^{ой}$))]
$(256)(f\,(C^8) + (1 - f)(C^7 - C^8)$
$(256)C^7\,(2fC + 1 - C - f)$

Мы знаем, что для рассматриваемого плюсового игрока *C* окажется немного выше, чем 0.5. Скажем, его C = 0.52. Для обозначения разницы между наблюдаемым *C* и 0.5 будем использовать символ δ.

$$\delta = C - 0.5$$

Скорректируем наше уравнение (если вы раскроете все скобки, то получите в точности такое же выражение, что и выше):

$$(256)\, C^7\, (\delta\, (2f - 1) + {}^1\!/_2)$$

Эта формула состоит из двух основных частей:

- $(256)\, C^7$ – шанс нашего игрока дойти до хэдс-апа, умноженный на размер призового фонда.
- $\delta\,(2f - 1)$ – дополнительное ожидание, которое он получает за счет своего мастерства.

Теперь мы можем найти реальный размер поля для такого турнира.

Пусть d равно $\log_2 k$, то есть количеству даббл-апов, необходимого для победы в турнире с *k* участниками и призовыми только за первое место.

Тогда существует некий турнир, для которого верно следующее:

$(2C)^d = E_N$

В данном случае E_N равно нашей оценке ожидания (формула выше):

$(2C)^d = (256)C^7\ (\delta\ (2f - 1) + {}^1/_2)$
$(2C)^{d-7} = 2\ (\delta\ (2f - 1) + {}^1/_2)$
$(d - 7)(\ln 2C) = \ln\ (2\ (\delta\ (2f - 1) + {}^1/_2))$
$(d - 7) = \ln\ (2\ (\delta\ (2f - 1) + {}^1/_2))/ \ln\ (2C)$
$d = \ln\ (2\ (\delta\ (2f - 1) + {}^1/_2))\ /\ \ln\ (2C) + 7$
$k = 2^d$

Пусть *f* равно 154/256, а *C* равно 0.52. Тогда

$$\mathrm{d} = \frac{\ln(2(0.02(2\left(\frac{154}{256} - 1\right) + 0.5)}{\ln 2\mathrm{C}} + 7 \approx 7.206$$

$k = 2^d = 147.68$

Получается, что реальное поле рассмотренного турнира примерно на сто игроков меньше. Это значение можно использовать в формуле даббл-апов, с условием, что *E* необходимо умножить на соответствующее количество бай-инов (*k*).

Например, чтобы найти ожидание игрока с *C* = 0.53, который выиграл свои первые 4 сравнения (то есть ему нужно удвоиться еще 4 раза, чтобы выиграть), нам следует использовать следующую формулу:

$kE = C^{\log_2 (k/S)}$
$(147.68)(E) = (0.53)^{\log_2 (147.68/16)}$
$E = 19.287$ бай-инов

В качестве проверки мы можем посчитать это значение напрямую:

Вероятность дойти до хэдс-апа: $0.53^3 = 0.14888$
Вероятность выиграть в хэдс-апе: 0.53
$(0.14888)[(0.53)(154) + (0.47)(102)] = 19.288$ бай-инов

К сожалению, реальные турниры не настолько элементарны – в них нет понятия прямого удвоения, а деньги выплачиваются не только за первые два места. Однако с помощью некоторых допущений о вероятности вылететь на определенном месте, мы можем обобщить наши расчеты и найти реальный размер поля (попутно определяя необходимость подстраивать стратегию в зависимости от своего скилла) для любой структуры выплат.

Предположение:

Вероятность того, что игрок закончит турнир на месте N равна вероятности удвоить стэк до 1/N от всех фишек в турнире, минус вероятность закончить турнир на более высоком месте.

Из этого следует, что вероятность некоего игрока выиграть весь турнир равна вероятности последовательных даббл-апов до момента, когда у него окажутся все фишки. Его шанс вылететь на втором месте тогда можно определить как последовательные даббл-апы до половины всех фишек, находящихся в игре, минус вероятность победы. Такая последовательность в сумме даст на единицу – и хотя в реальном турнире игроку не обязательно иметь 1/N всех фишек, чтобы добраться до N-ого места, такое допущение позволяет получать вполне адекватные оценки.

Теперь мы можем модифицировать уравнения из теории Даббл-апа и найти реальный размер поля для любого турнира.

Ожидание игрока (в бай-инах) можно выразить следующей формулой:

$$E_N = \sum_{i=1}^{x} p_i v_i$$

Где p_i – вероятность занять $i^{ое}$ место, v_i – призовые за $i^{ое}$ место, а *X* – количество игроков в турнире.

Вероятность вылететь из турнира на любом месте равна вероятности удвоиться до нужного количества фишек минус вероятность удвоиться еще и занять более высокое место:

$$p_i = C^{\log_2(\frac{X}{i})} - C^{\log_2(\frac{X}{i-1})}$$

Пусть $N = \log_2 X$. Это число удвоений, требуемое для победы в турнире, где победитель забирает все. Подставим *N* в уравнение выше, тогда получим:

$$p_i = C^{N - \log_2 i} - C^{N - \log_2 (i-1)}$$

Последнее уравнение справедливо только лишь в случае, если $i > 1$; поскольку при $i = 1$, $p_i = C^N$.

Теперь давайте вернемся к вероятности занять определенное место. Введем новую переменную:

$$q_i = \sum_{i=1}^{X} p_i$$

Фактически, q_i есть ни что иное как «общая» вероятность вылететь в топ i; например q_1 показывает вероятность занять первое место, q_2 – первое или второе и так далее.

Произведем подстановку, получим:

$$q_i = C^{N - \log_2 i}$$

Теперь рассмотрим структуру призовых для нашего выдуманного турнира. Пусть весь призовой фонд – P, где v_i это выплата за вылет на $i^{ом}$ месте:

$$P = \sum_{i=1}^{X} v_i$$

Тогда w_i будет отражать увеличение размера выплат за вылет на $i + 1^{ом}$ месте:

$$w_i = \sum_{i=1}^{X} v_i - v_{i+1}$$

Оговоримся, что $w_X = v_X$

Кроме того, мы также знаем, что:

$$P = \sum_{i=1}^{X} iw_i$$

поскольку

$$\sum(iw_i) = \sum(i(v_{i-v} - v_{i+1}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum(iv_i) - \sum\left(iv_{(i+1)}\right) \\
&= \sum(iv_i) - \sum\left((i-1)v_i\right) \\
&= \sum(v_i) = P
\end{aligned}$$

Таким образом, весь призовой фонд равен количеству денег, гарантированных за вылет на $i^{ом}$ месте или выше, умноженному на количество вылетевших игроков, и просуммированному по всем значениям i.

В самом начале этого обсуждения мы написали следующую формулу:

$$E_N = \sum_{i=1}^{x} p_i v_i$$

Ожидание игрока равно выплате за вылет на каждом из возможных мест, умноженной на вероятность вылета, и просуммированной по всем *i*.

Но мы также можем переписать это уравнение следующим образом:

$$E_N = \sum_{i=1}^{x} q_i w_i$$

Ожидание игрока равно его шансу оказаться на любом из мест в турнире (или выше), умноженному на w_i.

Проиллюстрируем все формулы на простом примере. Пусть мы имеем дело с тремя призовыми местами: v_1, v_2,и v_3. Вероятности нашего игрока попасть на них соответственно равны p_1 ,p_2, и p_3.

Получаем:

$$q_1 = p_1$$
$$q_2 = p_1 + p_2$$
$$q_3 = p_1 + p_2 + p_3$$

Кроме того:

$$w_1 = v_1 - v_2$$
$$w_2 = v_2 - v_3$$
$$w_3 = v_3$$

Мы можем показать, что $q_1w_1 + q_2w_2 + q_3w_3$ эквивалентно нашему ожиданию:

$$q_1w_1 + q_2w_2 + q_3w_3$$
$$p_1(v_1 - v_2) + (p_1 + p_2)(v_2 - v_3) + (p_1 + p_2 + p_3)(v_3)$$
$$p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3$$

Таким образом, мы получили формулу для расчета ожидания от турнира. Мы будем пытаться определить значение *k*, которое бы удовлетворяло следующему уравнению:

$$2N\sum_{i=1}^{x} q_i\, w_i = (2C)^D$$

где *D* – количество даббл-апов до *k* игроков, или $\log_2 k$. Здесь и далее мы будем предполагать, что w_i выражается в бай-инах, а не в долях от общего призового фонда.

$$2N\sum_{i=1}^{x} C^{N-\log_2 i} w_i = (2C)^D$$

$$\sum_{i=1}^{x} (2C)^N C^{-\log_2 i} w_i = (2C)^D$$

$$\sum_{i=1}^{x} C^{-\log_2 i} w_i = (2C)^{D-N}$$

$$\sum_{i=1}^{x} i(2C)^{-\log_2 i} w_i = (2C)^{D-N}$$

Интересный факт – значение *k* хоть и зависит от выбранного *C* (как вы могли убедиться в одном из примеров выше), однако оказывается практически безразличным к выбору конкретного значения, если оно находится в разумных пределах. Предположим, что наше *C* находится очень близко к 0.5. Пусть ε – разность между 0.5 и *C*, умноженная на два (значение ровно 0.5 выпадает, поскольку тогда в одной из наших формул появится деление на 0).

$$\sum_{i=1}^{x} i(1+\varepsilon)^{-\log_2 i} w_i = (1+\varepsilon)(D-N)$$

Если значение ε находится очень близко к 0.5, мы можем сделать следующее приближение:

$(1 + \varepsilon)^x = 1 + x\varepsilon.$

$$\sum_{i=1}^{x} i w_i (1 - (\log_2 i)\varepsilon) = (1 - (N - D)\varepsilon)$$

Член iw_i в сумме даст единицу, тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{x} i w_i (\log_2 i) = (N - D)$$

Значение (*N* - *D)* можно интерпретировать как количество удвоений, которое «выпадает» из турнира, если мы включаем в наши расчеты некую структуру призовых. Чтобы найти реальный размер поля, мы можем разделить *X* на 2^{N-D}

Эту простую формулу можно использовать для любого турнира. Применительно к нашему предыдущему примеру:

$g_1 = {}^{154}/_{256}$
$g_2 = {}^{102}/_{256}$
${}^{204}/_{256} = N - D$
$k = 256\ /\ 2^{204/256} = 147.35$ где $D = \log_2 k$

Небольшое расхождение результатов вызвано тем фактом, что когда мы оценивали этот турнир в первый раз, мы выбрали значение *C* = 0.52.

Нужно запомнить

……………………………………………………………………………………………………...

- Теория Даббл-апа позволяет оценить ожидание от наших действий на ранней и средней стадии турнира через вероятность даббл-апа и число удвоений, необходимых для победы. С помощью этой модели мы можем рассчитать необходимые подстройки в стратегии в зависимости от собственного мастерства.

……………………………………………………………………………………………………...

- Формула $E=C^N$ связывает структуру призовых и уровень игры – чем больше призовых мест, тем меньше влияние мастерства на ожидание.

……………………………………………………………………………………………………...

- Мы можем найти реальный размер поля (уравнение 26.3) для турнира с любой структурой призовых. Коэффициент *k* – это поле эквивалентного турнира, где победитель забирает все деньги.

……………………………………………………………………………………………………...

Глава 27

Фишки не деньги: Турниры, часть 2

Теория Даббл-апа не предназначена для разбора ситуаций, возникающих на баббле или за финальным столом, однако зачастую именно в такие моменты важно знать истинную стоимость наших фишек. Возможно, нам предлагают поделить призовой фонд, или мы оказались в пограничной ситуации на баббле и сомневаемся в своем реальном ожидании.

К слову, два главных фактора, которые могут повлиять на наше ожидание (уровень игры и структура выплат), по-разному проявляют себя на разных стадиях турнира. Когда фишек еще много, а призовая зона далеко, только преимущество над полем имеет значение. Но ближе к концу турнира, когда блайнды и анте съедают значительную часть стэка каждый круг, эффект от вашего уровня игры сводится на нет и вы вынуждены все чаще оглядываться на структуру призовых. Хотя умение обращаться с коротким стэком все еще может пригодиться.

Сложно дать однозначный ответ по поводу истиной стоимости фишек и ожидания от различных решений, даже когда мы говорим об игроках примерно одинаковой силы. Для решения этой задачи предлагались самые разнообразные подходы, но в рамках нашей книги мы проанализируем лишь несколько самых популярных моделей и обсудим их недостатки.

Для начала давайте введем несколько основных понятий и определений.

Каждый из i игроков, оставшихся в турнире, имеет некий стэк S_i. Общее количество фишек в игре ($\mathcal{T}$) тогда можно записать следующим образом:

$$\mathcal{T} = \sum \mathrm{S_i}$$

Доля стэка конкретного игрока в общем числе фишек:

$$\mathrm{s}_{\mathbf{i}} = \frac{\mathrm{S_i}}{\mathcal{T}}$$

Очевидно, что сумма всех значений s_i будет равна 1.

Кроме того, мы будем обозначать через v_j выплату за вылет на $j^{ом}$ месте. Сумма всех выплат будет равна призовому фонду, V. ***Еще не выплаченный призовой фонд*** при n оставшихся игроках, мы будем обозначать как V_n:

$$\mathrm{V_n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_k}$$

Пусть w_j – приращение призовых выплат для $j^{ого}$ места (причем $j > n$), а W_n – общий призовой фонд до $n^{ого}$ места:

$$w_j = v_j - v_n$$
$$W_n = \sum_{1}^{n} w_j = V_n - nv_n$$

Будем считать, что мы ***попали в деньги***, если $v_n > 0$; то есть следующий вылетевший игрок получает долю от призовых. Это произойдет в точке n, где $v_n = 0$ но $v_n + 1 > 0$, также она называется ***бабблом***.

Пусть $p_{i,j}$ – вероятность, что игрок *i* вылетит на месте *j*. Можем применить самую простую формулу для расчета ожидания от турнира:

$$< X_i >= \sum_{j=1,N} p_{i,j} v_j$$

Большинство формул для расчета ожидания, которые мы рассматривали до сих пор, предполагали, что шанс занять первое место ($p_{i,1}$) примерно равен доле фишек у нас на руках s_i. Однако это справедливо только для ситуации, когда ни у одного из игроков нет существенного преимущества. В противном случае предпочтительнее использовать формулу из теории даббл-апа. Поэтому вместо стэков во все последующие расчеты мы будем включать переменную x_i, которая означает шанс некоего игрока *i* выиграть турнир, а каким методом это определить вы можете решить самостоятельно.

Формулы для расчета ожидания, как правило, принимают вероятность победы за данность и позволяют грубо оценить сопутствующие вероятности вылета на других местах.

Пропорциональный метод

Первая модель для определения вероятности занять какое-либо место в турнире достаточно распространена – это метод пропорциональной оценки через величину стэков:

$$< X_i >= v_n + s_i W_n \quad \textbf{(27.1)}$$

Эта модель состоит из двух частей:

- Во-первых, каждый игрок получает минимально гарантированную выплату для определенного этапа турнира.

- Затем оставшийся призовой фонд разделяется в соответствии с размерами стэков всех игроков.

Пусть за столом осталось пять участников со стэками 25,000, 20,000, 10,000 и 5,000, в то время как структура выплат в турнире следующая: $2,000, $1,400, $900 и $700, Тогда по пропорциональному методу нам следует разделить призовой фонд так:

$2,800 будет поровну распределено между всеми оставшимися игроками, это минимально гарантированная выплата.

