Universidad Tecnológica de San Luis Potosí

TÉCNICO SUPERIOR UNIVERSITARIO

MANUAL DEL CURSO PROPEDÉUTICO 2016

DIRECTORIO

Ing. Juan Manuel Medellín Milán

RECTOR

Mtra. Laura Roxana Santiago Álvarez

DIRECCIÓN ACADÉMICA DIVISION INDUSTRIAL

M. A. María Guadalupe Pinto Alfaro

DIRECCIÓN ACADÉMICA DIVISIÓN DESARROLLO DE NEGOCIOS

Mtro. Arturo Morelos Pineda

DIRECCIÓN ACADÉMICA DIVISIÓN ELECTROMECÁNICA

Mtra. Consuelo Díaz Barrera
Ing. María Eugenia Oliva Ramírez
RECONOCIMIENTO POR COMPILACIÓN Y ADAPTACIÓN

Ing. Marco Antonio Zúñiga Martínez
Ing. Yolanda González Vega
Ing. José
COLABORADORES

Mtra. María Isabel Guel González
COORDINADORA

CONTENIDO PÁGINA

PRESENTACIÓN 7

UNIDAD I – ARITMÉTICA 9

Introducción 10

1.1 Números Naturales 10

1.2 Números fraccionarios 22

Operaciones con fracciones 27

1.3 Potenciación 30

Operaciones con exponentes 32

1.4 Radicales 35

1.5 Porcentajes 41

UNIDAD II - ÁLGEBRA 44

Introducción 45

2.1 Operaciones algebraicas 47

Suma algebraica 49

Resta algebraica 51

Multiplicación algebraica 53

División algebraica 55

Aplicaciones algebraicas 61

Casos algebraicos 64

2.2 Productos notables 65

Producto de binomios con un término común 66

Binomios conjugados 67

Binomio al cubo 67

2.3 Factorización 71

UNIDAD III ECUACIONES ALGEBRAICAS 79

Introducción 81

3.1 Ecuación lineal 82

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita 82

3.2 Ejercicios de ecuaciones de primer grado 85

3.3 Ecuaciones lineales con dos variables 86

3.3 Ejercicios de ecuaciones lineales con dos variables 92

3.4 Ecuaciones de segundo grado 94

Ecuación cuadrática completando el cuadrado 97

Ejemplos resueltos 99
3.5 Despeje de ecuaciones o fórmulas 101
Ejemplos de despejes de fórmulas 101
BIBLIOGRAFÍA 107
ANEXOS.- UNIDAD I ARITMÉTICA SOLUCIONES 109
ANEXOS.- UNIDAD II ÁLGEBRA (RESPUESTAS) 126
Casos algebraicos 128
Aplicaciones algebraicas 129
Ejercicios de factorización 130
ANEXOS.- UNIDAD III ECUACIONES (SOLUCIONES) 133
Ejercicios de ecuaciones de primer grado 133
Ejercicios de ecuaciones lineales con dos variables 137
Ecuaciones por el método de factorización 141

PRESENTACIÓN

Este manual está diseñado para involucrar al alumno en la resolución de problemas a través del lenguaje numérico con actividades lúdicas, abarca operaciones básicas aritméticas hasta lenguaje algebraico. Se encuentra dividido en cuatro partes.

La primera parte inicia con actividades para ejercicios aritméticos en los que se incluyen fracciones, números naturales, porcentajes, para aplicar técnicas adecuadas en la resolución de problemas desde concepciones aritméticas, es importante mencionar que en ésta parte se estimula la comprensión numérica básica.

En la segunda parte estudiaremos desde la terminología algebraica, lenguaje algebraico, productos notables, factorización y los tipos de solución de los diversos tipos de factores, todo para poder aplicar en problemas reales. En ésta Unidad podemos encontrar dinámicas enfocadas para facilitar la comprensión de términos algebraicos, así como ejercicios que servirán para reafirmar los conocimientos algebraicos.

La tercera parte corresponde a ecuaciones algebraicas, donde encontraremos los diversos tipos de ecuaciones, ya sean lineales, cuadráticas, de segundo grado, así como modelos exponenciales.

La cuarta parte corresponde al anexo, donde se podrá encontrar las respuestas a los ejercicios propuestos.

Las actividades aquí presentadas solo son un apoyo didáctico, para estimular la creatividad del maestro en ésta aventura del aprendizaje de las matemáticas.

UNIDAD I – ARITMÉTICA

$$3+5-(8+3) = ¿?$$

OBJETIVO GENERAL. Despertar el interés en el alumno hacia las matemáticas mediante actividades lúdicas para que adquieran o refuercen conocimientos respecto al mundo de las matemáticas.

Introducción

La Aritmética es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las estructuras numéricas elementales, así como las propiedades de las operaciones y los números en sí mismos en su concepto más profundo, construyendo lo que se conoce como teoría de números.

La habilidad numérica implica la agilidad mental para realizar operaciones con números. Esta habilidad es especialmente útil para el desarrollo de la lógica y el razonamiento para la resolución de problemas.

El desarrollo de ejercicios despiertan la habilidad numérica, pero también ayudan a desarrollar la concentración y la capacidad de visualización, integrando estas habilidades para cumplir un objetivo principal: la agilidad mental en todo tipo de operaciones.

1.1 Números Naturales

Definición: los números naturales son aquellos que sirven para contar: 1, 2,3, 5,…y cada uno de ellos tiene su consecutivo, es decir, el que le sigue. Cualquier número representado por la letra “n” tiene su consecutivo, es decir, n+1. Además tiene un número que le antecede, o sea, su antecedente. Así, cualquier número “n”, tiene su antecedente n-1.

Propiedades de las Operaciones con Números Naturales

Definición: todas las operaciones con números naturales son binarias. La suma y la multiplicación tienen propiedades como la propiedad asociativa, la cual describiremos:

Propiedad Asociativa:

Definición. En la suma, los sumandos se pueden asociar o juntar de diferentes maneras, siempre y cuando sean de dos en dos sin alterar el resultado.

Explicación: la suma 2 + 5 + 8, se puede realizar de diferentes maneras:

(2 + 5) + 8 = 7 + 8 = 15

2 + (5 + 8) = 2 + 13= 15

En la multiplicación, los factores se pueden asociar o juntar de diferentes maneras, siempre y cuando sean de dos en dos sin alterar el producto.

Explicación: la multiplicación 2 x 3 x 4, se puede realizar de diferentes maneras.

(2 x 3)4 = 6 x 4 = 24 2(3 x 4) = 2 x 12 = 24

Ejemplos

1. (2 + 5) + 4 = 11 o 2 + (5 + 4) = 11
2. (9 + 3) + 4 = 16 o 9 + (3 + 4) = 16
3. (3 x 2) x 4 = 24 o 3 x (2 x 4) = 24.

Elemento Neutro

Definición: el elemento neutro en la suma, es aquél número que sumado a otro, da como resultado este mismo número. El cero es el elemento neutro en la suma.

El elemento neutro en la multiplicación es aquel número que multiplicado por otro da como producto este último. El uno es el elemento neutro en la multiplicación.

Propiedad Distributiva

Definición: el resultado de multiplicar un número por la suma de otros dos, es igual a multiplicar ese número por cada uno de los otros dos y después sumar los productos, la propiedad distributiva relaciona la suma con la multiplicación.

Ejemplos

1. 5(3 + 2) = 5(3) + 5(2) = 15 + 10 = 25
2. 8(2 + 1) = 8(2) + 8(1) = 16 + 8 = 24
3. 3(2 + 4 + 7) = 3(2) + 3(4) + 3(7) = 6 + 12 + 21 = 39
4. (30+20) x 7 =350
5. (4+2) x 3 = 4 x 3 +2 x 3 =18
6. (6+9) x 10 = 6 x 10 +9 x 10 =150
7. 10 x (3 + 4) = 5 x 3 +5 x 4 =35
8. (3+9) x 9 = 3 x 9 + 9 x 9 = 108
9. 2 x (5 + 7) = 2 x 5 +2 x 7 =24
10. 6(5 – 2) = 6(3) = 18
11. 3 (10 + 2) = 3(12) = 36
12. (2/7 x5/7)+(2/7x1/2)=10/49+2/14
13. 3 (2 + 4 + 6) = 3 x 2 + 3 x 4 + 3 x 6 = 6 + 12 + 18 = 36
14. 3 (6 + 9) = 3 x 15 = 45
15. 3 (5 + 8) = 3 x 5 + 3 x 8 = 15 + 24 = 39
16. (-9) + (-3-5) = -9 - 8 = -17
17. (5) – (-3) + (3+4) = 5 +3 +7 = 15
18. (3) + (-1-1) – (12) = 3 – 2 – 12 = -11
19. (-4) + (-2-3) + (3) – (55) = -4 -5 +3 -55 = - 61
20. 500 – (24/2 + 32/4 + 36x2 + 41x2 + 46/2) 500 – 197 = 303
21. 4 (11 + 5) = 4 X 11 + 4 X 5 = 64
22. 1 (6 + 3) = 1 X 6 + 1 X 3 = 9
23. (4+2) x 3= 4 x 3 + 2 x 3 = 18
24. (6 + 9) x 10 = 6 x 10 + 9 x 10 = 150
25. 5 x (3 + 4) = 5 x 3 + 5 x 4 = 35

SERIE PUNK

OBJETIVO: Despertar la habilidad para realizar operaciones mentales.