Оставшиеся деньги разойдутся в следующей пропорции:

Игрок 1: $\langle X_1 \rangle = 700 + (^5/_{12})(2200) = \$1,616.67$
Игрок 2: $\langle X_2 \rangle = 700 + (^1/_3)(2200) = \$1,433.33$
Игрок 3: $\langle X_3 \rangle = 700 + (^1/_6)(2200) = \$1,066.67$
Игрок 4: $\langle X_4 \rangle = 700 + (^1/_{12})(2200) = \$883.33$

На первый взгляд эти цифры кажутся адекватными. Однако недостаток такой модели становится очевидным, если мы дадим первому игроку стэк в 48,000, а другим оставим всего по 4,000 фишек:

Игрок 1: $\langle X_1 \rangle = 700 + (^4/_5)(2200) = \$2,460$
Игроки 2-4: $\langle X_i \rangle = 700 + (^1/_{15})\{2200) = \$846.67$

Очевидно, что такое разделение призового фонда совсем не справедливо – один из игроков может получить больше, чем официально заявленный приз за первое место! Дето в том, что пропорциональный метод систематически отдает больше денег крупным стэкам. Чем меньше разница по фишкам, тем более точные оценки вы получите. Правда, если бы это условие не выполнялось для какой-либо модели, мы бы смело могли выкинуть ее в мусорное ведро! Ведь игроки с более-менее одинаковыми x_i должны получать одно и то же количество денег.

Причина недостатка пропорциональной модели кроется в том, что в ее основе лежит формула $p_{i,j} = s_i$ для всех j. Легко показать, что это не лучший подход к определению ожидания. Пусть наш игрок является чип-лидером, а преимущества над полем ни у кого нет. Тогда его шанс занять первое место будет выше, чем у всех остальных участников, в то время как вероятность вылететь на втором, третьем местах и так далее для него не изменится. Из этого следует, что шансы вылететь на любом месте у него составляют ns_i, а если s_i больше, чем $1/n$, то эта вероятность больше единицы, чего в принципе не может быть.

Мы можем несколько видоизменить эту формулу и поставить жесткие ограничения по сходимости общей вероятности к единице:

$$m = \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor$$

$p_{i,j \le m} = x_i$

$p_{i,m+1} = 1 - m\, x_i$

Здесь выражение в квадратных скобках называется целой частью числа *m* – оно возвращает наибольшее целое число, которое меньше или равно $1/x_i$.

Тогда если $x_i > 0.5$, то $m = 1$, получим:

$p_{i,1} = x_i$

$p_{i,2} = 1 - x_i$

Эта оценка будет более правдоподобной для очень больших стэков. В качестве демонстрации, вернемся к рассмотренному выше примеру:

Для игрока 1, у которого на руках $^{5}/_{12}$ всех фишек, $m = 2$. Тогда

$p_{i,1} = {}^{5}/_{12}$

$p_{i,2} = {}^{5}/_{12}$

$p_{i,3} = {}^{1}/_{16}$

И его доля в призовом фонде составляет:

$<X_1> = 700 + ({}^{5}/_{12})(1300) + ({}^{5}/_{12})(700) + ({}^{1}/_{6})(200) = \$1,566.67$

К сожалению, в таком случае полученное ожидание для всех игроков не сходится к величине призового фонда. Поэтому эту модель стоит использовать только для приближенной оценки верхней границы ожидания чип-лидеров.

Формула Ландрума-Бернса

Следующая модель на очереди была предложена Стивеном Ландрумом и Джазбо Бернсом. Она работает следующим образом:

Сначала мы определяем шанс выиграть турнир для всех игроков. Затем мы делаем допущение, что если этого не случается, то каждый участник может занять любое из оставшихся мест с равной вероятностью.

$$< X_i >= p_{i,1} v_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(1 - p_{i,1})}{n-1} v_k \qquad \textbf{(27.2)}$$

Используя эту формулу, мы можем повторно оценить ожидание игроков из предыдущего примера. Стэки по 25,000, 20,000, 10,000 и 5,000, выплаты $2,000,

$1,400, $900 и $700. Формула Ландрума-Бернса даст следующий ответ:

Игрок 1: $(^5/_{12})(2200) + (^7/_{36})(1400) + (^7/_{36})(900) + (^7/_{36})(700) = \$1,416.67$
Игрок 2: $(^1/_3)(2200) + (^2/_9)(1400) + (^2/_9)(900) + (^2/_9)(700) = \$1,333.33$
Игрок 3: $(^1/_6)(2200) + (^5/_{18})(1400) + (^5/_{18})(900) + (^5/_{18})(700) = \$1,066.67$
Игрок 4: $(^1/_{12})(2200) + (^{11}/_{36})(1400) + (^{11}/_{36})(900) + (^{11}/_{36})(700) = \$1,083.33$

Однако и в этом методе есть свои недостатки – мы можем их обнаружить, вновь обратившись к случаю, где у одного из игроков стэк 48,000, а у остальных по 4,000:

Игрок 1: $(^4/_5)(2000) + (^1/_{15})(1400) + (^1/_{15})(900) + (^1/_{15})(700) = \$1,800$
Игроки 2-4: $(^1/_{15})(2000) + (^{14}/_{45})(1400) + (^{14}/_{45})(900) + (^{14}/_{45})(700) = \$1,066.67$

Оценка в $1,800 выглядит более приемлемой, поскольку она хотя бы не превышает приз за первое место. В то же время игрок 1 может высказать вполне резонный протест против такого подсчета, ведь если ему не удастся выиграть турнир, то вероятность того, что он вылетит, скажем, на четвертом месте в среднем будет гораздо ниже, чем вероятность проиграть хэдс-ап за первое. Особенно если блайнды выросли настолько, что напрямую угрожают стэкам остальных игроков.

Обратную ошибку можно наблюдать и для очень мелких стэков – их шансы занять четвертое или второе место в подобной ситуации не могут быть всегда одинаковыми.

Модель Ландрума-Бернса, как правило, переоценивает ожидание коротких стэков за счет чип-лидеров. Поэтому ответы, полученные с ее помощью должны рассматриваться как нижняя граница ожидания. С другой стороны, как мы уже заметили выше, оценки в пропорциональной модели говорят о верхней границе, поэтому было бы логично предположить, что реальное ожидание находится где-то между этими двумя значениями.

Формула Мальмута-Харвилля

Этот метод похож на формулу Харвилля для скачек. Работает он так:

- Шанс занять первое место для каждого игрока равен x_i
- С помощью формулы ниже мы можем рассчитать вероятность закончить турнир на втором месте, если игрок k выиграл:

$$p(X_{i,2}|X_{k,1}) = \frac{x_i}{1 - x_k}$$

Тогда наша вероятность вылететь на втором месте равна:

$$p_{i,2} = p(X_{i,2})$$

$$p_{i,2} = \sum_{k \neq i} p(X_{i,2} | X_{k,1})\, p(X_{k,1})$$

$$p_{i,2} = \sum_{i \neq k} \frac{x_i x_k}{1 - x_k}$$

Эта модель изначально применялась в ставках на бега, однако, по сути, с покером она имеет гораздо больше общего.

Если какая-то лошадь является явным фаворитом (*x* близок к единице), то все ее неудачные финиши будут случаться в основном из-за проблем, которые не позволят ей занять ни второе, ни третье, ни какое-либо другое место (например, болезнь, травма, дисквалификация). Поэтому неправильно предполагать, что лошадь с 80% шансом на победу займет второе место (если ей не удастся выиграть) чаще, чем в 80% случаев. И уж тем более глупо думать, что она окажется в первой тройке 99 раз из 100.

В покере же этот эффект сводится на нет – если чип-лидер не выигрывает турнир, он все еще с хорошей вероятностью может оказаться вторым, и, в то же время, скорее всего никогда не вылетит на самом последнем месте.

Мы можем написать общую формулу для этой модели:

$$p(X_{i,j} | X_{1,1} \wedge X_{2,2} \wedge \ldots \wedge X_{j-1,j-1}) = \frac{x_i}{1 - x_1 - \cdots - x_{j-1}} \qquad \textbf{(27.3)}$$

Иными словами, вероятность вылететь на $j^{ом}$ месте есть ни что иное как соотношение вероятности выиграть турнир для рассматриваемого игрока к такой вероятности для всех остальных участников. Зачастую эта формула дает более правдоподобные оценки по сравнению с пропорциональной моделью или методом Ландрума-Бернса.

Стоит, правда, отметить, что и здесь есть недостатки: если количество еще не вылетевших игроков достаточно велико, то быстрые расчеты по такой формуле становятся невозможными. Поэтому ее основной областью применения являются Sit-And-Go турниры.

Формула Мальмута-Вайцмана

Еще одна модель, описанная Мальмутом в книге «Теория азартных игр», впервые была предложена Марком Вайцманом, поэтому мы будем использовать для нее двойное обозначение авторства.

В своей книге Мальмут предпочитал использовать именно эту формулу, хотя и признавал, что она требует от читателя решать системы линейных уравнений для каждой ситуации.

Модель построена на предположении, что когда какой-то игрок вылетает из турнира, его фишки в среднем распределяются между его оппонентами поровну.

$$x_i = P(X_{i,1}) = \sum_{k \neq i} P(X_{i,1} | X_{k,n}) P(X_{k,n}) = \sum_{k \neq i} (x_i + \frac{x_k}{n-1}) p_{k,n}$$

Это уравнение, в свою очередь, трансформируется в систему, которую нам придется решить. Для каждого игрока у нас есть некое $p_{k,n}$ – вероятность вылететь следующим, а также сумма по всем игрокам от распределения их фишек среди оставшихся участников.

Например, если в турнире осталось четыре человека. Тогда мы получим следующие уравнения (будем использовать p_k вместо $p_{k,n}$).

$$x_1 = \left(x_1 + \frac{x_2}{3}\right) p_2 + \left(x_1 + \frac{x_3}{3}\right) p_3 + (x_1 + \frac{x_4}{3}) p_4$$
$$x_2 = \left(x_2 + \frac{x_1}{3}\right) p_1 + \left(x_2 + \frac{x_3}{3}\right) p_3 + (x_2 + \frac{x_4}{3}) p_4$$
$$x_3 = \left(x_3 + \frac{x_1}{3}\right) p_1 + \left(x_3 + \frac{x_2}{3}\right) p_2 + (x_3 + \frac{x_4}{3}) p_4$$
$$x_4 = \left(x_1 + \frac{x_1}{3}\right) p_1 + \left(x_4 + \frac{x_2}{3}\right) p_2 + (x_4 + \frac{x_3}{3}) p_3$$

Здесь четыре уравнения и четыре неизвестных – такая система легко решается заменой и подстановкой переменных. Однако мы поступим несколько иначе. Дело в том, что эти уравнения принадлежат к так называемому семейству уравнений Вандермонде. Ниже мы приведем их упрощенное решение и покажем, что оно верно.

Рассматриваемую систему можно перевести в матричный вид. В таком случае, мы получим интересный результат: вероятность вылететь следующим обратно пропорциональна оставшимся у нас фишкам (или шансу на выигрыш в турнире). Пусть b – сумма всех чисел, обратных вероятности на победу:

$$b = \sum \frac{1}{x_i}$$

Тогда

$$p_{k,n} = \frac{1/x_k}{b} \qquad \textbf{(27.4)}$$

Мы можем подставить эти выражения в исходную формулу:

$$x_i = \sum_{k \neq i} (x_i + \frac{x_k}{n-1}) p_{k,n}$$
$$x_i = \frac{1}{b} \sum_{k \neq i} (\frac{x_i}{x_k} + \frac{1}{n-1})$$
$$x_i = \frac{1}{b} \sum_{k \neq i} (\frac{x_i}{x_k} + 1)$$
$$x_i = \frac{1}{b} [x_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_k} + 1]$$

Сумма по $1/x_k$, для всех k сходится к $b - 1/x_i$.

Тогда имеем:

$$x_i = \frac{1}{b} (bx_i - 1 + 1) = x_i$$

Система линейных уравнений, полученная из допущений этой модели, предполагает, что шанс каждого игрока вылететь из турнира следующим обратно пропорционален вероятности выиграть весь турнир (или количеству его фишек).

Формула Мальмута-Вайцмана дает вполне хорошие предсказания и по большому счету является лучшим инструментом для сиюминутной оценки ситуации за столом. Тем не менее, следует выделить некоторые из ее недостатков.

Первый касается ситуации, когда в игре остаются несколько столов: скажем, два очень коротких стэка находятся за разными столами, причем у одного из них фишек в два раза больше, чем у другого. Очевидно, что и тот и другой могут выставиться уже на следующих блаиндах. Однако такая модель предсказывает, что шансы остаться в игре у одного из коротышей ровно в два раза больше. Также спорно утверждение, что в среднем все фишки вылетевшего игрока будут поровну распределены между оставшимися участниками турнира. Но в целом, этот метод дает лучшие предсказания на баббле или на близких к нему стадиях, а также неплохо подходит для денежной оценки сделок, предлагаемых за финальным столом.

Главный вывод, который вам стоит сделать изо всех этих моделей, заключается в том, что существует множество способов связать между собой ожидание по фишкам и ожидание в турнире. И поскольку моделей много, каждая из них имеет свои достоинства и недостатки, но понимание принципов их работы даст вам больше шансов принять верное решение в турнирной ситуации, будь то пограничный колл или сделка за финальным столом.

Результаты турниров и доверительные интервалы

В первой части этой книги мы обсуждали применение доверительных интервалов к оценке винрейтов, и в этом не было ничего сложного – в кэш-играх такие вычисления можно проводить по известным и совсем не сложным формулам. Почему? По сути, кэш есть ни что иное как набор отдельных исходов раздач, которые никак не связаны между собой, а такие структуры подчиняются закону больших чисел.

С другой стороны, в турнирах вычислить доверительный интервал далеко не так просто. Представьте себе некий турнир на 1000 человек, где победитель забирает весь призовой фонд. Пусть винрейты генеральной совокупности игроков находятся в приделах от -1 до +1 бай-ина за турнир. Таким образом, человек, занявший первое место, станет счастливчиком, испытавшим на себе эффект от попадания в событие, находящееся в 30 (!) сигмах от его математического ожидания. При этом каждый турнир с высокой долей вероятности будет иметь своего победителя. Но даже если нам удастся выиграть 10 раз подряд, более точной оценка нашего ожидания не станет.

Кроме того, в отличие от кэш-игр, где дисперсия быстро сходится на одном значении из-за характера распределения ее значений (хи-квадрат), в турнирах очень сложно получить качественную оценку меры разброса результатов. Более того, в турнирах дисперсия находится в тесной связи с винрейтом, поскольку все маловероятные события всегда дают только положительный результат (например, попадание за финальный стол), в то время как события с отрицательным результатом встречаются гораздо чаще (проигрыш одного бай-ина).

Поэтому для того, чтобы выборочное распределение сошлось к нормальному, нам придется отыграть огромное количество турниров.

На этом сложности не заканчиваются – нашим расчетам будет мешать и коэффициент асимметрии, который мы описали в главе 22:

$$\mathrm{S} = \frac{< (\mathrm{X} - \mu)^3 >}{\sigma^3}$$

Для турнира на n игроков, где победитель забирает все деньги, он будет равен примерно $\sqrt{n}$, хотя в случае с нормальным распределением асимметрии не существовало бы вовсе. Как вы уже знаете, сумма коэффициентов асимметрии для n одинаковых независимых событий равна асимметрии для одного события, деленного на $\sqrt{n}$. С ростом числа сыгранный турниров выборочный коэффициент асимметрии в конечном счете сведется к нулю. Однако для того, чтобы получить оценку этого коэффициента в пределах единицы, нам нужно поучаствовать более чем в n турнирах!