COMPETENCIA: Capacidad de concentración y desarrollo de operaciones mentales.

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: Ninguno (No usar apuntes o calculadora)

INSTRUCCIONES:

1. El grupo acomodará en un círculo las butacas alrededor del salón. O bien los pondrá de pie alrededor del salón
2. El maestro determina que alumno es el que empezará la dinámica.
3. Se iniciará un conteo hacia la derecha 1, 2, 3… al alumno que le toque un número con terminación 3 o múltiplo de tres deberá decir "PUNK" (u otra palabra que se facilite puede ser Universidad) en lugar del número que le corresponde y deberá continuar la numeración.

NOTA: Se puede comenzar con múltiplos de 3 pero se puede cambiar a otro número, o cada vez que se den tres vueltas iniciar con múltiplos de otro número intentando aumentar la complejidad del juego.

4. Si se equivocan o tarda más de 3 segundos en contestar pierde, ya no juega y es retirado del círculo.
5. El maestro escogerá otro alumno distinto para empezar nuevamente la dinámica (recomendado cambiar de sentido para evitar que siempre caigan los mismos números en los mismos alumnos)
6. La dinámica termina si logran dar 6 vueltas a partir del alumno que inició o al terminar el tiempo designado a la actividad.

LAS CINCO CASAS

OBJETIVO: Desarrollar el trabajo colaborativo y la organización de la información.

COMPETENCIA: Clasificación y organización de información para la resolución de problemas.

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: Papel y lápiz. NO USAR CALCULADORA

INSTRUCCIONES:

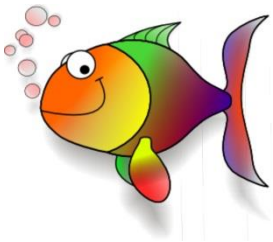
1. El maestro puede formar grupos o decidir si se trabaja de manera individual.
2. Tenemos 5 casas de cinco colores diferentes y en cada una de ellas vive una persona de una nacionalidad diferente.
3. Cada uno de los dueños bebe una bebida diferente, fuma una marca de cigarrillos diferente y tiene una mascota diferente.

Tenemos las siguientes claves:

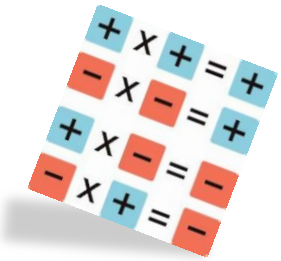
- El británico vive en la casa roja.
- El sueco tiene un perro.
- El danés toma té.
- La casa verde está a la izquierda de la blanca.
- El dueño de la casa verde toma café.
- La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro.
- El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
- El que vive en la casa del centro toma leche.
- El noruego vive en la primera casa.
- La persona que fuma Brends vive junto a la que tiene un gato.
- La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill.
- El que fuma Bluemasters bebe cerveza.
- El alemán fuma prince.
- El noruego vive junto a la casa azul.
- El que fuma Brends tiene un vecino que toma agua.

La pregunta:

¿Quién es el dueño del pececito?



AMIGO O ENEMIGO



OBJETIVO: Adquirir habilidad en la ley de los signos.

COMPETENCIA: Utilizar la ley de los signos para problemas básicos.

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: Lápiz y goma.

DESARROLLO: Todos los habitantes de un pueblo están divididos en dos bandos enemigos. Así, los que viven ahí siempre siguen estas reglas:

- El amigo de mi amigo será mi amigo
- El amigo de mi enemigo será mi enemigo
- El enemigo de mi amigo será mi enemigo
- El enemigo de mi enemigo será mi amigo

Si al amigo lo marcamos con un + y al enemigo con un -, tendríamos

(+)(+) = (+)
(+)(-) = (-)
(-)(-) = (+)
(-)(+) = (-)
Que son, justamente, las reglas para multiplicar números enteros.

Por ejemplo:

(+5)(-7) = (-35) el amigo del enemigo será enemigo.

(-3)(-6) = (+18) el enemigo del enemigo será amigo

Completa la siguiente tabla

Operación	Frase correspondiente	Resultado	Amigo o enemigo
(+8)(-5) =	**El amigo de mi enemigo será mi enemigo**	**(+8)(-5) =(-40)**	**Enemigo**
(+3)(+12) =			
(-9)(-9) =			
(-10)(+11) =			
(-41)(-3) =			
(+42)(+7) =			
(+8)(-23) =			
(-13)(+5) =			
(-(-25)) =			

LOS CUATRO CUATROS

OBJETIVO: Aplicar los operadores aritméticos para encontrar los resultados utilizando la prioridad de operaciones, técnica de ensayo y error.

COMPETENCIA: Aplicación de operaciones aritméticas

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: Lápiz y papel. NO USAR CALCULADORA

DESARROLLO:

El maestro explicará las reglas fundamentales de resolución aritmética.

Recuerda que para armar una expresión necesitas estas reglas importantes:

1) Primero resolver todo lo que esté dentro de símbolos de agrupación.
2) Evaluar las expresiones exponenciales.
3) Hacer todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.
4) Hacer todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

1-

$$\frac{12(9-7)+4.5}{3^4+2^3} = \frac{12(2)+4.5}{81+8} = \frac{24+20}{89} = \frac{44}{89}.$$

INSTRUCCIONES:

Ejercicio 1.-

1. El maestro puede formar grupos o decidir si se trabaja de manera individual.
2. Resolver los ejercicios en el manual encontrando las expresiones para formar cada número del 1 al 10 empleando solamente cuatro cuatros, y utilizando los operadores aritméticos suma, resta, multiplicación, división,

Ejemplo: ¿Quieres formar el cero? Pues nada más sencillo. Basta escribir: 44 – 44
Ahí tienes los cuatro cuatros formando una expresión que es igual a cero.

44-44 = 0	=5	=10
= 1	=6	
=2	=7	
=3	=8	
=4	=9	

Para los ejercicios 2 y 3 se recomienda dividir el grupo en dos equipos y pasarlos a pizarrón, gana el equipo que más puntos obtenga, no usar calculadora

Ejercicio 2.-

Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta su prioridad:

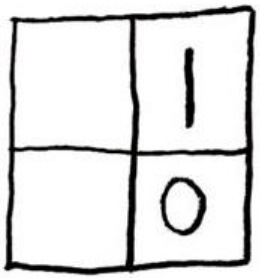
1.- $27 + 3 \cdot 5 – 16 =$
2.- $27 + 3 – 45: 5 + 16 =$
3.- $(2 \cdot 4 + 12)\ (6 - 4) =$
4.- $3 \cdot 9 + (6 + 5 – 3) – 12: 4 =$
5.- $2 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^3 =$
6.- $440 - [30 + 6\ (19 - 12)] =$
7.- $2\{4\ [7 + 4\ (5 \cdot 3 - 9)] - 3\ (40 - 8)\} =$

Ejercicio 3.-

Realizar las siguientes operaciones:

1.- $(3 - 8)+ [5 - (-2)] =$
2.- $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 =$
3.- $9 : [6 : (- 2)] =$
4.- $[(- 2)^5 - (-3)^3]^2 =$
5.- $(5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4\ ) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2)^2 =$
6.- $[(17 - 15)^3 + (7 - 12)^2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)] =$
7.- $(7 - 2 + 4) - (2 - 5) =$
8.- $1 - (5 - 3 + 2) - [5 - (6 - 3 + 1) - 2]=$
9.- $-12 \cdot 3 + 18: (-12 : 6 + 8) =$

SUDOKU



OBJETIVO: Despertar la habilidad lógico-matemática para organizar números.

COMPETENCIA: Capacidad de resolución de problemas mediante la organización de información.

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: Lápiz

INSTRUCCIONES:

Ejercicio 1

1. El alumnado resolverá el problema de manera individual.
2. Colocar un número en cada cuadro, teniendo en cuenta que:

a) 4, 5, 6, están en la horizontal superior.
b) 7, 8, están en la horizontal inferior.
c) 2, 3, 4, 5, 8, 9, no están en la vertical izquierda.
d) 1, 5, 6, 7, 8, 9, no están en la vertical derecha.

Ejercicio 2

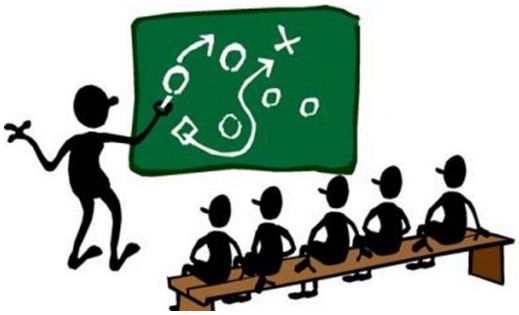
1.- Acomoda los números del 1 al 9 sin repetir de tal manera que sume 15 en horizontal, vertical y diagonal

Ejercicio 3

1.- Acomoda los números del 0 al 8 sin repetir de tal manera que sume 12 en horizontal, vertical y diagonal

Existe uniformidad en el método de realizar los ejercicios? Encuentra el método!!!

Solución de problemas



OBJETIVO: Promover el trabajo en equipo en la resolución de problemas.

COMPETENCIA: Capacidad de resolución de problemas de manera colaborativa.

TIEMPO: 60 minutos

INSTRUCCIONES:

El maestro organizará al grupo en 4 equipos y resolverán los problemas de razonamiento por equipo, los equipos perdedores traerán una paleta o un dulce el último día. Cada equipo escribirá 4 letras; a b c d en 4 hojas diferentes, e indicarán entre ellos cual es la respuesta con las manos o por escrito ya que NO PUEDEN decir en voz alta la respuesta, pero si decir el modo de resolución en voz baja. Cuando el maestro indique el término de tiempo, preguntará la respuesta de cada problema y los equipos deberán levantar la hoja con la letra correspondiente.

El equipo que diga respuestas en voz alta pierde, el maestro escribirá en el pizarrón el No. De los equipos y anotará los aciertos de cada uno respectivamente para saber quién es el ganador.

En organizarse 5 minutos, resolver los reactivos solamente 20 minutos, si los equipos terminan antes, el maestro da por término la resolución. El tiempo estimado en dar las respuestas es de 10 a 15 minutos.

El tiempo máximo en todo el ejercicio es 60 minutos.

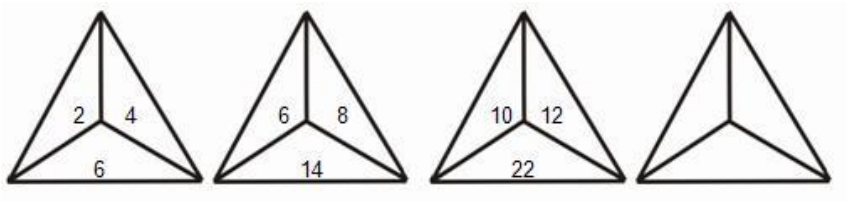
1.- Paco fue a los videojuegos y cambió $ 37.00 para jugar, si las fichas valen $0.5 ¿Cuántas fichas le dieron?

a) 32 b) 63 c) 74 d) 83 e) 93

2.-Cinco alumnos se repartieron un premio de $720.00. Pedro se quedó con el doble de lo que le tocó a cada uno de los otros cuatro, quienes recibieron cantidades iguales. ¿Cuánto le tocó a Pedro?

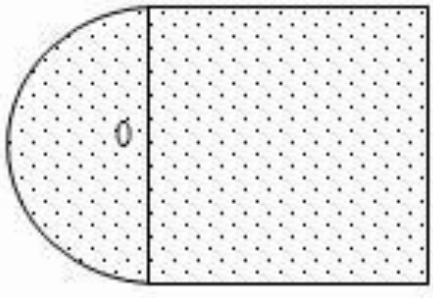
a) $144 b) $164 c) $240 d) $360 e) $240

3.- ¿Qué triángulo sigue en la serie?



a) 11,13,24 b) 12,13,25 c) 14,16,30 d) 15,17,32 e) 18,20,38

4.- Si 0 es el centro de la circunferencia y el lado del cuadrado es de 4 u. ¿cuál es el área total sombreada de la figura?

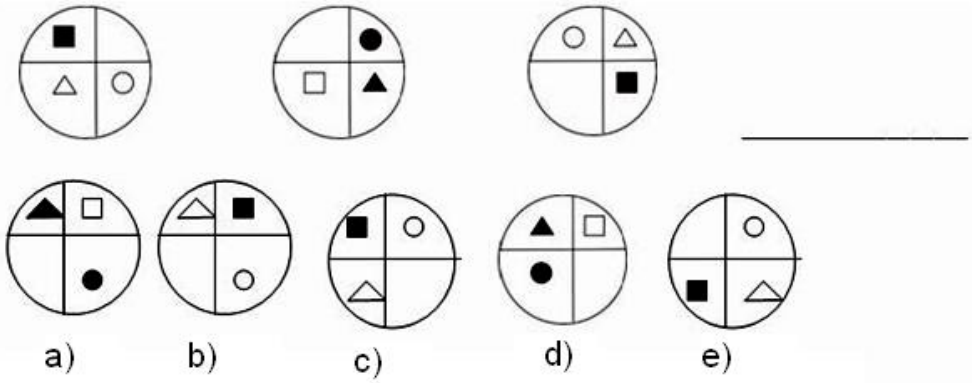


a) $16\,u^2 + \pi\,u^2$
b) $16\,u^2 - 2\pi\,u^2$
c) $16\,u^2 + 2\pi\,u^2$
d) $16\,u^2 - 4\pi\,u^2$
e) $16\,u^2 + 4\pi\,u^2$

5.- Encuentra el número que falta en la secuencia: $\frac{18}{27}, \frac{18}{21}, \frac{18}{15}, \frac{18}{?}$

a) $\frac{18}{15}$ b) $\frac{18}{13}$ c) $\frac{18}{12}$ d) $\frac{18}{11}$ e) $\frac{18}{9}$

6.- Encuentra la figura que falta:



7.- Si 20 cajas con melones pesan 800 kg y cada caja vacía pesa 5kg; entonces todos los melones pesan:

a) 900kg b) 795 kg c) 780kg d) 700kg e) 100kg

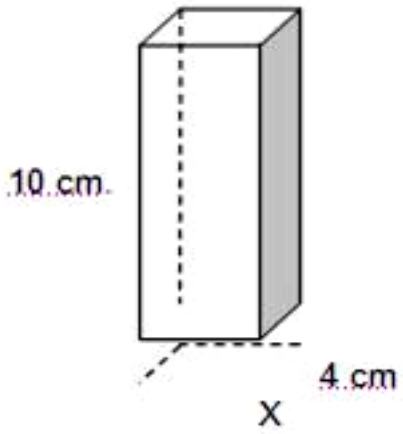
8.- Miguel hizo un examen de física de 80 preguntas, de las cuales contestó 60, por lo que dejó de contestar el:

a) 15% b) 75% c) 25% d) 80% e) 35%

9.- La suma de 2 números es 11 y su producto 24, dichos números son:

a) 1, 10 b) 4,7 c) 2,9 d) 95,6 e) 3,8

10.- Si el volumen de este prisma es de 160 cm3 ¿Cuánto vale x?



a) 4 cm
b) 10 cm
c) 8 cm
d) 16 cm
e) 12 cm

11.- Un plomero tiene un tubo de 10 m, si diariamente corta un pedazo de 2 m terminará de cortarlo en:

a) 2 días b) 3 días c) 4 días d) 5 días e) 6 días

12.- Si Julieta tiene 10 años y Lulú le lleva 20 años de edad, entonces:

a) Julieta es mayor que Lulú **b)** Lulú tiene el doble de la edad de Julieta.

c) Dentro de 10 años las dos tendrán la misma edad **d)** Lulú tiene el triple de la edad de Julieta

e) Las dos tienen la misma edad

1.2 Números fraccionarios

En matemáticas, una **fracción**, *número fraccionario*, (del vocablo latín *frāctus, fractĭo -ōnis*, roto, o quebrado) es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir que representa un cociente no efectuado de números. Por razones históricas también se les llama *fracción común*, *fracción vulgar* o *fracción decimal*. Las fracciones comunes se componen de: **numerador**, **denominador** y línea divisora entre ambos (barra horizontal u oblicua). En una fracción común a/b el denominador "*b*" expresa la cantidad de partes iguales que representan la unidad, y el numerador "*a*" indica cuántas de ellas se toman.