Тем не менее, не следует отбрасывать эту задачу как невыполнимую. Давайте начнем с определения ожидаемого дохода от турнира:

$$< X >= \sum p_i V_i$$

Где V_i – денежный приз за вылет на $i^{ом}$ месте. Пусть V – весь призовой фонд турнира, тогда мы можем сказать, что v_i – это часть фонда, которая выплачивается за $i^{ое}$ место.

$$v_i = \frac{V_i}{V}$$

Скажем, в нашем турнире нет ребаев и адд-онов, тогда ***размером*** турнира будет отношение призового фонда к количеству игроков.

$$s = \frac{V}{n}$$

Также нам следует дать определение ***стоимости*** турнира b_c – это общее количество денег, которое игрок должен внести для участия. Разница между стоимостью турнира и размером турнира равна ***вступительному взносу*** или ε_b, который может быть как положительным (рейк и т.п.), так и отрицательным (гарантированный призовой фонд сверх суммы бай-инов всех игроков):

$$\varepsilon_b = b_c - s$$

Например, мы собираемся участвовать в турнире $100 + $10 с гарантией в $50,000. При этом только $100 из стоимости турнира идут в призовой фонд, остальное остается у покерной комнаты. Если общий призовой фонд оказывается меньше $50,000, комната вносит недостающую сумму. Пусть к моменту начала турнира в нем зарегистрировались 300 игроков, тогда:

$s = \$166.67$
$b_c = \$110$
$\varepsilon_b = \$56.67$

Наше чистое ожидание от игры в турнире, w, есть разница между ожидаемым доходом и стоимостью турнира:

$$w = < X > - b_c$$
$$w = \sum p_i V_i - s - \varepsilon_b$$

Это уравнение разбирается на две части. Первая:

$$w_0 = \sum p_i V_i - s$$

Связана исключительно с нашим умением играть в покер, в то время как вторая, ε_b, никак он нашего мастерства не зависит (за исключением, может быть, селекционных навыков).

Следующее понятие, которое нам следует ввести, называется ***нормированный винрейт***:

$$\omega \equiv \frac{w_0}{s}$$
$$= \sum p_i \frac{V_i}{s} - 1$$
$$= \sum (np_i)\frac{V_i}{V} - 1$$
$$= \sum (np_i - 1)v_i$$

По сути, он показывает количество бай-инов (с учетом размера турнира), которые мы ожидаем выиграть в среднем.

Также нам будет интересен ***нормированный выигрыш*** (сколько мы выиграли в отдельном турнире с учетом его размера) Z:

$$Z = \frac{X - s}{s}$$

Причем у этой статистической переменной есть интересное свойство (оно очевидно, поскольку средний ожидаемый выигрыш в турнире и равен нашему винрейту):

$$< Z > = \omega$$

Далее мы будем стараться определить поведение Z и на основании этой информации построим доверительные интервалы.

Заметьте, что мода (то есть наиболее часто встречающееся значение) для Z равно -1, так как чаще всего мы просто потеряем вложенный бай-ин.

Самое время начать делать предположения о том, как получить адекватную оценку Z. Например, мы можем ввести следующее правило:

$$p_i = \frac{1 + \omega}{n}$$

В этом случае мы предполагаем, что винрейт конкретного игрока связан с его шансом вылететь из турнира на каждом из призовых мест.

Введем еще одно условие: рассматриваемый игрок может закончить турнир на любом месте с равной вероятностью. Кому-то это покажется странным, поскольку чуть выше, в части о Теории Даббл-апа, мы как раз говорили о значимости перевеса над полем и о том, как из-за этого может измениться вероятность вылета. Однако, на наш взгляд, такое допущение вполне резонно.

Как вы помните из главы 25:

$$< x^2 > = \mu^2 + \sigma^2$$
$$\sigma^2 = < x^2 > - \mu^2$$

Для нашего случая:

$$x = X - b_c$$
$$\mu = < X - b_c >$$

Дисперсия отдельно взятого турнира тогда равна:

$$\sigma_x^2 =< (X - b_c)^2 > -< X - b_c >^2$$

$$\sigma_x^2 =< X^2 > -< X >^2$$

$$\sigma_x^2 = \sum p_i V_i^2 - (\omega + b)^2$$

$$\sigma_x^2 = \sum \left(\frac{1+\omega}{n}\right) (Vv_i)^2 - (1+\omega)^2 b^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(1+\omega)}{n} (nb)^2 \sum {v_i}^2 - (1+\omega)^2 b^2$$

$$\sigma_x^2 = \left[n\left(\sum {v_i}^2\right)(1+\omega) - (1+\omega)^2\right] b^2$$

Теперь мы можем получить оценку дисперсии Z:

$$\sigma_z^2 =< Z^2 > -< Z >^2 = \frac{\sigma_x^2}{b^2} = \left(n\sum v_i^2 - 1 - \omega\right)(1+\omega)$$

Таким образом, дисперсия Z примерно пропорциональна $1 + \omega$ для всех правдоподобных значений ω. Если посмотреть, на одну из частей этого уравнения:

$$k = n\sum v_i^2 - 1 \qquad \textbf{(27.5)}$$

Мы обнаружим, что она ведет себя почти так же, как формула для определения реального размера поля из главы о Теории Даббл-апа. Обозначим *k* как ***множитель турнирной дисперсии***. Используя формулу для расчета дисперсии Z, мы получим гораздо более правдоподобные значения дисперсии в турнирах, чем с помощью оценки дисперсии по наблюдаемой выборке (за исключением случаев, когда мы имеем с выборкой в десятки тысяч турниров).

Теперь представьте себе серию из независимых турниров. Пусть у нас есть соответствующие нормированные оценки Z для *m* турниров.

Тогда среднее от этих нормированных выигрышей ($\overline{Z}$) будет равно:

$$\overline{Z} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Z_j}{m}$$

Поскольку каждое значение Z_j никак не зависит от количества сыгранных турниров, можно написать следующую формулу для оценки дисперсии в выборке из *m* нормированных выигрышей:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \sigma_{zj}^2}{m^2} = \frac{\sum(k_j - \omega)(1+\omega)}{m^2} = \frac{(\overline{k} - \omega)(1+\omega)}{m} \qquad \textbf{(27.6)}$$

Обычно ω будет значительно меньше *k*. Поэтому формулу 27.6 мы можем очень грубо представить в виде k/m. Тогда чтобы привести дисперсию выборки размера *m* к 1, количество сыгранных нами турниров должно приближаться к среднему значению множителя турнирной дисперсии. В таком случае с вероятностью 68% мы сможем утверждать, что наблюдаемый винрейт ω находится в пределах 1 байина от ожидания для генеральной совокупности (истинного винрейта).

Мы можем назвать формулу 27.6 формулой ***оценки дисперсии на основе винрейта***, поскольку она использует наблюдаемый винрейт и известную структуру турнира, чтобы рассчитать дисперсию.

Но в ней есть один важный изъян – дело в том, что винрейт ω как правило не гарантирует, что ваш шанс закончить турнир на каждом из призовых мест растет в прямой зависимости от ω. Действительно, некоторые игроки если и выигрывают что-то, то это обязательно происходит на поздних стадиях турнира, в то время время как другие довольствуются частыми вылетами сразу после баббла. Эту проблему можно решить, используя Теорию Даббл-апа, чтобы оценить частоту попадания на каждое из призовых мест, а затем посчитать дисперсию.

Причина, по которой мы не используем наблюдаемую дисперсию, кроется в недостаточном размере выборок. Если только у вас нет гигантской базы, во всех без исключения случаях формулы выше будут давать более реалистичные предсказания. Однако когда m становится очень большим, мы можем рассчитать истинную дисперсию по-другому. Давайте попробуем воспользоваться наблюдаемым винрейтом $\widehat{\omega}$ и наблюдаемой дисперсией $\widehat{\sigma^2}$, чтобы рассчитать *k*.

$$k = \widehat{\omega} + \frac{m\widehat{\sigma^2}}{1 + \widehat{\omega}}$$

Это значение *k* затем можно подставить в формулу подсчета дисперсии через винрейт. Такой подход окажется более точным при очень больших значениях m, поскольку выборочная дисперсия сходится к истинной быстрее, чем выборочное распределение сходится к нормальному.

Самое время остановиться и вернуться к вопросу, который мы поставили в начале этого раздела, о доверительных интервалах:

> *Если наш нормированный винрейт равен ω, можно ли сказать, что в рассматриваемой выборке нам везло?*

Здесь у нас не получится использовать только лишь нормальное распределение, поскольку выборочное распределение не сходится на нормальном (размер выборки небольшой). Однако мы можем прибегнуть к ***z*-оценке** (уравнение 2.6) и через нее получить уровень значимости (надежности).

Например, с помощью этого уравнения мы проверим, укладывается ли отклонение в 2 стандартных от нашего ожидания в гипотезу о 95%:

$$z = \frac{\widehat{\omega} - \omega}{\sigma(\omega)} < -2$$

Если это выражение истинно, можно сказать, что ω не удовлетворяет гипотезе 95%, ведь мы уже знаем, что рассматриваемое распределение имеет положительный коэффициент асимметрии, то есть вероятность получить событие с отрицательным результатом (которое находится на расстоянии двух сигм от ожидания) гораздо меньше предсказываемой нормальным распределением. Таким образом, мы можем сразу отсечь многие чрезмерно большие винрейты.

Однако в случае, когда $\omega > \widehat{\omega}$ нам следует проявлять известную долю осторожности. Нормальное распределение использовать не получится, так как в нашем выборочном распределении (из-за его асимметрии), вероятность того, что наблюдаемый исход окажется положительным заметно больше, чем при нормальном распределении.

Мы можем прибегнуть к так называемому неравенству Чебышева:

$$P\left(\frac{\widehat{\omega}-\omega}{\sigma(\omega)} = z > a\right) < \frac{1}{a^2}$$

Оно говорит о том, что вероятность получить исход, находящийся на расстоянии четырех стандартных отклонений от ожидания или больше (в любую сторону) всегда меньше $^1/_{16}$. Такая формула кому-то покажется слишком грубой, поскольку нормальное распределение оценивает вероятность возникновения таких событий в 0.00003. Однако замечательное свойство неравенства Чебышева заключается в том, что оно универсально для любого распределения, с асимметрией или без.

Давайте посмотрим на все, о чем мы успели поговорить, в разрезе гипотетического игрока Т. Скажем, наш игрок участвует в четырех $50+$5 турнирах в день. Два из них собирают поле в 100 человек (утренние турниры), а оставшиеся два – в 400 человек (вечерние турниры).

В утренних турнирах действует следующая структура выплат:

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30%	20%	12%	10%	8%	6%	5.5%	4.5%	4%

То же самое, но для вечерних турниров:

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-18	19-27
%	27.5%	17.5%	11.6%	8%	6%	4.5%	3.5%	2.6%	1.7%	1.2%	0.7%

Игрок Т следует своей рутине на протяжении 200 дней. В результате, у него есть выборка из 400 утренних и 400 вечерних турниров.

Таблицы ниже отражают результаты нашего подопытного для каждой категории:

Утренние турниры:

Место	Число событий	Выигрыш	Прибыль	Итого
1ое	11	30	29	319
2ое	7	20	19	133
3ье	5	12	11	55
4ое	3	10	9	27
5ое	8	8	7	56
6ое	4	6	5	20
7ое	7	5.5	4.5	31.5
8ое	2	4.5	3.5	7
9ое	5	4	3	15
Вне денег	348	0	-1	-348
Итого	**400**			**315.5**

Получается, что игрок Т попадает в деньги на утренних турнирах $^{52}/_{400}$, или 13% раз. Его общий винрейт составляет 0.79 бай-инов за турнир.

Вечерние турниры:

Место	Число событий	Выигрыш	Прибыль	Итого
1ое	4	110	109	436
2ое	2	70	69	138
3ье	2	46.4	45.4	90.8
4ое	0	32	31	0
5ое	2	24	23	46
6ое	4	18	17	68
7ое	1	14	13	13
8ое	0	10.4	9.4	0
9ое	2	6.8	5.8	11.6
10ое – 18ое	14	4.8	3.8	53.2
19ое - 27ое	20	2.8	1.8	36
Вне денег	349	0	-1	-349
Итого	400			543.6

Вечером он также попадает в деньги примерно в 13% случаев, однако винрейт увеличился – до 1.36 бай-ина за игру.

Получаем, что при 800 отыгранных турнирах его средний винрейт равен 1.07 бай-ина. Это дает нам следующие значения для переменных, которые мы обсуждали выше:

$\omega = 1.07$
$m = 800$

$\overline{Z} = 1.07$

$$k = n \sum v_i^2 - 1$$

Для утренних турниров:

k =100 ((0.30)^2 + (0.20)^2 + ... + (0.04)^2) – 1= 16.105

Для вечерних турниров

k = 400 ((0.275)^2 + (0.175)^2 + ... + (0.007)^2) – 1= 53.6456

Среднее значение:

$\overline{k}$ = 34.875

Тогда дисперсия для выборки из 800 турниров, с оговоренным разделением на утренние и вечерние, равна:

$$\sigma^2 = \frac{(\overline{k} - \omega)(1 + \omega)}{m} = \frac{(34.875 - 1.07)(1 + 1.07)}{800} = 0.0876$$

Или стандартное отклонение в 0.296 бай-инов за выборку в 800 событий.

Если же мы посчитаем дисперсию для наблюдаемой выборки, то она составит 0.3468 байн-ина – такая разница обусловлена повышенным количеством первых мест в результатах рассматриваемого игрока. Кто-то может заметить, что этот факт вполне способен существенно изменить форму распределения. Мы же отметим следующее.

Во-первых, некоторые игроки действительно чаще занимают высокие места, однако на генеральную совокупность их результатов это не оказывает заметного влияния. И самое главное – все данные для игрока Т были сгенерированы случайным образом, так что можно с уверенностью утверждать, что его шансы оказаться на любом месте были абсолютно одинаковы. Этот пример еще раз показывает, что в турнирах всегда есть вероятность оказаться одураченным случайностью, особенно когда дело касается небольших выборок.

Если мы применим нормальное распределение к выборочному винрейту, то 95%-ый доверительный интервал будет выглядеть так: [0.3802, 1.7675]. Очевидно, что его верхняя граница не совсем адекватна – как мы уже говорили, рассматриваемое распределение асимметрично, поэтому шанс того, что истинное математическое ожидание нашего игрока превышает 1.7675 и ему просто не повезло, на самом деле ниже, чем предсказываемый нормальным распределением. С нижней границей тоже есть определенные проблемы – нормальное распределение снова не очень подходит для подобных оценок, опять же из-за наблюдаемой положительной асимметрии, ведь тогда вполне может быть, что в выборке мы просто столкнулись со случайным «доездом» при общем отрицательном винрейте.

Формула оценки дисперсии на основе винрейта предсказывает более щадящую дисперсию для нашего игрока. Для двух сигм интервал значений будет выглядеть так: [0.481; 1.666] – верхняя граница все еще завышена, и гипотеза о 95% достоверности окажется ложной. Однако по неравенству Чебышева шанс того, что реальный винрейт игрока Т выпадет за пределы двух стандартных отклонений от выборочного (то есть будет ниже 0.481) на самом деле не больше 25%.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- Связать ожидание по фишкам и турнирное ожидание можно через несколько разных моделей, каждая из которых имеет свои недостатки.

…………………………………………………………………………………………………..

- Формула Ландрума-Бернса и Пропорциональная модель дают очень грубые оценки, однако их легко применять непосредственно за столом. А поскольку ошибки в этих методах расходятся в противоположные стороны, вместе они предсказывают диапазон значений для истинного ожидания.

…………………………………………………………………………………………………..

- Доверительные интервалы для турнирного ожидания не так просто посчитать из-за значительной асимметрии генеральной совокупности и корреляции между дисперсией в турнирах и винрейтом.

…………………………………………………………………………………………………..

Глава 28

Не забываем о покере: Турниры, часть 3

С точки зрения теории игр, турниры имеют одну уникальную особенность, которая оказывает заметное влияние на стратегию – каждый следующий вылет увеличивает ожидание всех оставшихся участников.

Это значит, что в турнирах каждая раздача имеет значение для всех игроков, например, хэдс-ап банки перестают быть играми с нулевой суммой, как в остальных формах покера, а в олл-инах оба участника теряют часть своего ожидания. Причем величина таких потерь может быть как незначительной (в первой раздаче турнира), так и невосполнимой (на баббле в супер-саттелите). Наиболее очевидным этот эффект становится в ситуации, когда один из игроков делает не оупен-рейз, а сразу ставит олл-ин на префлопе.