Suma con igual denominador

Para sumar fracciones con igual denominador

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$$

Se suman los denominadores y se conserva el mismo denominador

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=\frac{5+1+8}{3}$$

Ejemplos:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4+2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{12}{6}=\frac{1+5+12}{6}$$

Suma con diferente denominador

- Para sumar fracciones con diferente denominador

$$\frac{8}{3}+\frac{2}{4}$$

- Se obtiene un común denominador multiplicando los dos denominadores

$$\frac{8}{3}+\frac{2}{4}=\frac{}{12}$$

- Se divide el común denominador de la primera fracción, y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente

$$4\times 8=32 \qquad 12\div 3=4$$

- Se divide el común de nominador entre el denominador de la segunda fracción y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente: $12 \div 4 = 3$ $\quad 3 \times 2 = 6$

$$\frac{8}{3} + \frac{2}{4} = \frac{32+6}{12}$$

- Se suman los numeradores obtenidos conservando el común denominador

$$\frac{8}{3} + \frac{2}{4} = \frac{32+6}{12} = \frac{38}{12}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{105+14+20}{70} = \frac{139}{70}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{8}{9} + \frac{2}{8} = \frac{288+320+90}{360} = \frac{698}{360}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+6+5}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{10+28+7}{70} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$$

Cuando se suman números mixtos

Números mixtos $3\frac{2}{9} + 2\frac{1}{5} + \frac{15}{4}$

Se transforman en números mixtos las fracciones impropias $3\frac{2}{9} + 2\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4}$ $\quad \frac{15}{4}$ se transformó en $3\frac{3}{4}$

Se suman por separado los números enteros

$$3 + 2 + 3 = 8$$

Se efectúa la suma de las fracciones propias

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{40+36+135}{180} = \frac{211}{180}$$

A éste resultado se une la suma de números enteros

$$3\frac{2}{9}+2\frac{1}{5}+3\frac{3}{4}=8\frac{211}{180}$$

Se simplifica el resultado final

$$3\frac{2}{9}+2\frac{1}{5}+3\frac{3}{4}=8\frac{211}{180}=9\frac{31}{180}$$

Ejemplos de Suma:

$$2\frac{5}{4}+1\frac{1}{3}=3\frac{19}{12}=4\frac{7}{12}$$

$$3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}=8\frac{3}{4}$$

Ejemplos de Resta

$$\frac{13}{7}-\frac{2}{7}-\frac{1}{7}=\frac{13-2-1}{7}=\frac{10}{7}$$

$$\frac{10}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{10-2-1}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$$

Resta con diferente denominador

Se obtiene un común denominador multiplicando los dos denominadores $\frac{8}{3}+\frac{2}{4}=\frac{}{12}$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{18-5}{30}=\frac{13}{30}$$

$$\frac{10}{3}-\frac{2}{7}-\frac{1}{2}=\frac{140-12-21}{42}=\frac{107}{42}=2\frac{23}{42}$$

Casos especiales de resta de fracciones con diferente denominador

Cuando se restan fracciones donde algún denominador es múltiplo de los demás

Denominador es múltiplo de los demás $\frac{12}{25}-\frac{4}{50}$

Se conserva como denominador de la resta $\frac{12}{25}-\frac{4}{50}=\frac{}{50}$

Se procede como el caso anterior $\frac{12}{25}-\frac{4}{50}=\frac{24-4}{50}=\frac{20}{50}$

Y se simplifica la fracción resultante

$$12 \quad 4 \quad 24-4 \quad 20 \quad 2$$

Ejemplos de resta:

$$\frac{20}{30}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{20-6-10}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

$$\frac{10}{5}-\frac{1}{10}-\frac{2}{3}=\frac{60-3-20}{30}=\frac{37}{30}=1\frac{7}{30}$$

$$5\frac{2}{5}-2\frac{3}{4}=2\frac{13}{20}$$

Multiplicación

Para multiplicar fracciones propias e impropias $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$

Se multiplican los numeradores $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{}$

Se multiplican los denominadores $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

Ejemplos:

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{8} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{24}{108} = \frac{12}{54} = \frac{6}{27} = \frac{3}{9}$$

Multiplicar números mixtos

Para multiplicar números mixtos $2\frac{1}{4} \times 3\frac{2}{3}$

Se convierten en fracciones impropias los números mixtos, para lo cual, se conserva el mismo denominador de la fracción, y como numerador se coloca el producto del número entero por el denominador más el numerador de la fracción

$$2\frac{1}{4} \times 3\frac{2}{3} = \frac{9}{4} \times \frac{11}{3}$$

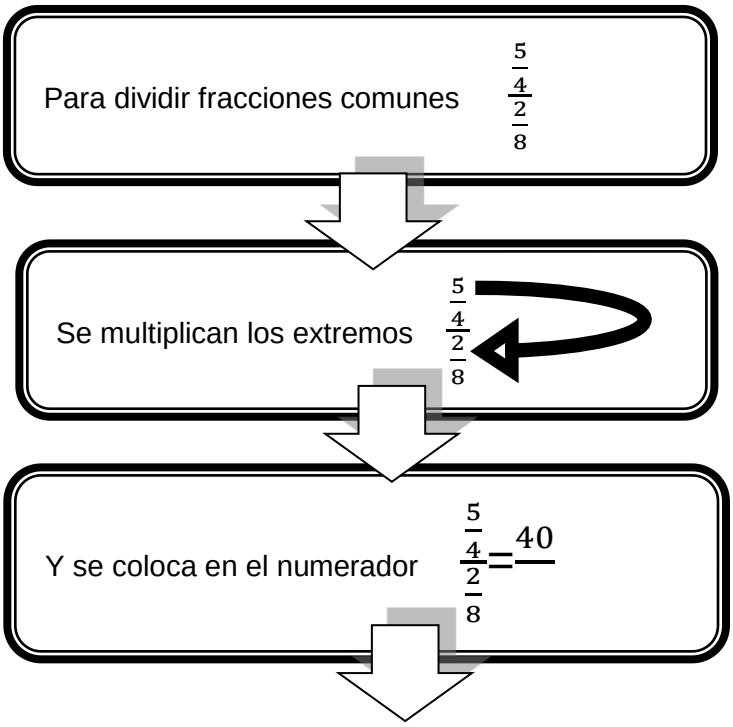
En la primera fracción se multiplicó 2 por 4 y se sumó 1, dejando el mismo denominador. En la segunda fracción se multiplicó 3 por 3 y se sumó 2 dejando el mismo denominador.

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador

$$\frac{9}{4} \times \frac{11}{3} = \frac{99}{12}$$

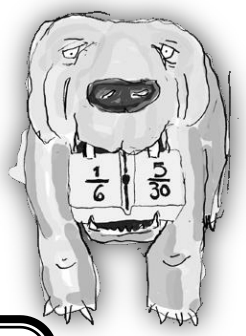
Y se simplifica el resultado $\frac{9}{4} \times \frac{11}{3} = \frac{99}{12} = \frac{33}{4}$

División



Se multiplican los valores de en medio

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{8}}$$



Y se colocan en el denominador $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{8}} = \frac{40}{8}$

Ejemplos:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{4} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$2\frac{1}{3} \div 1\frac{4}{5} = \frac{7}{3} \div \frac{9}{5} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{9}{5}} = \frac{35}{27}$$

Operaciones con fracciones

OBJETIVO: Familiarizarse con las fracciones, desarrollar la habilidad de encontrar equivalencias entre fracciones y conocer las operaciones que se pueden realizar con las fracciones.

COMPETENCIA: Realizar operaciones aritméticas con números fraccionarios.

TIEMPO: 60 Minutos

MATERIAL: Lápiz

DESARROLLO:

El maestro indicará los ejercicios y los escribirá en el pintarrón., El alumnado los desarrollará en forma individual. El maestro dividirá el grupo en dos equipos y pasará a resolver un integrante de cada equipo, le indicará al azar los ejercicios, gana el que acabe primero y bien

Ejercicios de evaluación previa:

Utilizando las leyes de los exponentes, efectúa las siguientes operaciones y el resultado escríbelo en potencias:

a) $(4)^3(4)^2(4)^5 = \quad 4^{10}$

b) $\frac{9^{10}}{9}=$ 1×10^9

c) $(3^3)^3=$ 3^9

d) $(4^9)^2=$ 4^{18}

e) $\frac{7^6}{7^3}=$ 1×10^3

EJERCICIOS

1 Asociar cada fracción de hora con los minutos correspondientes:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3}$$

2 ¿Conoces que es una fracción equivalente? Encuentra los pares de fracciones equivalentes y colócalas en parejas:

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{2}{11}, \quad \frac{6}{9}, \quad \frac{16}{6}, \quad \frac{15}{21}, \quad \frac{4}{22}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{12}{9}$$

3 Escribe los inversos de:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{-3}{7}, \quad 5, \quad \frac{4}{11}, \quad \frac{1}{8}$$

4 Escribe el signo > o < donde corresponda.

$$a)\ \frac{3}{7} \quad \frac{3}{9} \qquad b)\ \frac{2}{5} \quad \frac{6}{5} \qquad c)\ \frac{3}{9} \quad \frac{3}{4} \qquad d)\ \frac{2}{7} \quad \frac{5}{7}$$

5 Compara las siguientes fracciones:

$$a)\ \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \qquad b)\ \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \qquad c)\ \frac{5}{7} \quad \frac{6}{8} \qquad d)\ \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4}$$

6 Ordenar de menor o mayor:

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{2}{15}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{7}{5},$$

7 Realiza de dos modos distintos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)=$$

8 Opera, sacando factor común.

1) $\left(\frac{3}{4} * \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{1}{6}\right) =$

2) $\left(\frac{1}{5} * \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{4}{7}\right) =$

3) $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) =$

9 Qué es una fracción propia o impropia?

Clasifica las siguientes fracciones en propias o impropias:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{5},$$

10 Opera:

1. $5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{6} =$
2. $\left(3 + \frac{1}{4}\right) - \left(2 * \frac{1}{6}\right) =$
3. $\left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) =$
4. $\left(\frac{5}{3} - 1\right) * \left(\frac{7}{2} - 2\right) =$
5. $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{36}\right) =$

11.-Resuelve

$\frac{1}{2} : 3 =$

$\frac{3}{5} : \frac{1}{2} =$

$3 : \frac{1}{2} =$

$\frac{-1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{4}} =$

$\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} =$

$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$

1.3 Potenciación

La potenciación es una operación matemática entre dos términos denominados: base y exponente. Se lee usualmente como «a elevado a n» o «a elevado a la potencia n». Hay algunos números especiales, como el 2, al cuadrado o el 3, que le corresponde al cubo.

- Para obtener la potencia de $(-2)^3$, se multiplica el -2 por sí mismo tres veces: (-2)(-2)(-2)= -8
- Para obtener la potencia -4^2, se multiplica el -4 por sí mismo dos veces:-4^2= (-4) (-4) = 16
- Cuando un número negativo tiene exponente par, el resultado será siempre un número positivo: -3^2= (-3)(-3)=+9
- Cuando un número negativo tiene exponente impar, el resultado será siempre un número negativo: -4^3= (-4)(-4)(-4)= -64
- Cuando una potencia tiene exponente cero, el resultado es el número uno. $(-5)^0 = 1$
- Para efectuar multiplicaciones de potencias, se resuelven primero las potencias por separado y después se multiplican:
- $(-3)^2(-4)^3$= (9)(-64)= -576
- Para sumar potencias, primero se resuelven las potencias y después se suman: $(-5)^2 + (-4)^3 = 25 + (-64) = 25 – 64=-39$

Ejercicios:

$(-10)^3(-2)^4$=

$(5)^2(-6)^2(-7)^0$=

$(3)^2$-$(-2)^5$=

División de potencias

Para dividir números enteros se aplican las leyes de los signos para la división:

- Si se divide un número positivo entre uno positivo, el resultado es un número positivo (+) : (+) = (+)

- Si se divide un número positivo entre otro negativo, el resultado es un número negativo: (+) : (-) = (-)
- Si se divide un número negativo entre uno positivo, el resultado es un número negativo: (-) : (+) = (-)
- Si se divide un número negativo entre otro negativo, el resultado es un número positivo: (-) : (-) = (+)

Operaciones Combinadas de potencias

Cuando una operación está compuesta por varias operaciones, se realiza la combinación de las operaciones:

Por ejemplo, en la operación $-3^{(5+2)}$ se tienen dos operaciones, una suma y una multiplicación:

$-3^{(5+2)} =$ realizar primero la suma

$\downarrow$

$-3^{(7)} =$ realizar la multiplicación

$= -2187$

En la operación $(-6)^2 / 3$, se tienen dos operaciones, una potencia y una división:

$(-6)^2 / 3 =$ Realizar primero la Potencia

$\downarrow$

$36/ 3 =$ ahora realizar la división $=12$

En la operación $\{(-5)^2 + (-9)\} / (-2)$ se tienen 3 operaciones, una potencia, una suma y una división:

Primero se resuelve la potencia

$= \{25 + (-9)\} / (-2) =$

Luego se realiza la suma

$= \{16\} / (-2) =$

Al final, se realiza la división = - 8

Ejercicios de entrenamiento:

$-7^{(6-3)} = -7^3$

$(3 + 2)^{(5-4)} = 5$

$(-4)^2 : 8 = 2$

Leyes de los exponentes

Definición: las leyes de los exponentes sirven para abreviar procedimientos al efectuar operaciones con potencias de la misma base. Si se multiplican varias potencias cuya base es igual, el resultado será la misma base elevada a la suma de los exponentes.

En la operación: $(2)^3(2)^4 = (2)^{3+4} = 2^7$

En la operación $(4)^7(4)^2(4)^3 = 4^{7+2+3} = 4^{12}$

- ***Si se dividen varias potencias cuya base sea igual, el resultado será la misma base elevada a la resta de los exponentes:***

En la operación $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

En la operación $\frac{8^3}{8} = 8^{3-1} = 8^2$

Si se eleva una potencia a otra potencia, el resultado será la base elevada a la multiplicación de los exponentes:

$(3^2)^5 = 3^{2x5} = 3^{10}$

$(4^5)^3 = 4^{5x3} = 4^{15}$

Operaciones con exponentes

OBJETIVO: Adquirir la habilidad de resolver problemas con potencias, leyes de los exponentes y radicales.

COMPETENCIA: Aplicar técnicas de resolución de exponentes a problemas.

TIEMPO: 60 minutos

MATERIAL: Pintarrón, marcadores y fichas con problemas.

INSTRUCCIONES:

1. Antes de empezar el juego el maestro deberán explicar los conceptos para que reafirmen el conocimiento y los puedan asociar en el juego.
2. Resolver los ejemplos al final de cada explicación.
3. El maestro formará grupos (de 3 o 4 grupos dependiendo del número de alumnos).
4. El maestro hará unas líneas para dividir el pintarrón en el número de grupos que se formen.

5. El maestro recortará las fichas con los problemas (anexos al manual del maestro).
6. Se numerarán los integrantes del equipo, e irán tomando turno para pasar a resolver el problema que el maestro saque de las fichas.
7. Se aplicará una marca en el apartado del grupo del pintarrón que sea el primero en resolver correctamente el problema.
8. El equipo puede ayudar al participante desde su lugar haciendo alguna corrección.
9. Gana el equipo con más marcas.

Realiza las siguientes operaciones con potencias:

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

3 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

4 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

5 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

7 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

8 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

9 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

10 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

11 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$

12 $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} =$

13 $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

14 $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{3}} =$

15 $\dfrac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^{2}}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}} : \dfrac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)} - 5\frac{1}{7} =$

16 $\frac{2}{3} : \left[5 : \left(\frac{2}{4}+1\right) - 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] =$

17 $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right] : \left[\left(\frac{1}{2}-1\right) : 2\frac{1}{2}\right] =$

18 $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^{3}\right] : \left(5-\frac{6}{5}\right) =$

1.4 Radicales

Una radical es una potencia fraccionada Un radical es una expresión en la forma:

$$\sqrt[n]{b}$$

Cada parte de un radical lleva su nombre,

índice

$$\sqrt[n]{b}$$

radicando

El índice debe ser un entero positivo. Para una raíz cuadrada, el índice 2 es usualmente omitido.

Propiedades de los Radicales

- $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[2]{5}\right)^2 = 5$$

- $\sqrt[n]{b^n} = b$, si n es impar.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3^3} = 3$$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo 1: $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

- $\sqrt[n]{b^n} = |b|$, si n es par.

Ejemplo:

$$\sqrt[2]{6^2} = |6|$$

Ejemplo 2:

$$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{10^3} = 10$$

$$\sqrt{(-3)}^2 = |-3| = 3$$

$$\sqrt[n]{5 \cdot 7} = \sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{7}$$

$$\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{9}}$$

Suma y resta de radicales

Cuando tenemos radicales "semejantes", podemos resolver la suma o la resta usando la propiedad distributiva y agrupando los términos semejantes. Los radicales "semejantes" son los que tienen el mismo radicando.	Ejemplos: • $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ • $7\sqrt{8} - 2\sqrt{8} = 5\sqrt{8}$
Si los radicales no son semejantes, la suma o la resta solo pueden ser indicadas. Se puede agrupar los términos semejantes del radical.	Ejemplo: • $5\sqrt{2} - \sqrt{18} =$ $5\sqrt{2} - \sqrt{9 \cdot 2} =$ $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ $(5 - 3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE.

1) La mitad del 100% de $\sqrt{16}$ es:

a) 400

b) 16

c) 8

d) 4

e) 2

2) ¿Cuál de las expresiones siguientes son igual a -2?

I) $\sqrt[3]{-8}$ II) 2^{-1} III) $\sqrt{-4}$

a) sólo III

b) sólo II

c) sólo I

d) Todas

e) ninguna

3) ¿Cuál es el número que corresponde a la suma de los 5 pares siguientes de $\sqrt{144}$?

a) 114

b) 92

c) 90

d) 88

e) 86

4) Si al doble del cuadrado de un número positivo le quito 20, resulta igual que si al cuadrado del número le agrego 16. ¿Cuál es el número?

a) 6

b) 36

c) $6\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{3}$

e) 3

5) P= $(\frac{1}{4})^2$ y Q= $\sqrt{\frac{1}{4}}$; entonces $\frac{Q}{P}$ =?

a) $\frac{1}{32}$

b) $\frac{1}{8}$

c) 2

d) 8

e) 32

6) $\sqrt{x}$ + $\sqrt{y}$ = 12. Si x^2= 16, entonces $\sqrt{y}$ =?

a) 10^1

b) 10^2

c) 2^3

d) 2^2

e) 4^3

EL CRUCIGRAMA DE HIPATIA

OBJETIVO: Aplicar los conocimientos adquiridos para la resolución de problemas.