В кэш-игре мы бы смогли уравнять такой олл-ин с любой рукой, имеющей достаточное количество эквити. Иными словами, наш диапазон колла будет как правило уже, чем диапазон пуша. Например, против {55+, A9+, KJ+} такой неплохой стартер как AJo стоит лишь на 42.8%.

В турнирах же делать колл еще сложнее – помимо эквити нашей руки нам также необходимо задуматься об ожидании, которое можно потерять. Если стэк оппонента совсем небольшой, то мы жертвуем лишь маленькой его долей (поскольку наверняка останемся в турнире, но с меньшим шансом пробиться выше), и наоборот – если нам нужно самим поставить в центр все фишки, то такой олл-ин может оказаться чрезмерно дорогим даже для очень хорошей руки.

В этой связи можно вспомнить распространенный пример из теории игр – называется он «Игра в слабо». Два водителя разгоняются и на большой скорости едут на встречу друг другу. Каждый из них может свернуть и таким образом избежать столкновения. Если им обоим «слабо», то ни один из водителей ничего не теряет, однако если они решат идти до конца, то оба погибнут при столкновении. В случае же когда только один из водителей свернет с дороги, другой назовет его трусом и выиграет одно очко за то, что сам не потерял лицо.

Пример 28.1 – Игра в слабо

Матрица выплат для такой игры выглядит следующим образом:

	Игрок B	
Игрок A	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	(-10, -10)	(1, -1)
Свернуть	(-1,1)	(0, 0)

Вы, наверное, уже заметили, что это не игра с нулевой суммой, а значит, и однозначного оптимального решения у нее нет. В реальности мы можем найти три точки равновесия, в которых ни один из участников не может в одностороннем порядке улучшить свое ожидание. Чаще всего при решении этой игры говорят о точке, где каждый водитель применяет смешанную стратегию с целью сделать оппонента безразличным к выбору действия. Однако две оставшиеся точки очень хорошо подходят к описанию покерных ситуаций: в одной из них игрок А идет до конца, а игрок В сворачивает (здесь игрок В никак не может улучшить свое ожидание), в другой же игрок В идет до конца, а его оппонент сворачивает.

Представьте себе следующую ситуацию: все скидывают свои карты, игрок А (на позиции малого блайнда) может решить «идти до конца» (то есть поставить олл-ин). Тогда лучшей стратегией игрока В (большой блайнд) будет «свернуть», то есть сделать фолд. Здесь стоит отметить, что в покере, естественно, потери от колла такого олл-ина вряд ли в десять раз превысят отданный блайнд. Кроме того иногда у игрока В окажется настолько сильная рука, что он сможет попросту игнорировать любые негативные последствия от своего колла. Однако основная идея остается неизменной: если в какой-либо ситуации вы можете свести розыгрыш к такой игре в «слабо» (пуш или фолд), это и будет оптимальной стратегией для вас. Иными словами, даже поставив олл-ин с чуть более лузовым диапазоном, вы все равно можете не бояться эксплуатации со стороны оппонента.

Игра на баббле

Стадия баббла, особенно в крупных многостоловых турнирах, является идеальной возможностью для эксплуатации излишне скованной игры ваших оппонентов. Многие игроки придают попаданию в деньги слишком большое эмоциональное значение, и это заставляет их играть гораздо меньше рук каждый раз, когда они оказываются у призовой зоны или у следующей ступеньки выплат.

Первая стратегия, которая приходит на ум – либеральные рейзы из поздних позиций. Кстати, именно по этой причине мы отмечали, что хорошие игроки, как правило, вылетают вне призовой зоны, но компенсируют это финишами на более высоких местах – они стараются играть максимально лузово на баббле, и иногда это приводит к потере всех фишек (хотя в случае успеха такой стратегии их стэк значительно увеличивается).

С другой стороны, есть достаточно много ситуаций, где тайтовая игра наоборот будет более предпочтительной: в супер-саттелитах, а также когда шаг призовых становится очень большим. Скажем, мы играем в одностоловом SNG-турнире с десятью участниками и структурой выплат 5-3-2. Скачок от нуля (на четвертом месте) до двух бай-инов (на третьем) на самом деле является вполне веской причиной, чтобы сузить свои диапазоны (особенно для колла олл-ина), поскольку попадание в призы принесет вам в два раза больше денег, чем вы потратили на турнир.

Пример 28.2

Давайте рассмотрим стратегию на баббле на еще одном примере (SNG-турнир):

В игре остаются 4 участника, у каждого по 2,500 фишек. Выплаты происходят по структуре 5-3-2, блайнды 200-400. UTG и BTN скидывают свои карты, малый блайнд идет в олл-ин. Сколько эквити должно быть у руки большого блайнда, чтобы он смог уравнять? Мы можем решить эту задачу, прикинув денежное ожидание от каждого из возможных исходов. Все значения, использованные ниже, являются грубыми прикидками, так как при коротких стэках сложно сказать, кто из оставшихся игроков вылетит следующим.

Случай 1: Большой блайнд делает колл и получает стэк в 5000 фишек. Тогда его турнирное ожидание будет равно как минимум 50% от 5 бай-инов за первое место, плюс еще 50% от среднего между 3 и 2 бай-инами за второе и третье места соответственно. Для простоты будем считать, что у него будет 50% от 2.5 бай-инов. Его общее ожидание составит 3.75 бай-ина.

Случай 2: Большой блайнд делает колл и проигрывает. В таком случае он вылетает из турнира до призов.

Случай 3: Большой блайнд делает фолд, остается со стэком в 2100 фишек, а в следующей раздаче попадает на малый блайнд. Его турнирное ожидание становится равно 21% от первого места, 29% от вылета на четвертом месте (то есть от нуля) и 50% от вылета на втором или третьем месте. Всего около 2.3 бай-инов.

Таким образом, для колла ему нужно выигрывать *X%* раз, причем должно выполняться следующее неравенство: $3.75X > 2.3$. Получаем *X* равный 61.33%.

Это гораздо больше эквити, требуемое для колла по фишкам:

$$(X)5000 - 2100 = 0$$
$$X = 42\%$$

Получается, что на баббле нам стоит играть гораздо более тайтово.

Однако подстройки на баббле могут оказаться не столь очевидными. Чтобы упростить себе жизнь за столом мы часто используем следующий метод. Представьте, что вы играете на баббле в $100+9 турнире на 500 человек, в игре 500,000 фишек. На 50ом месте выплата составляет $120. Тогда наше ожидание от того, что мы кого-то пересидим и окажемся в деньгах (то есть на одно место выше) составляет примерно 1200 фишек.

> *Примечание от переводчика: Авторы нашли ожидание в 1200 фишек следующим образом. В турнире 500 игроков и 500,000 фишек, соответственно, каждая 1000 фишек стоит $100 (при бай-ине $100). Соответственно, $120 стоят около 1200 фишек.*

Тогда каждый раз, когда мы ставим олл-ин, нам следует иметь ввиду возможную потерю в ожидании, которая выражается как раз в 1200 фишек (или $120, которые мы не получим в случае проигрыша). Правда, как правило, такая подстройка не приводит к существенным изменениям в стратегии. Ведь наш пуш сначала кто-то должен уравнять, и только затем у нас будет шанс проиграть сравнение (скажем, первое случатся 25% раз, а второе – 65% раз, то есть всего мы потеряем 16% от 1200, или около 200 фишек). Однако если в деньгах только 10 мест, и выплаты начинаются с $1200, то этот метод вполне может уберечь вас от плохого колла.

Шут-ауты и SNG-саттелиты

Мы объединили эти турниры в одну группы, поскольку они имеют похожую структуру: один стол, игра продолжается до момента, пока у одного участника не окажутся все фишки. Затем он либо забирает себе все деньги, либо переходит за следующий стол, где предусмотрена некая структура выплат. В любом случае, ключевой особенностью таких турниров является отсутствие шага призовых, а это значит, что в них следует ориентироваться только на ожидание по фишкам.

Иногда игрок, вылетевший вторым, получает какой-то символический приз, однако его размер никаким существенным образом не повлияет на вашу стратегию.

Интересно, что в таких турнирах опытные игроки получают больше шансов для реализации своего преимущества, так как рано или поздно все сводится к игре за коротким столом. В одностоловых саттелитах сделки, как правило, обговариваются только на стадии хэдс-апа (или чуть раньше, когда в игре остаются трое) – в таком случае при равном уровне игры всех заинтересованных игроков, размер вашего стэка и будет определять долю призового фонда, который вам причитается.

Хэдс-ап турниры

Этот формат турниров стремительно набирает обороты – здесь все матчи играются в формате хэдс-ап, каждый за своим столом. С ходу можно сказать, что ни о каком сохранении фишек и глубоких финишах не может быть и речи. Задача одна

– выиграть, матч за матчем.

Стоит отметить, что если в хэдс-апе у одного из игроков оказался глубокий стэк, а у другого почти не осталось фишек, то в разрезе ожидания эта ситуация эквивалента игре в матче, где оба участника играют с короткими стэками. Это значит, что чип-лидеру стоит просто игнорировать свой перевес по фишкам и считать, что его стэк равен стэку оппонента (за исключением случаев когда он играет значительно лучше).

Еще одна интересная концепция (о которой говорил Дэвид Склански в своей книге об игре в турнирах) – в хэдс-ап турнире, где блайнды уже выросли на пару уровней, ни у одного из игроков не может быть значительного преимущества. Более того, даже если оно есть, более слабый оппонент может просто ставить в вас олл-ин каждую раздачу, и вы ничего не сможете с этим сделать. В то же время в Лимитном Холдеме сильный игрок почти всегда сможет реализовать свой перевес.

Одностоловые SNG-турниры

Казалось бы, такие турниры целиком и полностью перекочевали в онлайн, однако последнее время они стали возвращаться в «реальные» покерные комнаты. Как правило, в этом формате играются турниры по Безлимитному Холдему (остальные виды покера также возможны, однако они встречаются исключительно редко) с выплатами в 50% от всех денег за первое место, 30% за второе, и 20% за третье.

SNG-турниры предполагают достаточно агрессивную подстройку под различные стадии игры, особенно это касается баббла, где происходит скачок призовых с нуля до 20%. Давайте рассмотрим несколько ситуаций и поговорим о том, какая динамика может возникнуть между глубокими и короткими стэками на баббле.

Один большой стэк, много мелких: (5500/1500/1500/1500, блайнды 150-300)

Здесь у большого стэка есть ощутимое преимущество, которое он вряд ли потеряет, если распределение фишек останется примерно таким же. Он мог бы ставить олл-ин в каждой раздаче, вынуждая своих оппонентов совершать ошибки – маловероятно, что они смогут на лету оценить требуемое эквити для колла на баббле.

Пусть игрок со стэком 5500 делает пуш, все скидывают, а игрок на большом блайнде должен принять решение о колле с некой рукой. Его турнирное ожидание в таком случае будет равно:

Колл, проигранный олл-ин (вылет из турнира): 0 бай-инов
Колл, выигранный олл-ин: (30%)(5) + (40%)(3) + (25%)(2) + (5%)(0) = 3.2 бай-ина
Фолд: (10%) (5) + (30%) (3) + (30%)(2) + (30%)(0) = 2 бай-ина

Таким образом, ему нужно 2/3.2 бай-ина или 62.5% эквити против случайной руки (если большой стэк действительно так играет с любыми двумя), чтобы уравнять в этой раздаче. Если же говорить на языке диапазонов, то большой блайнд должен делать колл с {66+, A9s+, AT+, KJs+}, или около 7% от всех стартовых рук.

Четыре одинаковых стэка: (2500/2500/2500/2500, блайнды 200-400)

Мы вновь возвращаемся к идее, озвученной в начале этой главы: любой олл-ин отнимает некоторое количество турнирного ожидания у каждого из участвующих в нем игроков, особенно при значительной разнице в призовых.

Скажем, игрок на позиции UTG ставит олл-ин, даже не взглянув на свои карты.

Тогда каждый из трех оставшихся игроков вынужден принять решение со следующим ожиданием:

Колл, проигранный олл-ин (вылет из турнира): 0 бай-инов
Колл, выигранный олл-ин: (50%) (5) + (30%) (3) + (20%) (2) = 3.8 бай-ина
Фолд: (25%) (5) + (25%) (3) + (25%) (2) + (25%)(0) =2.5 бай-ина

Получаем чуть более высокое эквити, требуемое для колла – 65.8%. Это ограничивает диапазон любого из игроков, сидящих за UTG, до {77+, AJs+}, то есть около 5% рук. Заметьте, что AKo в таком случае должны отправиться в пас (у них нет 65.8% на победу против случайной руки).

Если же три оставшихся игрока будут уравнивать такой олл-ин лишь в 5% случаев (исключая ничтожный процент оверколлов), UTG будет просто забирать из банка 600 фишек настолько часто, что может не волноваться о возможном выставлении с 25% эквити.

Очевидно, что здесь мы имеем дело с разновидностью игры в «слабо»: первый игрок объявляет, что сворачивать не будет, в то время как остальные вынуждены рисковать «столкновением», то есть своим вылетом из турнира.

Доминация: (6000/2500/750/750, блайнды 200-400)

Третий тип ситуаций: один очень большой стэк, один поменьше и два очень коротких. Здесь игрок с 6000 фишек должен ставить олл-ин с любой рукой. Дело в том, что его оппонент со стэком в 2500 попросту не может позволить себе сделать колл, когда в игре остаются несколько коротышей, которые наверняка вылетят через пару раздач. С другой стороны, доминирующий стэк вполне может оставить их в покое, поскольку пока они находятся за столом, он может красть фишки у среднего стэка без какого-либо сопротивления.

Это лишь некоторые из ситуаций, с которыми вы можете столкнуться в SNG-турнирах на баббле, однако все они объединены общей идеей: из-за большого скачка в призовых между третьим и четвертым местом, стратегия для больших стэков становится очень лузовой.

Суперсаттелиты

Суперсаттелиты – это, возможно, единственный способ для новичков и игроков с микролимитов попасть на дорогие турниры. Отличительной чертой здесь является структура призовых: как правило, денежные выплаты не предусмотрены, а весь фонд разделен на некоторое количество одинаковых турнирных пакетов (иными словами, *N* оставшихся игроков получают билет в более крупный турнир).

Из-за этого предпочтительная стратегия в суперсаттелитах иногда принимает самые невероятные формы. Например, если в призы попадают только первые 11 мест, то любое количество фишек сверх определенного лимита (скажем, ¼ от всех фишек в игре) становится фактически бесполезным. Более того, зачастую лучшим выбором в такой ситуации будет уйти в сит-аут или скидывать каждую руку.

Однажды мы стали свидетелями интересной истории о суперсаттелите к World Series of Poker Main Event. Герой в раздаче был одним из двух чип-лидеров в турнире, вместе с другим игроком они собрали около 75% всех фишек. В какой-то момент его визави поставил олл-ин на префлопе на 50 больших блайндов. Герой проверил свою руку, там были AA.

В этот момент мы невольно прервали рассказчика вопросом: «А зачем ты вообще смотрел в карты?». Все закончилось коллом от AA и счастливым валетом на терне для JJ его оппонента. Аут. Бэдбит? Не совсем. Даже с таким перевесом по эквити на префлопе, колл с AA все равно был ошибкой.

Почему? Дело в том, что в этой ситуации колл не имеет ничего общего с ожиданием по фишкам. В реальности герой решил сыграть в рулетку на свое ожидание в турнире: уйди он из-за стола, он наверняка бы попал в призы. Ввязываясь в раздачу против другого чип-лидера, он мог лишь подвинуть свои шансы ближе к 100%. Однако на другой чаше весов был вылет из турнира. И хотя у него было 81% на победу, потенциальная выгода от такого розыгрыша не идет ни в какое сравнение с ценой переезда.

Подобные нетривиальные ситуации начинают встречаться особенно часто на поздних стадиях турниров – отношение ожидания по фишкам к турнирному ожиданию становится нелинейным, а стоимость выигранных фишек стремительно уменьшается.