COMPETENCIA:

TIEMPO: 60 Minutos

MATERIAL: Papel y lápiz.

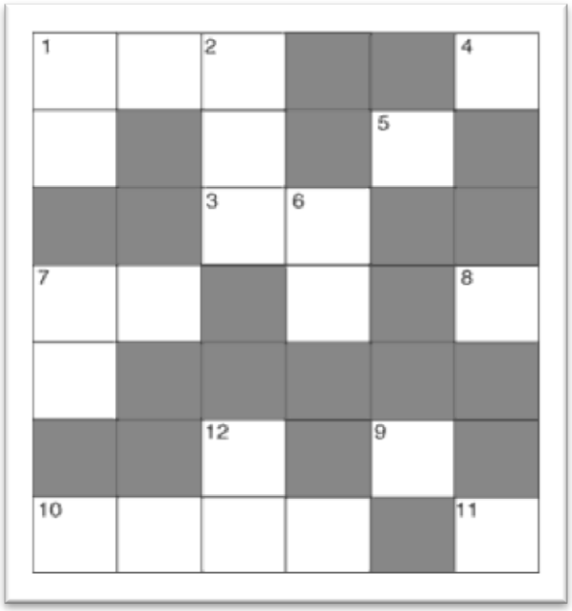
DESARROLLO:

El crucigrama que aquí encontrarás fue hecho pensando en una de las más grandes matemáticas de la historia: Hipatia de Alejandría. Ella vivió toda su vida en la ciudad de Alejandría que está en Egipto; nació en el año 370 y murió en el 415. Desde muy joven investigó y enseñó prácticamente todas las ramas de las matemáticas, por eso, para recordarla, te proponemos que completes este crucigrama resolviendo problemas de aritmética, geometría y lógica.

¡Antes de que empieces a resolver el crucigrama!

INSTRUCCIONES:

1. El maestro puede formar grupos o decidir si se trabaja de manera individual.
2. Escribir los resultados de los problemas del crucigrama con números, no palabras.
3. En cada casilla del crucigrama escribe uno y sólo un dígito.



Horizontales

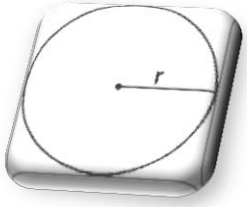
1. Beatriz es 8 cm más alta que Jaime. Toña es 12 cm más baja que Beatriz. Jaime mide 1metro y 25cm. ¿Cuánto mide Toña? (La respuesta debe ir en centímetros)

3. De todos los números que están entre los números 1 y 100 ¿Cuántos tienen el dígito 5?

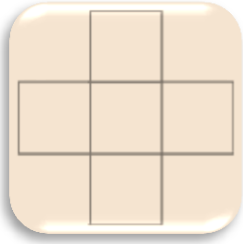
7. Una niña en un examen se puso muy nerviosa y en un problema en el que se le pedía que dividiera entre 4 un número lo que hizo fue restar 4. Su resultado fue 48, si en lugar de restar, hubiera dividido ¿cuál hubiera sido su resultado?

8. El cuadrado de la figura tiene un área de $36\ cm^2$.

¿Cuál es el radio del círculo inscrito?



9. Acomoda los números 1, 2, 3, 4,5 en la figura de manera que los que queden en la columna sumen 8 y que los que queden en el renglón, también sumen 8. ¿Cuál es el número que va en el cuadrito del centro?



10. ¿Cuántos segundos hay en una hora?

11. ¿Cuántas de estas afirmaciones son verdaderas?

a) $15 \div \frac{1}{2} = 30$

b) $0.3 \times 0.2 = 0.6$

c) $\frac{1}{9} < \frac{1}{7}$

d) $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

e) $\frac{7}{5} \times \frac{9}{3} = \frac{63}{15}$

f) $0.01 \times 0.1 = 0.11$

g) $0.01 < 0.1$

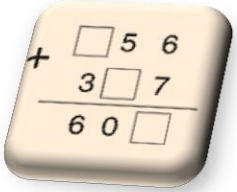
Verticales

1. ¿Cuántos cuadrados hay en este dibujo?

2. ¿Cuántos minutos hay entre las 11:41 y las 14:02?

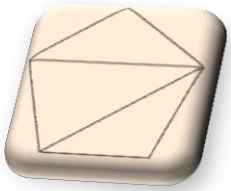
4. La fecha 8 de noviembre de 1988 tiene algo de especial. Si la escribimos 8-11-88, es fácil darse cuenta de que el día (8) multiplicado por el mes (11) da como resultado el año (88) ¿Cuántas fechas que cumplieran esta propiedad hubo en 1990?

5. ¿Cuánto suman los tres números que tenemos que acomodar en los cuadritos vacíos para que la suma quede correcta?

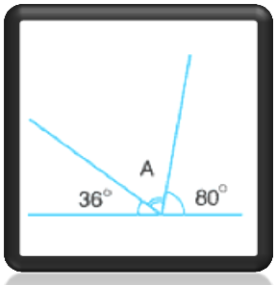


6. ¿Cuál es el ángulo que forman las manecillas de un reloj si son las 12:15?

7. Esta es la figura de un pentágono con dos de sus diagonales dibujadas. El pentágono está dividido en tres regiones. Si dibujas todas las diagonales ¿en cuántas regiones quedará dividido el pentágono?



12. ¿Cuánto vale el ángulo A?



1.5 Porcentajes

El **porcentaje** es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes. También se le llama comúnmente **tanto por ciento**, donde *por ciento* significa «de cada cien unidades».Calcular % es una aplicación de proporción directa.

Ejemplo:

Se sabe que el 5% de los 40 alumnos de un curso está resfriado, queremos calcular cuántos alumnos son los enfermos.

a) Datos:

Se trata de una proporción directa, porque si aumentara el número de enfermos, aumentaría también él %

%	nº alumnos
5	x
100	40

b) Luego planteamos la proporción y la resolvemos:

$$\frac{5}{100} = \frac{X}{40} \rightarrow X = \frac{(5)(40)}{100} \rightarrow X = 2$$

Respuesta: los alumnos enfermos son 2.

Tanto porciento de un número

Calcular el tanto por ciento de un número se puede hacer transformando el % a una fracción con denominador 100 y multiplicarla por el número.

Ejemplo: Calcular el 8% de 2400

c) Transformar el 8% a una fracción con denominador 100

$$8\% = \frac{8}{100}$$

Transformamos:

$$\frac{8}{100} * 2400 = 192$$

Ejemplo:

Un CD valía $ 590 y ahora está rebajado en un 15% ¿Cuánto deberá pagar el cliente?

(15/100)(590) = $88.5e la rebaja

$ 590 - $ 88.5 = **$ 501.5** es el precio rebajado.

Ejemplos

1. 56% de 3000
   3000- 100%
   X - 56%

   $$X = \frac{56 \times 3000}{100}$$ R. 1680

2. 90% de 1315 R. 1183.5
3. $\frac{1}{2}$ % de 18 R. 0.09

4. Una fuente arroja 250 litros de agua cada minuto y medio. ¿Cuántos litros arrojará en una hora?

$$\frac{250}{1{,}5} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = \frac{250 \cdot 60}{1{,}5} = 10000 \quad \text{litros}$$

5. Se sabe que la altura y la sombra de un edificio son proporcionales. Si la sombra de un edificio de 30 m es 8 m, ¿qué altura tendrá otro edificio cuya sombra en el mismo momento mide 12 m?

$$\frac{30}{8} = \frac{x}{12} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30 \cdot 12}{8} = 45\text{m}$$

Sea x la altura del edificio: El edificio mide 45 m

6. En un pastel para 10 personas se tenían que emplear 5 huevos, 2 vasos y medio de leche, 75 gramos de mantequilla y 8 cucharadas de azúcar. ¿Qué cantidad de cada ingrediente habrá que emplear para 8 personas?

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$$

- Huevos: huevos

$$\frac{2{,}5}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 2$$

- Leche: vasos

$$\frac{75}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 60$$

- Mantequilla: gramos

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 6{,}4$$

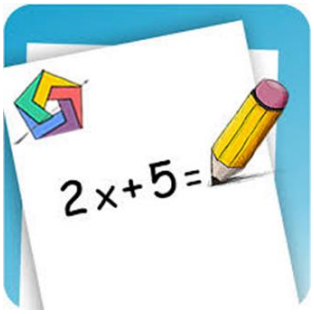
- Azúcar: cucharadas

Ejercicios propuestos

1. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje $ 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
2. Una moto cuyo precio era de $ 5.000, cuesta en la actualidad $ 250 más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
3. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $8800, nos hacen un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?
4. Al comprar un monitor que cuesta $450 nos hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto tenemos que pagar?
5. Se vende un artículo con una ganancia del 15% sobre el precio de costo. Si se ha comprado en $80. Halla el precio de venta.
6. Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a 180 $ para ganar al venderlo el 10%.
7. ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comparado a $ 280, para perder el 12% sobre el precio de venta?
8. Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de $150.