Как мы неоднократно отмечали выше, обычно в турнирах преимущество получает игрок, который ставит олл-ин первым. А в суперсаттелитах это уже не просто рекомендация, а железное правило – даже сильные руки для средних и глубоких стэков превращаются в легкие фолды из-за меньшей стоимости выигранных фишек.

Многостоловые турниры (МТТ)

Для МТТ-турниров характерно очень большое количество участников, которые стартуют за разными столами, а как только из игры выбывает достаточно много людей, столы реорганизуют.

Главной стратегической особенностью здесь является очень малый процент ситуаций, разыгрываемых за короткими столами. Однако как раз эти моменты и создают большую часть винрейта у хороших игроков, ведь столы не разбивают только на баббле, перед финальным столом и, собственно, за финальным столом.

Игра в МТТ часто напоминает кэш, поскольку структура выплат почти всегда плавная и поэтому не требует существенных подстроек от участников. Основной идеей здесь является фактическое равенство ожидания по фишкам и ожидания по призовым. Интересная динамика может развиваться на баббле или на подходе к финальному столу в очень крупных турнирах, но заметного влияния на общую стратегию она не оказывает.

Правда, не стоит думать, что все элементы стратегии в МТТ абсолютно идентичны таковым для кэш-игр. Например, в кэше вы редко окажетесь всего с десятью блайндами на руках или встретитесь с нитом, который скидывает все свои руки, отчаянно цепляясь за призовую зону. Кроме того, иногда стоит обращать внимание и на структуру турнира – об этом мы поговорим ниже.

Турниры с ребаями

Турниры с ребаями и адд-онами позволяют участникам своими силами раздуть призовой фонд, поскольку у них появляется возможность докупать фишки (в случае вылета или после перерыва, но обе эти опции ограничены по времени). Зачастую турниры с ребаями проходят по следующей схеме.

Бай-ин турнира равен *$X* с небольшим рейком (например, $100+9). За эти деньги игроки получают стартовые стэки по *N* фишек. При этом каждый участник может сделать «ребай», если его стэк становится меньше или равен *N*. Таким образом, в самом начале турнира они могут докупить *N* дополнительных фишек, если заплатят *$X*. Однако окно, когда они могут делать ребаи ограничено по времени – обычно это первые три уровня. Как только блайнды вырастут в четвертый раз, игрокам разрешается купить фишки в последний раз (причем вне зависимости от размера стэка), это называется адд-он. Иногда фишки в рамках адд-она предлагаются со скидкой к бай-ину турнира. Например, если каждый игрок в самом начале нашего турнира получил по 1000 фишек, то адд-он на 1500 может стоить всего $100.

Естественно, здесь стоит задаться вопросом: стоит ли делать ребай? Мы можем проанализировать несколько распространенных ситуаций и поговорить о том, разумно ли вкладывать дополнительные деньги в турнир. Во всех случаях мы будем игнорировать риск банкротства и дисперсию, предполагая, что все игроки имеют достаточный банкролл для конкретного турнира.

Случай 1:
Начало периода ребаев. Игрок А теряет весь свой стэк в первой же раздаче. Стоит ли ему докупиться?

Почти наверняка да. Игрок А может рассматривать такую возможность как шанс зарегистрироваться в новом турнире, но уже без рейка. А поскольку он осознанно заплатил за участие в первом турнире (полагая, что имеет преимущество над полем), то и решение сыграть в новом турнире будет рациональным.

Случай 2:
Конец периода ребаев. Игрок А нарастил свой стэк до 6000, при стартовой 1000 фишек. В игре остаются 300 участников, и он думает, что его шанс удвоиться против такого поля составляет примерно 54%. Все ожидают, что общий призовой фонд составит $90,000 (скажем, 200 игроков сделают адд-он, увеличив количество фишек в игре до миллиона). У игрока А есть возможность взять адд-он за $100 и получить 1500 фишек. Должен ли он ею воспользоваться? Каким должен быть его стэк, чтобы он мог отказаться от адд-она?

Ожидание игрока А мы можем оценить через формулы Даббл-апа. Если его в его стэке 6000 фишек, то количество даббл-апов до победы составляет:

$$N(6000) = \log_2 1{,}000{,}000/6{,}000 = 7.38$$
$$N(7500) = \log_2 1{,}000{,}000/7{,}500 = 7.06$$

$$E(6000) = 0.54^{7.38} = (0.0105)\ (90{,}000) = \$953$$
$$E(7500) = 0.54^{7.06} = (0.0129)\ (90{,}000) = \$1{,}162$$

Поскольку новые 1500 фишек увеличивают его ожидание почти на $200, нашему игроку всегда стоит делать адд-он за $100.

Что касается второго вопроса, нам нужно найти такой размер стэка *x*, при котором бы игрок А был безразличен к адд-ону:

$$N(\text{без адд-она}) = \log^2 1{,}000{,}000/x$$
$$N(\text{с адд-оном}) = \log^2 1{,}000{,}000/(x+ 1500)$$

Мы также знаем, что:

$$E(x) = E(x+ 1500) -\$100$$
$$E(x) = (90{,}000)\ (0.54^{N(\text{без адд-она})})$$
$$E(x+ 1500) = (90{,}000)(0.54^{N(\text{с адд-оном})})$$

Из этих уравнений следует вывод: аддон в 1500 за $100 увеличивает ожидание игрока в турнире до момента, пока у него не окажется половина всех фишек в турнире. Фактически, это значит, что при шансе удвоиться в 54% адд-он всегда будет верным решением.

Даже при *C* равном 0.51 ему все равно бы стоило брать адд-он с такой скидкой при любом размере стэка. Хотя если бы адд-ин стоил $150, порог безразличия достигался бы уже при стэке в 8,325 фишек.

Выигрывающий игрок почти во всех без исключения случаях должен использовать адд-оны, если они предоставляются с небольшой скидкой к номиналу. Для приближенных оценок ожидания в таких случаях можно использовать формулы из теории Даббл-апа.

Игра с короткими стэками

За турнирными столами вы нередко увидите игроков, которые всеми силами цепляются за свое место, пока это позволяет структура турнира. Именно поэтому во всех турнирах блайнды постоянно растут. В то же время такая динамика уменьшает относительные стэки игроков до уровней, которые практически не встречаются в кэш-играх. Например, нет ничего необычного в том, что на поздних стадиях турнира по Безлимитному Холдему вам придется работать со стэком всего в 10-15 больших блайндов.

Под «короткими» стэками мы подразумеваем не только те, которые явно уступают стэкам остальных игроков за столом, но также и «короткие» стэки относительно блайндов.

Здесь стоит упомянуть о двух основных типах подстроек. Первая относится к безлимитным турнирам. В какой-то момент, когда ваш стэк становится особенно коротким по отношению к блайндам, вместо оупен-рейза имеет смысл просто идти в олл-ин. Этот порог обычно находится около точки, где любой рейз привязывает вас к коллу пуша из-за хороших шансов банка (2 к 1 или лучше).

Общее правило следующее: если ваш стэк в 6 раз больше банка до начала торговли на префлопе (анте плюс блайнды), то вы все еще можете делать небольшие рейзы; в противном случае правильной стратегией будет олл-ин с соответствующим диапазоном.

Некоторые читатели вспомнят, что эта рекомендация не сильно отличается от той, что мы давали в главе, посвященной игре «Пуш или Фолд», где стэк примерно в 10 блайндов (6 x 1.5 = 9) оправдывал оупен-пуш на префлопе.

Вторая подстройка касается различий в относительной силе рук. Имея короткий стэк вы должны отдавать предпочтение стартерам с хорошим шоудаун вэлью, а не с потенциальными шансами. Кроме того, в свой диапазон можно добавить и руки с блокерами, поскольку они уменьшают вероятность того, что у ваших оппонентов окажется сильная комбинация для колла на префлопе. Мы уже обсуждали особенности некоторых стартеров в главе 12: например, рука T9s включалась в диапазоны олл-ина даже при относительно глубоких стэках благодаря своему эквити, а Ax уменьшал вероятность колла от старшего туза.

Игра с анте

В стаде, а также на средних и поздних стадиях турниров по Безлимитному Холдему, помимо блайндов каждый из игроков ставит анте. Очевидно, что дополнительные деньги в банке оказывают существенное влияние на стратегию коротких стэков.

Скажем, в турнире по стаду у одного из игроков осталось фишек всего 3 или 4 анте. Когда он заходит в раздачу, обычно против него будут играть только один или два оппонента. Но шансы на его анте составят 8 к 1, а на оставшиеся фишки – 1 к 1. Поэтому в турнирах по стаду игрокам следует более охотно избавляться от плохих рук даже имея очень короткий стэк, поскольку чем дольше они ждут, тем больше становится потенциальный «оверлей».

Эту же подстройку можно использовать и в смешанных турнирах. Если в игре с флопом вам не заходит, а в одной из следующих раздач начнется стад, то имеет смысл немного подождать, даже если ваш стэк стремительно съедают блайнды и анте.

В Безлимитном Холдеме анте создают раздутые банки на префлопе – это значит, что оупен-рейз с намерением забрать мертвые деньги становится гораздо более привлекательным решением. С эксплуатационной точки зрения, вы вполне можете найти людей, которые даже на стадиях с большими анте играют настолько зажато, что рейз с любыми двумя будет прибыльной стратегией.

Например, если при блайндах 200-400 и анте 50 за 9-макс столом ваш рейз с позиции дилера на 1000 фишек выиграет банк один раз из двух, вы можете даже не смотреть в свои карты. Ведь потенциальный выигрыш составит 1050 ровно в 50% случаев, а проигрыш – всего 1000.

Бэкинг в турнирах

В четвертой части мы вскользь затронули тему бэкинговых отношений между игроками. Однако тогда мы рассматривали только кэш-игры, в то время как бэкинг гораздо более популярен в турнирах. Мы бы не хотели оставлять такую обширную область без внимания, поэтому ниже постараемся показать, как можно оценивать подобные договоренности.

Самой распространенной формой турнирного бэкинга является открытое соглашение со следующими условиями:

- Бэкер предоставляет игроку банкролл
- Игрок участвует в оговоренных турнирах
- Прибыль разделяется между бэкером и игроком в определенном соотношении
- Игрок получает возможность выйти из соглашения, если он отыграл в плюс (обычно такое происходит после побед на средних или крупных турнирах)

Поскольку в рассматриваемом соглашении банкролл статичен, ему будет соответствовать риск банкротства в 100%. Вся прибыль разделяется между бэкером и игроком, банкролл не увеличивается за счет выигрышей. Однако это не значит, что все бэкинговые соглашения оборачиваются только убытками.

Мы можем попытаться оценить бэкинг на серию турниров, используя выведенную ранее формулу реального размера поля. Скажем, у нас есть некий игрок А с винрейтом 1 бай-ин за турнир. Игрок А хочет получить деньги от игрока В на 70 турниров. После серии игрок В либо покрывает все убытки, либо делит прибыль с игроком А поровну. Будем считать, что в каждый турнир регистрируется 400 участников.

Теперь, используя модели, рассмотренные в этой главе, мы составим некое распределение результатов нашего игрока, полагая, что имеем дело с семьюдесятью турнирами меньшего размера, где победитель забирает весь призовой фонд. Для этого мы воспользуемся множителем турнирной дисперсии k (уравнение 27.4) для турнира на 400 человек. Получим, что при обычной структуре выплат k было бы равно 72, это реальный размер поля.

Оценить вероятность победы в таком турнире нам поможет биномиальное распределение. Так как преимущество игрока А составляет 1 бай-ин, то его шансы на победу составляют примерно 1 к 36.

Соответственно, вероятность того, что он выиграет виртуальный турнир *N* раз, равна:

N	%
0	13.92%
1	27.84%
2	27.44%
3	17.77%
4	8.50%
5	3.21%
6	0.99%
7	0.26%
8	0.06%
9	0.01%
10	0.00%

Конечно же, это не вероятность его победы в реальном турнире на 400 человек – она будет намного меньше. Однако результаты для виртуального турнира (на 72 участника) могут послужить хорошей отправной точкой для анализа.

Составим таблицу интересов бэкера и игрока:

N	***p*** **(N)**	**Исход**	**Доля бэкера**	**Ожидание**
0	13.92%	-70	(70.00)	(9.74)
1	27.84%	2	1.00	0.28
2	27.44%	74	37.00	10.15
3	17.77%	146	73.00	12.97
4	8.50%	218	109.00	9.27
5	3.21%	290	145.00	4.65
6	0.99%	362	181.00	1.80
7	0.26%	434	217.00	0.56
8	0.06%	506	253.00	0.15
9	0.01%	578	289.00	0.03
10	0.00%	650	325.00	0.01
Итого				30.13

Получается, что игрок и бэкер выиграют 70 бай-инов на двоих, однако доля бэкера составит всего 30.13 бай-ина вместо 35. Дело в том, что 4.9 бай-ина он просто «подарит» игроку из-за своего обязательства покрывать убытки. Более того, модель рассмотренного соглашения приписывает бэкеру немного завышенное ожидание, поскольку расчеты с игроком происходят только по завершении серии турниров.

Мы провели 10,000 симуляций серии по 70 турниров для рассматриваемого игрока. Средняя прибыль бэкера составил примерно 32 бай-ина (по всей видимости, дисперсия в доходах носит систематический характер). С другой стороны, когда мы вводили условие, что игрок может потребовать расчета как только он оказывается в плюсе, доля бэкера падала до 27 бай-инов. Таким образом, возможность рассчитаться до конца серии можно оценить примерно в 5 бай-инов из 70 выданных.

«Честность» бэкинговых соглашений – понятие относительное. По большому счету, бэкинговые сделки существуют на открытом рынке и только правила этого рынка могут диктовать «честную» цену таких услуг. Однако бэкерам стоит помнить, что чем короче заключаемое соглашение, и чем чаще игрок может потребовать расчет, тем меньше будет его собственная средняя выгода.

Нужно запомнить

....

- Анализируя турниры с точки зрения теории игр, не стоит забывать, что каждая раздача в них, по сути, не является игрой с нулевой суммой. Когда два игрока выставляются в олл-ин, ожидание всех остальных участников возрастает. Поэтому часто турнирная стратегия сводится к «игре в слабо».

....

- Турнирный бэкинг можно оценивать с помощью формул, которые мы использовали для бэкинга на кэш-игры. Асимметрия результатов делает подобные соглашения очень выгодными для игрока.

....

- Если ваш стэк в турнире по Безлимитному Холдему в шесть раз больше банка на префлопе (анте плюс блайнды), вы можете делать оупен-рейзы небольшого размера. В противном случае лучшей стратегией будет олл-ин.

....

Глава 29

Сообразим на троих: Игры с несколькими участниками

На протяжении почти всей книги мы говорили только об играх, в которых участвовали два человека. Причина, по которой мы настолько сильно ограничили область своих интересов, имела чисто практический характер – такие игры проще решать и анализировать. Кроме того, на средних и высоких лимитах большинство банков разыгрываются между двумя игроками. А это, в свою очередь, значит, что винрейты за такими столами зависят не в последнюю очередь от вашей способности анализировать хэдс-ап банки.

Как мы покажем ниже, многопользовательские игры помимо уже знакомых вам оптимальных стратегий зачастую включают в себя и эксплуатационные элементы, которые значительно их усложняют. Нередко случается так, что в подобных играх существует некая точка равновесия, в которой ни один из участников не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке. В то же время это равновесие можно расшатать и заставить оппонентов поменять свою стратегию. Из-за этого подобные игры очень сложно анализировать, ведь по сути единого решения у них нет. Поэтому в большинстве случаев мы будем лишь стараться понять, как можно противостоять различным эксплуатационным стратегиям в рассматриваемых многопользовательских играх.

Поскольку покер является многопользовательской игрой, нам следует хотя бы познакомить читателей с основами теории игр, применяемой в таких ситуациях. Вспомните определение равновесия в случае с игрой с нулевой суммой, рассчитанной на двух участников (глава 10) – предполагалось, что ни один из них не может улучшить свое ожидание, меняя стратегию игр в одностороннем порядке. Как мы отметили в десятой главе, все хэдс-ап игры с нулевой суммой имеют хотя бы одну пару оптимальных стратегий.