UNIDAD II - ÁLGEBRA

$$y= - \{8x+11-5x$$



Introducción

- Álgebra es la Rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces.
- En vez de un juego donde corres, saltas o encuentras puertas secretas, en el álgebra juegas con letras, números y símbolos. Te invitamos a jugar.

El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas.

Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

GRUPOS DE TÉRMINOS

OBJETIVO: Conocer y asociar los términos que componen una expresión algebraica.

COMPETENCIA:

TIEMPO: 30 Minutos

MATERIAL: hojas de máquina, pintarrón, solución de problemas.

DESARROLLO: Antes de comenzar la dinámica recuerda los términos.

Un término está formado por varias partes que a continuación identificaremos:

Coeficientes:

Coeficiente: Son los números que aparecen multiplicando a las variables. Exponentes: Son los superíndices que afectan a los diversos términos de las expresiones. (En ocasiones pueden a afectar tanto a los coeficientes como a las variables aunque es más común verlos afectando solo a las variables)

$$-7\frac{ab^4}{c^3}$$

Signo

Exponente: Son los super-Índices que afectan a los diversos términos de las expresiones. (En ocasiones pueden a afectar tanto a los coeficientes como a las variables aunque es más común verlos afectando solo a las variables). **El exponente es el que determina el grado de la ecuación.**

Variables: Son cantidades expresadas con letra que pueden tomar valores dentro de un subconjunto de números reales.

Las expresiones algebraicas se clasifican según su número de términos.

Expresión	*Definición*	*Ejemplo*
Monomio	Un solo término	$3x^2$
Binomio	Suma o resta de dos monomios	$3x^2 + 2x$
Trinomio	Suma o resta de tres monomios	$3x^2 + 2x - 5$
Polinomio	Suma o resta de cualquier número de monomios	

El grado de una expresión está dado por su exponente más alto:

Expresión	*Definición*	*Ejemplo*
De primer grado	El exponente más alto de todos los términos es uno y no se representa (x^1)	$x + y$
De segundo grado	El exponente más alto de todos los términos es dos (x^2)	$3x^2 + 2y$
De tercer grado	El exponente más alto de todos los términos es tres (x^3)	$x + 5y^3$

EJERCICIOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Indica cuales de las siguientes expresiones son monomios. En caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

1. $3x^3$
2. $5x^{-3}$
3. $3x + 1$
4. $\sqrt{2}x$
5. $-3X^4/4$
6. $2\sqrt{x}$

* El grado del polinomio lo representa el exponente mayor de la variable.

2.1 Operaciones algebraicas

Las operaciones básicas del álgebra son las mismas que de la aritmética suma, resta, multiplicación y división. Antes de iniciar con las reglas básicas de cada una de ella empezaremos por recordar la jerarquía de operaciones.

Jerarquía de las Operaciones

La Jerarquía de Operaciones describe el orden en el que deben de ser ejecutadas las operaciones algebraicas. Este debe de ser respetado al 100% y sin alteraciones.

Primero resolver todo lo que esté dentro de símbolos de agrupación (paréntesis, llaves y corchetes), en orden de izquierda a derecha.

Evaluar las expresiones exponenciales y radicales en orden de izquierda a derecha.

Hacer todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.

Hacer todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

Nota: aun cuando en el ejemplo son operaciones aritméticas dicha jerarquía se respeta en operaciones algebraicas

1-

$$\frac{12(9-7)+4.5}{3^4+2^3}$$

$$= \frac{12(2)+4.5}{81+8}$$

$$= \frac{24+20}{89}$$

$$= \frac{44}{89}$$

Valor Numérico

En ocasiones es necesario conocer el valor numérico que representan algunas expresiones algebraicas, dicho valor se calcula remplazando cada letra por su valor numérico y realizando las operaciones indicadas en cada expresión.

Dado:

a=1, b=2, c=3, d=4, m = ½, n= 2/3, p= ¼, x= 0

$$(b-m)(c-n)+4a^2$$

Solución:

$$(b-m)(c-n)+4a^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right)+4(1)^2 \qquad \{\text{sustituyendo cada letra por su valor numérico}\},$$

$$\Rightarrow \quad (b-m)(c-n)+4a^2=\left(\frac{4-1}{2}\right)\left(\frac{9-2}{3}\right)+4\times 1=\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{7}{\cancel{3}}+4=\frac{7}{2}+4=\frac{7+8}{2};$$

$$\therefore \quad (b-m)(c-n)+4a^2=\frac{15}{2}\Leftrightarrow 7\tfrac{1}{2}.$$

Dado:

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{3},\ p=\frac{1}{4}$$

$$m^b n^c p^a$$

Solución:

$$m^b n^c p^a=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 \qquad \{\text{sustituyendo cada letra por su valor numérico}\},$$

$$\Rightarrow \quad m^b n^c p^a=\frac{1}{4}\times\frac{1}{27}\times\frac{1}{4} \qquad \{\text{calculando las potencias}\};$$

$$\therefore \quad m^b n^c p^a=\frac{1}{432}. \qquad \{\text{efectuando los productos indicados}\}.$$

Suma algebraica

La suma de expresiones algebraicas se efectúa mediante la agrupación de términos semejantes.

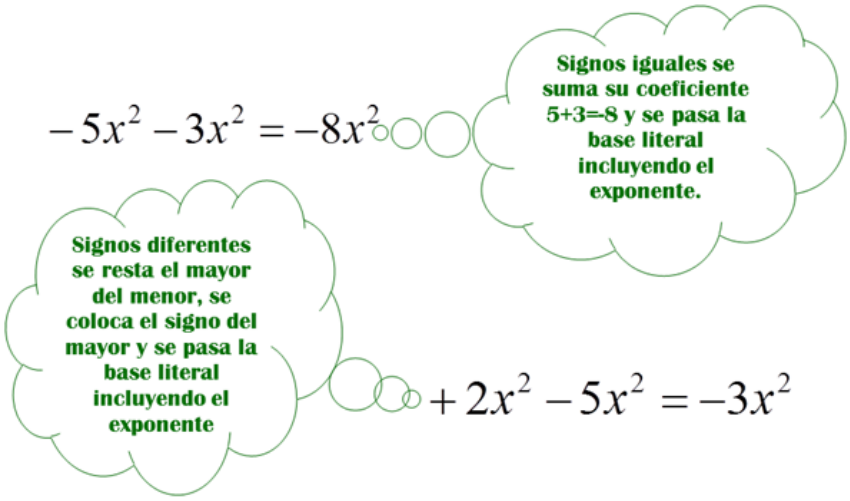
Los términos semejantes: Son aquellos que poseen la misma parte literal.

Por ejemplo: $5x^2y$ es semejante a $-10x^2y$

1.- La suma algebraica de dos números con el mismo signo es: la suma de los valores absolutos de los dos números (coeficientes del término), precedida con su signo común.

2.- La suma algebraica de dos números con signos diferentes es la diferencia de los valores absolutos de los dos números (coeficientes del término), precedida por el signo del número de mayor valor absoluto.

Signos de Agrupación en la Suma Algebraica



Cuando un grupo de términos en una expresión algebraica van a ser manejados como un solo número; se encierra en paréntesis ( ), en corchetes [ ], o bien en llaves { }. Estos símbolos indican que se van efectuar ciertas operaciones y el orden en el cual deben de efectuarse.

Durante la eliminación de los símbolos de agrupación se pueden dar dos casos:

CASO 1: Cuando el signo (+) antecede el paréntesis no interviene en la operación.

$$+(a - 2b) = a - 2b$$

CASO 2: Cuando el signo (–) antecede el paréntesis si interviene en la operación.

$$-(4x - 1) = -4x - (-1) = -4x + 1$$

Presencia de símbolos de agrupación dentro de otros símbolos de agrupación.
Estas expresiones se resuelven de adentro hacia fuera.

Ejemplo 1

= – {8x– [x–4(3–x)+1]}

= – {8x– [x–12+4x+1]}

= – {8x– [–11+5x]}

= – {8x+11–5x}

= – 8x-11+5x

= -3x-11

Ejemplo 2

(3x–1)+(x+1) – (2x–3)+4

Eliminando los paréntesis resulta: 3x–1+x+1–2x+3+4

Ordenando: (3x+x–2x) + (–1+3+4+1)

Reduciéndose obtiene finalmente: 2x + 7

Ejemplo 3

[2(a–b) –(a+b+3)]– (2a-5b+4)

Eliminando paréntesis: 2a–2b–a–b–3–2a+5b–4

Ordenando: (2a–a– 2a)+ (–2b–b+ 5b)+ (–3–4)

Reduciendo, se obtiene finalmente: –a+2b–7

Ejemplo 4 Sumar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-x+1-(x+3)}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-x+1-x-3}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-2x-2}{x^2-5x+6}$$

Ejemplo 5 Sumar dos polinomios.-

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \qquad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$

$$\begin{array}{rrrrr} 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ & 6x^3 & & +8x & +3 \\ \hline 7x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +15x & +5 \end{array}$$

$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$

Resta algebraica

La resta de expresiones algebraicas al igual que la suma se efectúa mediante la agrupación de términos semejantes

La expresión que se sustrae se llama sustraendo, y la expresión de la que se sustrae se llama minuendo. El número que se obtiene como resultado de la sustracción se llama resta.