Однако в пятидесятых годах математик Джон Нэш доказал, что все игры с конечным числом участников (с нулевой суммой или нет) имеют как минимум одну точку равновесия. Такие точки называются ***равновесием Нэша***. Естественно, оптимальная стратегия для хэдс-ап игры будет называться равновесием Нэша. Но обычно мы будем употреблять этот термин только в отношении многопользовательских игр.

Равновесие Нэша – это такой набор стратегий для всех игроков, при котором ни один из них не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

В играх один-на-один с нулевой суммой, если нам и удавалось найти несколько точек равновесия, все они оказывались модификациями одной стратегии лишь с незначительными различиями в виде доминируемых стратегических выборов (которые, по большому счету, не имеют никакого значения при игре против идеального оппонента). В многопользовательских же играх мы можем обнаружить сразу несколько полноценных равновесий Нэша, каждое с уникальными параметрами.

Для того чтобы продемонстрировать это, давайте вернемся к игре в «слабо» из главы 28:

	Игрок B	
Игрок A	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	(-10, -10)	(1, -1)
Свернуть	(-1, 1)	(0, 0)

Мы можем привести эту игру к нулевой сумме, введя в нее пассивного игрока G, который не может выбирать свою стратегию, однако на него распространяются исходы от противостояния двух основных игроков:

	Игрок B	
Игрок A	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	(-10, -10, +20)	(1, -1, 0)
Свернуть	(-1, 1, 0)	(0, 0, 0)

Такой прием можно использовать для любой игры с ненулевой суммой. Как вы можете помнить, в главе 28 мы нашли три точки равновесия для этой игры:

- Игроки A и B сворачивают по 90% раз и идут до конца 10% раз
- Игрок A идет до конца 100% раз, игрок B сворачивает 100% раз
- Игрок B идет до конца 100% раз, игрок A сворачивает 100% раз

Несложно проверить, что при каждой из этих стратегий ни один игрок не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Поиск равновесия Нэша является важным этапом при анализе игр. Почти во всех ситуациях точка равновесия представляет собой наилучшую стратегию для каждого участника. В хэдс-ап играх стратегии, которые находятся в точке равновесия по Нэшу, являются оптимальными. Однако в многопользовательских играх равновесие Нэша само по себе не описывает сильнейшую стратегию из возможных. Этому существует множество причин, главной из которых является возможность создавать ***альянсы***.

Вспомните настольные игры – в них многие люди стараются найти себе союзников для достижения неких общих (предположительно) целей. Получается, что несколько игроков могут «сговориться», чтобы увеличить совместное ожидание за счет других участников. Зачастую существует сразу несколько конфигураций подобных союзов, однако их практически невозможно анализировать с точки зрения эксплуатационных или оптимальных стратегий.

Мы можем условно разделить альянсы на два вида: «сильные» и «слабые». Они отличаются количеством закрытой информации, которой игроки делятся между собой, а также стремлением максимизировать ожидание группы или ожидание каждого участника в отдельности. «Сильные» альянсы, которые подразумевают обмен секретной информацией и действия, направленные против своих личных интересов (которые, в то же время, играют на руку всей группе), запрещены правилами покера. Например, команда из нескольких игроков может использовать скрытые сигналы для манипуляций с размерами ставок и очередностью экшена. Или два игрока могут договориться об обмене долями в одном турнире, а затем играть друг против друга вполсилы, чтобы выровнять свои стэки и, таким образом, максимизировать совместное ожидание.

Такое поведение разрушает игру, поскольку участники больше не действуют исключительно в личных интересах (в рамках конкретной игры). Несколько сговорившихся игроков могут выкачивать из стола огромное количество денег без особых проблем, хотя сумма их личных ожиданий никогда бы не обеспечила такой прибыли.

Поэтому чаще всего мы будем попросту игнорировать «сильные» альянсы, поскольку они идут вразрез с правилами игры. Однако вам никогда не стоит забывать про их существование.

В то же время «слабые» альянсы не нарушают никаких правил. Напротив, они являются неотъемлемой частью покера. Самым очевидным примером будет исключительно лузовая и пассивная игра на низких лимитах. Зачастую игроки за такими столами имеют как бы негласную договоренность, что все будут играть пассивно на ранних улицах торговли, чтобы получить больше удовольствия от покера – поэтому, скажем, от лимпа с 75o на префлопе не случается ничего страшного. Однако подобная стратегия приводит к катастрофическим последствиям в тайтовых и агрессивных составах, где игроки совсем не разделяют подобную философию. Это и называется «негласным» или «слабым» альянсом.

Некоторым читателям может показаться, что негласные альянсы не играют значимой роли с эксплуатационной точки зрения. В конце концов, если мы можем правильно читать руки и стратегии оппонентов, мы все равно будем выигрывать деньги, вне зависимости от их наклонностей (если только игра специально не заточена против нас). Тем не менее, в некоторых случаях все обстоит ровно наоборот.

Пример 29.1

Давайте рассмотрим следующую вспомогательную игру.

За столом три игрока, каждый из них ставит анте в размере $10 – перед началом раздачи банк составляет $30. Всем сдается по одной карте из стандартной колоды, у одного из участников есть баттон, который передается по кругу. В этой игре предусмотрен один раунд торговли: можно поставить $30, либо сделать чек. Как только один из игроков сделал ставку, остальные могут либо уравнять, либо сбросить свою руку. На шоудауне все оставшиеся в раздаче участники показывают свои карты. Игроки с А или К на руках делят банк. Если А или К ни у кого нет, то банк поровну делится между всеми игроками, увидевшими шоудаун.

Это достаточно простая и симметричная игра. Однако теперь представьте, что вас в нее пригласили сыграть два друга со следующими условиями: они заранее объявляют стратегии, по которым будут играть, и обещают предоставлять любую информацию (показывать руки, которые они скинули и т.п.), чтобы подтвердить, что они действительно следуют этим стратегиям. Казалось бы, самое время обобрать их до нитки, так что вы садитесь за стол.

Игрок слева от вас говорит:
Я буду чекать со всеми руками и уравнивать только с А или К.

Игрок справа от вас говорит:
Я буду ставить со всеми руками и уравнивать все ставки.

Несложно понять, что каждая из этих стратегий в отдельности – истинный рай для эксплуатации. Так что мы без труда определим точный порядок своих действий против каждого из оппонентов и рассчитаем ожидание. Мы можем свести собственную стратегию к вопросу о том, делать ли колл ставки от игрока справа (назовем его ***маньяком***). С нашей же стороны ставка с любой рукой будет фактически эквивалента коллу его бета.

Естественно, если у нас на руках А или К, мы всегда будем делать колл. Однако что делать, если у нас оказалась какая-то другая карта?

Всего в этой игре возможны три сценария:

Ситуация 1: У нас баттон
В этом случае, игрок слева (назовем его ***скала***) всегда сделает чек, а его сосед всегда поставит.

Ситуация 2: Баттон у скалы
Маньяк всегда сделает ставку первым.

Ситуация 3: Баттон у маньяка
И мы, и скала сделаем чек, маньяк всегда поставит.

В каждом из этих случаев мы не получаем никакой информации о руках оппонентов, и каждый раз мы должны принять вполне определенное решение.

Когда у нас нет A или K, ни у одного из наших оппонентов их также не окажется $(^{43}/_{51})(^{42}/_{50})$ раз или около 70.8%. В оставшихся 29.2% случаев, у нас будет 0% эквити. Когда ни у одного из оппонентов нет A или K, если мы сделаем колл с пустой рукой, то банк составит $90 (ставка маньяка плюс наш колл) и мы заберем из него $45.

$$< \textit{Колл} > = (0.708)\ (45) + (0.292)\ (0) - \$30 = \$1.87$$
$$< \textit{Фолд} > = 0$$

По всей видимости, лучшей стратегией для нас будет колл с пустыми руками, поскольку наше ожидание выше. Посчитаем математическое ожидание для всей игры (здесь «С» значит «скала», «М» - «маньяк», «П» - пустая рука, «Н» - натс, то есть A или K):

Наша рука	**Руки оппонентов**	**Результат (с анте)**	**Вероятность**	**Ожидание**
A или K	У обоих Н	$0	0.25%	0$
A или K	С-Н, М-П	+ $20	1.86%	+$0.372
A или K	С-П, М-Н	+ $5	1.86%	+$0.093
A или K	У обоих П	+ $50	11.41%	+$5.707
Пустая рука	У обоих П	+ $5	59.93%	+$2.996
Пустая рука	1 или 2 Н	- $40	24.69%	-$9.875
Итого			100%	**-$0.707**

Что это? Как мы можем проигрывать, зная, что оба оппонента следуют заведомо слабым стратегиям, а игра полностью симметрична?

Все дело в том, что оба наших оппонента находятся в негласном союзе. Играя именно по таким стратегиям, они фактически действуют только против игрока между ними. При этом они никак не передают друг другу информацию о своих картах или планируемых действиях. Вполне вероятно, хотя мы еще и не можем этого доказать, что похожие ситуации существуют в покере, где за столом находятся всего три игрока.

Интересно, что третий участник в такой игре может решить, кто из его оппонентов выйдет в плюс. Если он будет играть как скала, то маньяк выиграет больше всех. Если же он сам решит играть в стиле маньяка, то игрок-скала окажется в плюсе. В определенном смысле, у вас есть возможность вступить в негласный альянс с одним из друзей, играя по противоположной стратегии. Однако увеличить свое ожидание вы уже никак не сможете.

Естественно, это далеко не единственно возможный вид альянса. Иногда в одной отдельно взятой раздаче можно обнаружить сразу несколько альянсов, и все они будут развиваться параллельно. В следующем примере мы покажем, что выбор конкретного альянса не всегда должен быть продиктован EV соображениями:

Представьте себе следующую ситуацию в Холдеме (все карты открыты, банк среднего размера):

Игрок A: A♠ A♣
Игрок B: A♥ Q♥
Игрок C: 8♥ 7♥
Доска: 9♥ 6♥ 2♦

Давайте попробуем найти возможные формы альянсов на такой доске.

Предположим, что готовая рука и стрит-флэш дро решают играть сообща. Тогда дро сделает ставку, тузы ответят рейзом – в таком случае натсовое флэш-дро окажется в очень сложной ситуации. У него только пять аутов на терн и прямые шансы банка не позволяют делать колл.

С другой стороны, готовая рука и натсовое флэш-дро могут попытаться получить четыре ставки из стрит-флэш дро (имея между собой 79% эквити): у игрока C (на первый взгляд) восемь аутов, а это значит, что у него есть шансы на колл.

Наконец, два флэш-дро могут сыграть против готовой руки – тогда натсовое дро сделает фолд, поскольку никак не улучшает эквити в таком альянсе, а стрит-флэш дро получает больше чистых аутов и уравнивает одну ставку от тузов.

Мы надеемся, что теперь вам стало ясно, почему так сложно анализировать многопользовательские игры: даже с открытыми картами оптимальная стратегия для всех игроков может оказаться совсем не однозначной из-за возможных альянсов.

Подобными проблемами сегодня занимается новая ветвь математики – теория кооперативных игр, изучающая как раз игры, в которых участники могут объединяться для увеличения своего ожидания. Ниже мы ограничимся лишь краткой справкой, поскольку это не является темой настоящей главы.

Этот раздел теории игр обычно рассматривает игры, где разрешены ***внеигровые выплаты***, то есть договоренности между участниками, которые реализуются вне текущей ситуации и служат вознаграждением за вступление в альянсы. В покере такие выплаты могут принимать форму обмена фишками или игры из одного банкролла, хотя многие профессионалы очень неодобрительно относятся к такой практике.

Кроме того, в теории кооперативных игр зачастую фигурирует условие итеративности. Иными словами, предполагается, что одна и та же игра происходит снова и снова, а участники реагируют на новую информацию, полученную в предыдущем раунде.

Хотя оба этих условия могут встречаться в покере, наиболее подходящим, конечно же, является второе. Важной концепцией для кооперативных игр является вектор Шепли – грубо говоря, это среднее ожидание от всех возможных альянсов, в которых может поучаствовать конкретный игрок.

На этом, пожалуй, стоит закончить краткий экскурс в теорию кооперативных игр – больше информации вы сможете почерпнуть из специализированных статей и книг.

Во второй части этой главы мы обсудим (обратите внимание, что мы специально не употребляем слово «решим») три многопользовательские игры. Первые две из них были придуманы Крисом Фергюссоном и предполагают, что один игрок уже находится в олл-ине.

Если в такой ситуации нет сайд-пота (особенно это касается турниров), то обычно игроки стараются: а) дочекать до вскрытия, таким образом получив шанс выбить игрока в олл-ине; б) не ставить с совсем слабыми руками без блокеров, поскольку в банке нет денег, за которые бы стоило бороться блефами. Но здесь есть нюансы…

Пример 29.2 – Игра без сайд-пота #1

Три игрока: X, Y и Z
Стад, только что сдали ривер

Мы обсудим решение только для одной улицы, хотя непосредственно за столом предшествующий экшен, естественно, имел бы не последнее значение.

X: (??) A♥ A♦ A ♣ A♥ (?)
Y: (??) 5♦ 6♦ 7 ♦ 8♦ (?)
Z: (??) K♥ K♣ K♦ K♠ (?)

Игрок Z в олл-ине, размер банка *P* ставок
У игроков X и Y еще есть фишки
Игра на полной улице, Лимитный Стад

Поскольку ривер уже сдан, ни игрок X, ни игрок Z никак не могут улучшить свои руки, поэтому игрок Y фактически оказывается ясновидящим и знает, закрылся его стрит-флэш или нет. Игрок X никогда не должен ставить сам, однако частота его коллов обязана сделать оппонента безразличным к блефу. В то же время, игрок Y попросту не может быть «безразличен к блефу», ведь если его стрит-флэш не закрылся, и он все равно поставит, то даже когда игрок X скинет свои карты, Y проиграет квадсу. А это значит, что игроку X никогда не стоит делать колл.

Равновесие Нэша для этой игры выглядит следующим образом: игрок Y ставит на вэлью со всеми стрит-флэшами, а игрок X всегда скидывает в ответ на любую ставку. При такой стратегии ни один из оппонентов не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Однако давайте представим, что игрок Y все же изредка блефует. Каждый раз, когда он это делает, игрок X скидывает свои карты, и Z забирает банк. Фактически, игрок Y не получает ничего, только отдает банк игроку Z. Вполне вероятно, что такой поворот событий не понравится игроку X, ведь он бил руку своего оппонента! Тогда он может начать иногда уравнивать ставки, надеясь выровнять ситуацию.

Но в таком случае ожидание игрока Y сразу же возрастет, поскольку теперь игрок X будет отдавать немного денег и его вэлью-бетам. Более того, игроку Y даже не стоит пытаться блефовать оптимальное число раз – достаточно показать пару блефов на шоудауне. Игрок Y никак не может пострадать от действий игрока X, даже если станет играть не по равновесной стратегии.

Этот короткий пример демонстрирует как игрок с инициативой может отклониться от точки равновесия, чтобы заставить своих оппонентов реагировать в неправильном ключе и терять на этом часть своего математического ожидания.

Пример 29.2 – Игра без сайд-пота #2

Три игрока: X, Y и Z.
Рука каждого игрока сдается из распределения [0, 1]
Игрок Z поставил анте и оказался в олл-ине, в банке 9 ставок

Мы решим эту игру для фиксированного размера банка. Решение для общего случая выглядит громоздко, и из-за этого мы не сможем доступно объяснить основную идею примера.

У игроков X и Y еще есть фишки
Игра на половине улицы.

Давайте рассмотрим стратегию игрока Y, когда игрок X делает чек втемную. Очевидно, он будет ставить со своими лучшими руками на вэлью, надеясь получить колл от средних рук оппонента. Также он иногда будет блефовать с худшими руками, однако в таком случае ему нужно думать и о руке игрока Z (как мы это показали в прошлом примере).

Можно ли говорить, что и в этой игре человек с инициативой (игрок Y) вынужден ставить только на вэлью? На первый взгляд, такая стратегия может быть эксплуатирована игроком X – ему стоит лишь начать скидывать свои пограничные руки. Значит, игрок Y должен найти некую контрстратегию. Пока ясно только одно – у игрока X будет порог для колла ставок от оппонента.

Обозначим этот порог через *x*, а порог игрока Y для вэлью-бетов через y_1. Предположим, что игрок Y решит ставить с руками хуже, чем y_1 (естественно, эти две области будут разделены диапазоном чека). Назовем их «блефами», однако здесь значение этого слова несколько иное – фактически мы говорим о полублефах, поскольку игроку Y нужно еще выиграть у руки Z, чтобы забрать банк.

Игрок X будет уравнивать только когда его ожидание больше нуля. Он никогда не подумает о колле с руками, которые не бьют блефы оппонента, так что порог *x* точно будет между порогом y_1 и точкой, где начинаются блефы игрока Y (назовем этот диапазон Y_B, а его длину – *w*).

Интересно, что в этой игре диапазон блефа не будет равен диапазону вэлью-бетов, умноженному на α, так как игрок в олл-ине уменьшает ожидание от успешного блефа.

Ожидание игрока X от колла в пороге *x* составляет:

Рука Y	Рука Z	Вероятность	<X, колл>
$[0, y_1]$	[0, 1]	y_1	- 1
Y_B	[0, x]	$w\ (x)$	+ 1
Y_B	[x, 1]	$w\ (1 - x)$	+ 10

Общее ожидание игрока X от колла в пороговой точке должно быть равно нулю (так как должно соблюдаться условие безразличия к коллу):

$$wx + 10\ (w\ (1 - x)) = y_1$$
$$wx + 10\ w - 10\ wx = y_1$$
$$w\ (10 - 9x) = y_1$$
$$w = y_1\ /\ (10 - 9x)$$

На верхней границе диапазона блефа игрока Y (пока будем называть эту точку *y*) имеем:

Рука X	Рука Z	Вероятность	<Y, блеф>
[0, x]	[0, 1]	x	- 1
[x ,1]	[0, y]	y (1 –x)	0
[x, y]	[y, 1]	(y – x) (1 – y)	+ 9
[y, 1]	[y, 1]	$(1 - y)^2$	0

$x = 9 (y - x) (1 - y)$
$x = 9y - 9x - 9y^2 + 9xy$
$10x = 9 (1 + x) y - 9y^2$
$9y^2 - 9 (1 + x) y + 10x = 0$
$y^2 - (1 + x) y + 10x / 9 = 0$
$y = (1 + x) / 2 \pm (\sqrt{1+x)} 2 - 40x/9) / 2$

Полученное уравнение квадратично, поскольку игрок Y оказывается безразличным к блефу и чеку в двух точках сразу (верхняя и нижняя границы диапазона блефа соответственно).

Заметим, что уравнение выше полностью описывает весь диапазон для блефа игрока Y – его центр находится в точке *(1 + x)/2*, а ширина равна $(\sqrt{(1+x)} 2 - 40x)/9$

$w = (\sqrt{(1+x)} 2 - 40x)/9$

Составим уравнение для порога y_1:

Рука X	Рука Z	Вероятность	<Y, вэлью-бет>
$[0, y_1]$	[0, 1]	y_1	- 1
$[y_1, x]$	[0, 1]	$x - y_1$	+ 1
[x, 1]	[0, 1]	(1 – x)	0

Это самое легкое из уравнений в нашем примере. Как и раньше, игрок Y должен ставить ровно с половиной диапазона колла игрока X.

$y_1 = x - y_1$
$y_1 = {}^1/_2 x$

Таким образом, мы получили три уравнения безразличия:

$w = y_1 / (10 - 9x)$
$y_1 = {}^1/_2\ x$
$w = (\sqrt{1+x)} 2 - 40x)/9$

Решим систему:

$w = x / (20 - 18x)$
$x / (20 - 18x) = (\sqrt{1+x} 2 - 40x)/9$
$x \approx 0.2848$

Зная порог *x*, мы можем найти оптимальные стратегии для каждого игрока. Так, центр диапазона блефа у Y будет находиться в точке 0.6424 (его общая длина составит 0.0190), а y_1 окажется примерно в 0.1424.

Как вы могли заметить, коэффициент α для этой игры несколько выше, поскольку есть сдерживающий фактор в виде игрока Z. Чтобы сделать своего оппонента безразличным к выбору действия игрок Y будет ставить на вэлью около 14% рук и блефовать только с 1.9%. Это значит, что его α равна примерно $^{1}/_{10}$. При этом стратегия игрока X уже предполагает не колл с 9/10 рук (как того требует правило, выведенное нами в третьей части книги), а лишь с 28.5%.

Эти диапазоны и составляют равновесие Нэша для рассмотренной ситуации – ни игрок X, ни игрок Y не могут улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Теперь мы можем поговорить о сложностях многопользовательских игр более предметно. Давайте представим, что игрок Y решил блефовать чаще, чем того требует равновесная стратегия – теперь его диапазон *w* составляет 3% рук, вместо 1.9%. Как мы отметили выше, игрок Y был безразличен к блефу на обоих концах Y_B. Тогда любое расширение этого диапазона автоматически уменьшит его ожидание.

Игрок X немного выиграет от более частных блефов своего оппонента. Однако кто по-настоящему сорвет куш, так это игрок Z, ведь все руки, которые игрок Y будет выбивать, находятся между порогом колла *x* и порогом блефа. Таким образом, каждый раз в ситуации $X > Z > Y$, когда игроку Y удается выбить сильнейшую руку X, игрок Z с радостью заберет весь банк, который бы иным образом ему не достался. В итоге игрок X теряет больше других, а его ожидание распределяется между игроком Y и игроком Z.

Но он может попытаться улучшить свое положение (не забывайте, что игрок Y разрушил равновесие) следующим образом. Скажем, игрок X начинает уравнивать с большим количеством средних рук, то есть сдвигает свой порог *x*. Теперь он будет чаще оказываться в раздачах, где $X > Z > Y$, но здесь есть и обратная сторона: придется отдавать какие-то деньги вэлью-бетам игрока Y. С точки зрения последнего, широкий диапазон колла игрока X как нельзя кстати – он выигрывает ставку примерно 14.2% раз, проигрывает ставку в 3%, а также около трети от банка в 9 единиц, плюс иногда он успешно выбивает оппонента из банка, когда у игрока Z слабая рука. Все эти факторы дают игроку Y прибыль от участившихся коллов примерно в 2% от размера ставки. В свою очередь, игрок X отбивает часть этих денег через игрока Z.

Что мы имеем в итоге? Когда игрок Y начинает чаще блефовать, игрок X стремится максимизировать свое ожидание, но больше всех выигрывает от таких подстроек Z. Причем чтобы сделать такой альянс (между Y и Z) еще более прибыльным, игроку Y стоит просто сообщить своим оппонентам, что он собирается ставить на блеф с большим количеством рук, надеясь, что игрок X решит эксплуатировать такую стратегию. В то же время, игрок X получает возможность образовать альянс с игроком Y против Z, однако ценой такого хода будет передача части своего ожидания игроку Y.

Здесь важно отметить, что блеф в раздачах без сайд-пота является достаточно опасным занятием, поскольку совершенно неясно как воспримут это остальные игроки за столом. Среди возможных последствий есть как репутационные риски (такие ситуации очень похожи на чип-дампинг), так и ущерб вашему имиджу за столом (что может сказаться на успешности блефов в поздней части турнира). Основной целью этого примера является демонстрация неочевидных последствий от действий игроков, участвующих в «защищенном» банке, в частности как ожидание в раздаче может перетекать от одного альянса к другому.

Пример 29.4 – Игра против маньяка-ясновидящего

Три игрока: X, Y и Z
Игрок Z ясновидящий
У игроков X и Y одинаковые руки
Игра на половине улицы
Игрок X и Y могут либо сделать чек или колл/фолд
Игрок Z может поставить 1 единицу
Размер банка 9 единиц
У всех игроков остаются фишки

Как вы могли заметить, мы часто используем размер банка в 9 единиц. Объяснение простое – в этом случае коэффициент a (из уравнения 11.1) равен $^1/_{10}$.

Во-первых, мы можем найти равновесие Нэша для этой игры. Из опыта с играми на половине улицы, вы уже можете угадать, что игрок Z будет ставить на вэлью с натсами и какой-то частью блефов, причем в такой пропорции, что два его оппонента окажутся безразличными к выбору действия. Интересно, что у этой игры есть сразу несколько точек равновесия Нэша. Более того, любая стратегия игроков X и Y, которая удовлетворяет следующим условиям, и будет равновесной:

- Игрок Z получает коллы не чаще $^9/_{10}$
- Игрок Y никогда не делает оверколл после игрока X

Первое условие достаточно стандартно – оно делает игрока Z безразличным к блефам. Второе касается шансов банка для оверколлера: если игрок X делает колл первым, игрок Y может только поделить банк и получить 5 ставок от своего оверколла в случае блефа со стороны Z. Но так как это случится всего 1 раз из 10, оверколл становится убыточным решением.

Пусть равновесной стратегией будет колл от игрока X в 50% случаев и колл от игрока Y в 80% случаев (когда X скидывает свои карты).

Как мы уже показали выше, игрок Z может попытаться нарушить равновесие, начав блефовать чаще. Предположим, что он решит изменить соотношение вэлью бетов к блефам с $^1/_{10}$ на $^1/_8$. Теперь игрок X будет эксплуатировать его, делая колл в 100% случаев, вскрывая неоптимальные блефы своего оппонента. К своему сожалению, игрок Y все еще не сможет делать оверколлы из-за шансов банка. И это играет против Z: он теряет ожидание на своих неудавшихся блефах и при этом не выигрывает достаточное количество денег с натсами.

Тем не менее, пусть что-то заставило игрока Z решить, что он должен блефовать еще больше. И он говорит своим оппонентам, что теперь начнет ставить с пустыми руками в три раза чаще, чем это предполагает равновесная стратегия (то есть с коэффициентом $^3/_{10}$). Естественно игрок X продолжит уравнивать со всеми руками.

Но давайте посмотрим на эту ситуацию с точки зрения игрока Y: $^3/_{13}$ раз, когда игрок Z блефует, игрок Y может выиграть 5 ставок, делая оверколл. Оставшиеся $^{10}/_{13}$ раз он увидит натс и потеряет одну ставку. Значит, у игрока Y теперь есть достаточно шансов банка на оверколл.

Кому такая игра будет более выгодна? Конечно же игроку Z! Теперь $^{10}/_{13}$ раз, когда он ставит на вэлью, он получит две ставки от колла и оверколла, в то время как потеряет всего одну со всеми своими блефами. Получается, что он выиграет $^{17}/_{10}$ ставки (вместо $^9/_{10}$) каждый раз, когда у него будет вэлью рука.

Итак, если игрок Z следует равновесной стратегии, альянсы не создаются. Но если он начинает блефовать немного чаще, в игре появляется альянс между X и Z против Y. Если же частота его блефов увеличивается еще больше, то уже Y и Z вступают в альянс против X. Фактически, игрок Z может значительно улучшить свое ожидание, блефуя с большим количеством рук, чем того требует равновесная стратегия (при условии, что его оппоненты будут стараться максимизировать свое ожидание).

В этой главе мы рассмотрели лишь несколько многопользовательских игр, однако мы надеемся, что вы поняли основную идею: всегда можно найти равновесие Нэша для заданной игры, однако зачастую один или несколько участников могут нарушить это равновесие, меняя свои стратегии. И если их оппоненты подстраиваются, пытаясь максимизировать свое ожидание (через эксплуатацию неоптимальных стратегий), в игре непременно формируются альянсы, которые вполне могут принести существенную выгоду одному или нескольким участникам. Конечно же, такая ситуация в принципе невозможна в хэдс-ап играх с нулевой суммой, поскольку в них ожидание, приобретенное одним игроком непременно теряется другим.

Нужно запомнить

…………………………………………………………………………………………………..

- Многопользовательские игры гораздо сложнее, чем хэдс-апы, поскольку в них участники могут вступать в альянсы с целью максимизировать общее ожидание. Такие «слабые» альянсы не запрещены правилами игры. Более того, они являются неотъемлемой частью покера.

…………………………………………………………………………………………………..

- Равновесие Нэша – это такой набор стратегий для всех игроков, при котором ни один из них не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

…………………………………………………………………………………………………..

- Зачастую в раздаче могут возникнуть сразу несколько альянсов. Каждый игрок, в свою очередь, должен решить к какому из них примкнуть и как переманить на свою сторону других участников.

…………………………………………………………………………………………………..

- Мы разобрали несколько примеров, где один из игроков расшатывал равновесие таким образом, что только он оставался в выигрыше, а его оппоненты могли наказать его за перераспределение ожидания лишь каким-то действием с отрицательным EV.

…………………………………………………………………………………………………..

- Как правило, лучший способ перераспределить равновесие в игре – это начать блефовать гораздо чаще, чем того требует равновесная стратегия.

…………………………………………………………………………………………………..

Глава 30

Складываем паззл: Математика и вы

На страницах этой книги мы рассмотрели огромное множество покерных ситуаций. Например, мы поговорили о вспомогательных играх, из которых пытались извлечь определенные уроки, а затем использовали для решения реальных раздач. Мы даже привели решение для одной часто встречающейся дилеммы как в кэш-играх, так и в турнирах – «Пуш или Фолд» в главе 12.

И хотя мы много рассуждали о теории, все же «Математика Покера» - это книга о том, как играть в покер. В онлайне, в казино, где угодно. Покер, несомненно, является привлекательной игрой не только с денежной, но и с интеллектуальной точки зрения. Поэтому не исключено, что мы бы посвятили его изучению немалое количество времени даже если бы не получали от него столь очевидную финансовую выгоду. Однако в отличие от шахмат или го, мы играем покер преимущественно из-за денег, и поэтому каждая глава этой книги нацелена не столько на удовлетворение нашего интереса в сложных математических паззлах, сколько на совершенствование наших (а теперь уже и ваших) практических навыков.

Поэтому было бы неправильно закончить эту книгу, не обсудив наш подход к покерной стратегии и философии (большая часть которых основана на изложенных в этой книге моделях), в надежде, что он поможет читателю с очень непростой задачей – применением принципов и следствий из теории игр за покерным столом.

Главная проблема, с которой вы столкнетесь, заключается в том, что на сегодняшний день в покере не существует готовых оптимальных стратегий даже для распространенных ситуаций. Более того, в играх с несколькими участниками таких стратегий попросту нет. Поэтому вам стоит сконцентрироваться не на громоздких вычислениях, а на правильной оценке и интерпретации возможных форм оптимальной стратегии для каждой ситуации. Это, в свою очередь, требует абсолютно особого процесса принятия решений, который нужно освоить и научиться применять на практике. Об этом мы и поговорим ниже.

Темами этой главы станут четыре области, тактические и стратегические решения в которых поддаются численному анализу и интерпретации через теорию игр:

- Агрессия
- Баланс
- Стратегия
- Анализ

Каждая из этих областей по-своему важна, однако между ними существует тесная взаимосвязь, которую нельзя игнорировать.

Агрессия

Мантрой всех без исключения покерных авторов в последнее время стала агрессия и пропаганда агрессивных стилей игры. Как часто вы слышали, что только агрессией и ничем иным можно зарабатывать деньги в покере? Однако к нашему удивлению, многие игроки, даже из числа крепких профессионалов, останавливаются в своем развитии на том уровне покерной агрессии, где они чувствуют себя наиболее комфортно. Причем любые стратегии, которые оказываются более пассивными, чем их собственная, они клеймят «слабыми», а более агрессивные – «маниакальными».

Интересно то, что оба автора этой книги не раз подвергались критике за свою чрезмерную агрессию за столами, однако такая стратегия находит множество подтверждений в различных моделях. Когда мы говорили о вспомогательных играх (в частности о тех, что имеют наиболее тесные связи с реальными ситуациями), мы не раз отмечали, насколько агрессивными оказывались оптимальные стратегии. Так, например, в игре «Пуш или Фолд» со стэком в 10 больших блайндов диапазон пуша расширялся до 58.3%. Многие читатели наверняка тогда заметили при себя, что эта стратегия почти наверняка окажется убыточной. Однако в турнирах и кэш-играх мы раз за разом с удовольствием наблюдали, как даже крепкие игроки не могли найти способ эксплуатировать подобные диапазоны, и совершали гораздо больше ошибок, чем против стандартной игры. Как мы определили успешность стратегии? Количество фактически выигранных денег в хэдс-апах различных турниров у нас оказалось значительно больше ожидания по фишкам.

Когда мы рассматривали игру на половине улицы против ясновидящего (пример 20.5), мы показали, как скрытая рука могла часто полублефовать даже находясь далеко позади. В [0,1] хай-лоу игре (пример 18.1) было продемонстрировано, что второй игрок должен ставить с 75% своих рук после чека оппонента. И так далее. Анализируя оптимальные стратегии, мы постоянно сталкиваемся с удивительным фактом: они всегда предполагают очень высокий уровень агрессии. Естественно, в некоторых играх пассивные стратегии оказываются более предпочтительными. Однако это касается в основном ситуаций с небольшими анте и блайндами (по отношению к размерам ставок). В остальных же случаях агрессия является главным ингредиентом оптимальной игры.

Здесь также стоит упомянуть о цене ошибок. Если вдруг окажется, что вы играете чуть более агрессивно, чем требуется, это не будет стоить вам столько же, сколько частые фолды с сильными руками. Когда вы скидываете свои карты, вы отдаете весь банк агрессору, в то время когда вы делаете бет, то рискуете лишь своей ставкой.

Это правило можно применить во многих формах покера, однако наиболее явно его следствия проявляются в лимитных играх. Игроки, которые предпочитают чаще избавляться от своих рук, когда колл стоит всего одну ставку, совершают гораздо более грубые и эксплуатируемые ошибки, чем их оппоненты, которые иногда ставят с неоправданно широкими диапазонами. Более того, на наш взгляд средние и высокие лимиты кишат людьми, которые только и ждут возможности сделать «сложный фолд». В результате агрессивная стратегия, которая сама по себе может считаться хорошим отпором даже против опытных игроков, одновременно эксплуатирует наиболее распространенные ошибки слабых оппонентов. Это и есть одна из наиболее важных составляющих оптимальной игры: вам не только стоит искать точки безразличия в собственных диапазонах и стремиться к нулевому ожиданию, но также и извлекать вэлью из ошибок других игроков. Без этого никакая стратегия не может считаться оптимальной.

Поэтому стремление к максимальной агрессии – одна из основ нашей покерной философии. Мы часто защищаем блайнды (в играх с флопом) с пограничными руками, а затем ставим оппонентов в затруднительное положение на поздних улицах. Когда перед нами встает непростое решение, или когда нам кажется, что оба варианта наших действий имеют примерно нулевое ожидание, мы часто выбираем более агрессивную линию, просто из принципа. Мы нередко кидаем в банк фишки в ситуациях, где многие просто отдают банк – это особенно хорошо работает в турнирах, где подобная стратегия создает имидж непредсказуемого игрока, с которым мало кто захочет иметь дело на баббле или поздних стадиях. Во всех этих случаях мы стараемся эксплуатировать оппонентов, но не забываем и об опасности ответной эксплуатации.

Баланс

Некоторые неоптимальные стратегии оказываются убыточными просто потому что их легко эксплуатировать. Другие не работают из-за своей пассивности или наоборот, излишней агрессии. В качестве примера представьте себе [0,1] игру на половине улицы: если оба противника играют оптимально, то игрок в позиции поставит с натсами и строго определенным количеством блефов. Теперь давайте подумаем, как выглядят неоптимальные стратегии в подобной игре.

Во-первых, игрок в позиции может начать меньше блефовать, оставив частоту вэлью-бетов на прежнем уровне. Тогда правильным ответом со стороны его оппонента будут более тайтовые коллы, поскольку он уже не получает достаточного количества денег с блефов и при этом все так же проигрывает натсам.

Во-вторых, игрок в позиции может сохранить пропорции своих блефов и вэлью-бетов (так что они все равно будут находиться в соотношении α), но уменьшить их общее число. Интересно, что в таком случае его оппонент окажется бессилен: здесь нет эксплуатирующей стратегии, поскольку он все еще безразличен к коллу со своими средними руками. Поэтому такая подстройка со стороны второго игрока хоть и неоптимальна, но все равно дает неэксплуатируемую стратегию. Но есть важный нюанс – его оппонент получает дополнительные деньги от такой игры, поскольку теперь игрок с инициативой не извлекает маскимальное вэлью со своими сильными стартерами.

Нельзя забывать, что термин «баланс» может применяться только к стратегиям, но не к отдельным рукам, поскольку мы редко рассматриваем розыгрыш конкретной раздачи в отрыве от всего диапазона. Поэтому для каждой ситуации мы должны создавать определенную стратегию, где каждой руке из диапазона будет соответствовать своя линия. В идеале они будут отвечать следующим критериям:

- Каждая линия предполагает такой набор рук, при котором мы будем получать прибыль от любого ответа оппонента. Представьте, что мы рейзим ставку другого игрока на терне (в Холдеме). Он, в свою очередь, может отреагировать тремя способами: ре-рейз, колл или фолд. Наши натсы, естественно, хотели бы получить экшен, а вместе с ним и стэк оппонента, поэтому мы точно включим их в наш диапазон для рейза. Точно так же просто сильные руки предпочтут получить колл, в то время как с полублефами мы бы хотели увидеть фолд. Мы можем сконструировать диапазон так, чтобы каждый тип рук был представлен в нужной пропорции. Если мы все сделаем правильно, оппонент никак не сможет нас эксплуатировать – все деньги, которые мы потеряем со слабыми руками, будут отбиты с помощью натсов.
- Диапазон для конкретной линии должен быть достаточно диверсифицирован, чтобы предотвратить эксплуатацию со стороны оппонента.
- Каждый класс рук должен разыгрываться по линии, которая обеспечивает ему наибольшее ожидание, настолько часто, насколько это возможно. Помните, как в главе 9 мы обсуждали линии розыгрыша с AA и AK против префлоп рейзера. В то время как с AA разница в ожидании была небольшой, с AK пуш оказался наилучшим решением. Именно поэтому в конечном счете мы предложили идти в олл-ин как с AA, так и AK, поскольку такая стратегия гарантировала максимальное ожидание для второго стартера. Диапазоны следует строить в таком же ключе – в первую очередь думайте о руках, которые получают максимальное вэлью от определенной линии розыгрыша, и уже на их основе стройте сбалансированную стратегию.
- В ситуациях, когда вы ожидаете получить экшен на поздних улицах, не стоит исключать из своего диапазона пассивного розыгрыша как натсы, так и руки, которые могут стать натсами (дро). Несоблюдение этого принципа

открывает для оппонентов огромные возможности по эксплуатации вашей игры на самых дорогих стадиях раздачи.

Как вы уже могли понять, сбалансированные диапазоны в первую очередь предполагают неэксплуатируемость. В сочетании с должным уровнем агрессии, баланс является неотъемлемой частью стратегий, близких к оптимальным.

Оптимальная стратегия всегда агрессивна и идеально сбалансирована. Близкие к оптимальным стратегии представляют собой грубую оценку параметров оптимальной стратегии в условиях недостатка информации.

Если кто-то следует идеально сбалансированной стратегии, его игру невозможно прочитать. Однако на практике очень сложно дать точное определение термину «идеальный баланс». Самый действенный подход к оценке параметров такой стратегии, на наш взгляд, выглядит так: представьте, что вы должны открыто сообщать оппонентам о вашей стратегии каждый раз, когда принимаете какое-либо решение. Как это повлияет на ваши действия? Как ваши оппоненты могут вас эксплуатировать, зная ваш план на раздачу?

Многие игроки привыкли думать, что такая информация представляет огромную ценность, и наша идея кому-то покажется как минимум глупой. Но если вы посмотрите на эту ситуацию в разрезе оптимальных стратегий, то достаточно быстро придете к простому выводу: если ваша стратегия действительно оптимальна, то информированность оппонентов не имеет никакого значения, ведь они будут безразличны к выбору конкретных действий. Так что такое знание поможет им разве что избежать собственных ошибок.

Раскрытие собственной стратегии перед другими игроками заставляет нас задуматься о том, как они могут эксплуатировать различные ее элементы. И такой образ мышления является важной составляющей на пути к сбалансированному покеру.

Стратегия

Сбалансированная игра и агрессия являются составными частями стратегического подхода к покеру. Однако это далеко не все его составляющие.

Мы рекомендуем смотреть на покер не как на игру со множеством точек выбора, а как на игру с небольшим количеством таких точек. Иными словами, в то время как стандартный подход подразумевает поэтапный анализ от решения к решению, от улице к улице, мы предлагаем задуматься о простом факте: действия на ранних улицах торговли определяют всю стратегию на раздачу.

В качестве примера давайте рассмотрим следующую ситуацию. Турнир по

Безлимитному Холдему, у одного из игроков осталось 3600 фишек, блайнды 200-400. Если он сделает оупен-рейз до 1200 на баттоне, его шансы на колл олл-ина от одного из блайндов составят примерно 2 к 1, и ему придется выставляться фактически с любой рукой. Такой рейз привязывает его к банку и при этом открывает для оппонентов выбор из нескольких стратегических возможностей (фолд, колл или пуш). Поэтому верным решением будет олл-ин вместо оупен-рейза – с точки зрения стратегии это более сильное действие, так как картина раздачи для него никак не меняется, в то время как оппоненты теперь могут ответить только фолдом или коллом.

Старайтесь рассматривать несколько улиц как цельную игровую ситуацию, а не как сумму отдельных решений. Например, иногда мы можем делать колл на терне с планом фолдить или чекать на ривере, если закроется флэш, и коллить или ставить на любой бланковой карте. Таким образом, на ривере в банк всегда зайдут 1-2 ставки, а мы сможем правило рассчитать потенциальные шансы банка, а также цену экшена на следующей улице.

По аналогии с раздачами, стоит как можно чаще стараться разыгрывать свои диапазоны, а не отдельные руки. Причем в отношении диапазонов хорошо действует подход из игры против ясновидящего: ставить на вэлью и блеф в соотношении α, с планом скидывать часть блефов на каждой последующей улице. Правда, в покере не существует чистых блефов, и этот факт очень сильно меняет диапазоны для вэлью-бета на каждой улице. Но основной принцип остается неизменным и правильная игра на каждой улице требует досконального знания своих диапазонов.

Пол Пудит и Крис Фергюссон называют это «чтением собственной руки» (и мы, если честно, жалеем, что не придумали этот термин первыми). Почти все без исключения покерные книги учат определять диапазон оппонента, в то время как с точки зрения теории игр распределение рук ваших оппонентов (за исключением начала раздачи) не имеет ни малейшего значения. Оптимальная стратегия предполагает идеально сбалансированные и агрессивные линии розыгрыша именно для ваших собственных диапазонов. Если оппоненту удается вас как-то эксплуатировать, то это просто значит, что ваша стратегия не является оптимальной.

Думать о покере в таком ключе непросто, и нет смысла отрицать, что именно из-за этого многие игроки не решаются на перемены в своем образе мышления. И это нормально – покер слишком сложная игра, с огромным количеством внутренних и внешних факторов, влияющих на результат. Наш мозг оказывается бессилен перед таким количеством информации. Именно поэтому мы постоянно ищем компромисс в виде вспомогательных игр и моделей, которые помогают понять более сложные ситуации и представить их не как сумму отдельных решений, а как цельный объект, который мы можем изучить, и в дальнейшем использовать для эксплуатации оппонентов и анализа собственных диапазонов.

Главной целью любого игрока является составление у себя в голове цельной картины не только отдельных раздач, но и игры в целом.

Анализ

Четвертая, и последняя, область, о которой мы поговорим в рамках этой главы, касается использования математики для изучения игры как за, так и вне стола. Мы никогда не устанем говорить о том, насколько обманчивыми могут быть эмпирические данные в покере. С точки зрения теории вероятностей, мы можем говорить с уверенностью лишь о некоторых вещах. Винрейт не одна из них. Мы уже упоминали статистический шум в предыдущих главах, особенно в контексте, что и у сильных игроков случаются плохие недели и даже месяцы. Кроме того, даже когда все складывается вполне неплохо, пара неправильно выбранных точек отсчета или фильтров могут дать вам абсолютно ошибочное представление об уровне вашей игры. А это, в свою очередь, может привести к ненужным подстройкам и неуверенности в том, что вы делаете.

Но еще важнее то, что подавляющее большинство игроков получают знания о покере только из книг или общения со своими более опытными и успешными друзьями. И хотя авторы книг и другие игроки, как правило, дают советы по игре от чистого сердца, такая информация вряд ли окажется ценной, особенно после интерпретации и неминуемого искажения получателем. Неправильное применение различных идей и приемов в своей игре является, пожалуй, одной из самых распространенных ошибок в покере. Даже если вы верно поняли и истолковали совет от другого человека, нет никаких гарантий, что эта информация пришла из достоверного источника или не являлась следствием продолжительного апстрика автора.

Поэтому на наш взгляд самым надежным и объективным подходом к изучению покера и совершенствованию своих навыков является самостоятельный математический анализ игры. Вместо общения с «сильными игроками» мы предлагаем разбирать вспомогательные игры и частные ситуации, чтобы затем обсуждать найденные решения и модели, стараться определить суть рассматриваемой раздачи или действия. В пользу такой точки зрения говорят несколько вещей.

Во-первых, правильно проведенный анализ по заданным предпосылкам никогда не введет вас заблуждение. Если вы начнете с некоего набора условий, а затем проанализируете ситуацию без ошибок, то всегда получите верный ответ. С другой стороны, его интерпретация и практическое применение требуют определенной осторожности. Но с фундаментальной точки зрения такой подход дает более надежную информацию, нежели чье-то мнение, не в последнюю очередь благодаря тому, что здесь вы вынуждены разбираться в ситуации самостоятельно и анализировать ее с разных точек зрения.

Во-вторых, математически обоснованные факты невозможно опровергнуть или игнорировать. Если в трех турнирах подряд вы поставили олл-ин на баттоне с T8s, когда у вас оставалась всего пара блайндов, и проиграли все сравнения, у вас не будет соблазна сказать: «Ну, не везет, надо играть тайтово». Несложные расчеты подтвердят, что пуш в такой ситуации – единственно верное решение. Осознание того, что вы все делаете правильно, позволяет забыть про тильт и меньше переживать о витках дисперсии.

Заключение

Эта книга преследовала лишь одну цель - познакомить читателя с основами покерной математики. На каждой из более чем четырех сотен страниц мы решали уравнения и выводили формулы, некоторые из которых вы сможете использовать без какой-либо подготовки. Одни лишь таблицы для игры «Пуш или Фолд» из главы 13 с лихвой окупят стоимость книги для любого игрока, специализирующегося на SNG турнирах. Кроме того, мы продемонстрировали образ покерного мышления, в котором нет места гаданиям о конкретной руке оппонента, а процесс принятия решений основан на диапазонах и балансе. Мы не считаем, что эта книга дает исчерпывающее представление о математике в покере. Более того, на наш взгляд она только предвещает революцию в понимании игры, свидетелями которой мы станем в самом ближайшем будущем.

В одной из первых глав «Математики Покера» мы заявили, что все идеи и формулы в книге сводятся к простому совету: максимизируйте свое ожидание. Мы искренне надеемся, что нам удалось открыть несколько новых смыслов этой фразы и научить вас паре полезных навыков, которые помогут вам выиграть больше денег за покерным столом.