Para restar una cantidad de otra se cambia el signo del sustraendo y se procede como en la suma.

Ejemplos de Resta entre dos Monomios.

$$(+5x^2) - (\oplus 3x^2) = +5x^2 \ominus 3x^2 = 2x^2$$

Signos diferentes cambia el signo del sustraendo, y se procede como en la suma

Signos iguales se cambia el signo al sustraendo y se procede como en la suma

$$-2x^2 - (\ominus 5x^2) = -2x^2 \oplus 5x^2 = 3x^2$$

Ejemplo de Resta entre dos Polinomios.

$$\begin{array}{l} 5x + 2y^2 - 3z \\ \underline{3x - 5y^2 + 7z} \end{array}$$

Cambia de signo todos los elementos del sustraendo resultando la expresión de abajo

$$\begin{array}{l} +5x + 2y^2 - 3z \\ \underline{-3x + 5y^2 - 7z} \\ 2x + 7y^2 - 10z \end{array}$$

Y se procede como en la suma

La resta de polinomios consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

EJEMPLO 1: (Suma de fracciones con igual denominador)

$$\frac{x+3+2x+3}{x+2} =$$

$$\frac{x+3}{x+2} + \frac{2x+3}{x+2} = \frac{(x+3)+(2x+3)}{x+2} = \frac{3x+6}{x+2} = \frac{3.(x+2)}{x+2} = \frac{3.\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 3$$

EJEMPLO 2: (Resta de fracciones con igual denominador)

$$\frac{5x+1}{x+1} - \frac{2x-4}{x+1} =$$

$$\frac{(5x+1)-(2x-4)}{x+1} = \frac{5x+1-2x+4}{x+1} = \frac{3x+5}{x+1}$$

EJEMPLO 3: (Con denominadores distintos)

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x^2-x+4}{(x+2).(x-3)}$$

$$\frac{x.(x-3)+\ 2.(x+2)}{(x+2).(x-3)} = \frac{x^2-3x+2x+4}{(x+2).(x-3)} =$$ escribe su mínima expresión

EJEMPLO 4: (Con denominadores factorizables)

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2} = \frac{x}{(x+2).(x-2)} + \frac{3}{x+2} = \frac{x\ +\ 3.(x-2)}{(x+2).(x-2)} = \frac{x\ +\ 3x-6}{(x+2).(x-2)} =$$

$$\frac{4x-6}{(x+2).(x-2)} = \frac{2.(2x-3)}{(x+2).(x-2)}$$

EJEMPLO 5:

$$\frac{x+10}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{x+10}{(x+2).(x-2)} - \frac{x+4}{(x+2)^2} = \frac{(x+10).(x+2)-(x+4).(x-2)}{(x+2)^2.(x-2)} =$$

$$\frac{x^2+2x+10x+20-(x^2-2x+4x-8)}{(x+2)^2.(x-2)}=\frac{x^2+12x+20-(x^2+2x-8)}{(x+2)^2.(x-2)}=$$

$$\frac{x^2+12x+20-x^2-2x+8}{(x+2)^2.(x-2)}=\frac{\cancel{x^2}+10x+28-\cancel{x^2}}{(x+2)^2.(x-2)}=\frac{2.(5x+14)}{(x+2)^2.(x-2)}$$

EJEMPLO 6:

$$\frac{12x-4}{x^2-4x+4}-\frac{2}{x-2}=\frac{12x-4}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}=\frac{12x-4-2.(x-2)}{(x-2)^2}=$$

$$\frac{12x-4-2x+4}{(x-2)^2}=\frac{10x}{(x-2)^2}$$

Multiplicación algebraica

La multiplicación (Producto) de dos números a y b se expresa como a X b, a. b, ab o (a)(b); Cualquiera de las formas anteriores se utiliza para representar una multiplicación (Producto).

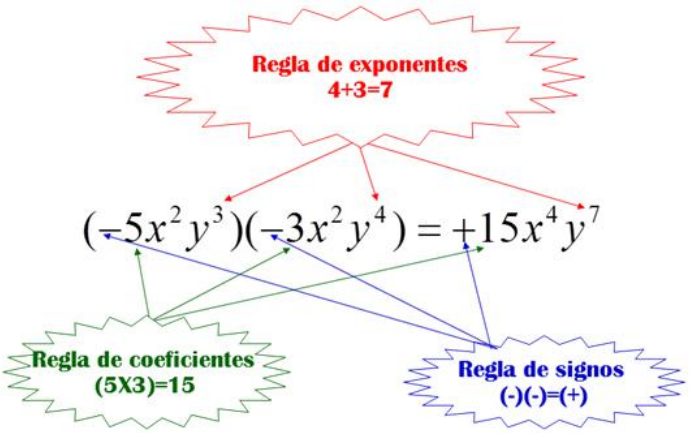
El número a se denomina multiplicando, el número b multiplicador y ab es el resultado de la multiplicación (producto).

La multiplicación de ab se realiza bajo tres reglas:

Regla	Definición
Regla de coeficientes	El coeficiente numérico de a se multiplica por el coeficiente numérico de b.
Regla de signos	Si los signos de a y b son iguales el resultado es positivo (+) (+)= (+), (-) (-)= (+). Si los signos de a y b son diferentes el resultado es negativo (+) (-)= (-), (-) (+)= (-)
Regla de exponentes	Los exponentes de la misma literal se suman.

Y las tres reglas deben de ejecutarse en cada una de las multiplicaciones efectuadas.

Ejemplo de Multiplicación entre dos Monomios.



Ejemplo 1 de Multiplicación de dos Polinomios.

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 2y \\ \underline{3x^2 - 5y} \\ 15x^4 - 6x^2y \\ \underline{+25x^2y + 10y^2} \\ 15x^4 + 19x^2y + 10y^2 \end{array}$$

Se multiplican todos los términos del multiplicador por los términos del multiplicando (siguiendo las tres reglas de multiplicación), una vez obtenidos los resultados individuales se simplifican términos semejantes

Ejemplo 2

(x) = $2x^2 - 3$ Q(x) = $2x^3 - 3x^2 + 4x$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

P(x) · Q(x) = $(2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro ***polinomio*** cuyo **grado** es la **suma** de los **grados** de los **polinomios** que se **multiplican**.

Ejemplo 3.- $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - x + 3) =$

$= 6x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 10x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 6x^2 - 3x + 9 =$

$= 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 9x + 9$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3x^4 & +5x^3 & & -2x & +3 \\
 & & & & 2x^2 & -x & +3 \\
\hline
 & & 9x^4 & +15x^3 & & -6x & +9 \\
 & -3x^5 & -5x^4 & & +2x^2 & -3x & \\
6x^6 & +10x^5 & & -4x^3 & +6x^2 & & \\
\hline
6x^6 & +7x^5 & +4x^4 & +11x^3 & +8x^2 & -9x & +9
\end{array}
$$

División algebraica

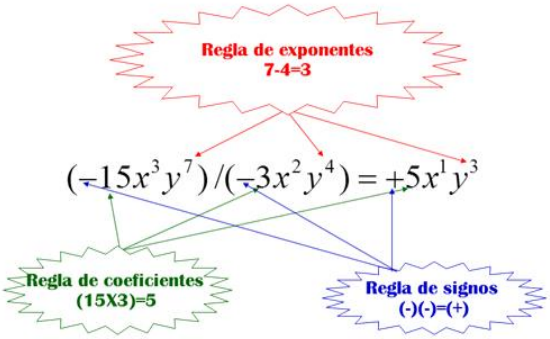
La división (cociente) de dos números a y b se expresa como a / b. donde b debe de ser diferente de cero. El número a se llama dividendo, el numero b se llama divisor y el resultado de la operación se llama cociente.

El cociente de a / b se realiza bajo tres reglas:

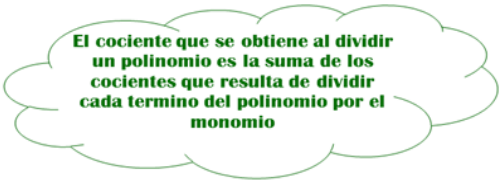
Regla	***Definición***
Regla de coeficientes	El coeficiente numérico de a se divide entre el coeficiente numérico de b
Regla de signos	Si los signos de a y b son iguales el resultado es positivo (+) / (+)= (+), (-) / (-)= (+); Si los signos de a y b son diferentes el resultado es negativo (+) / (-) = (-), (-) / (+)= (-)
Regla de exponentes	Los exponentes de la misma literal se restan.

Y las tres reglas deben de ejecutarse en cada una de las divisiones efectuadas.

Ejemplo de División entre dos Monomios.



Ejemplo de División Polinomio entre Monomio.



$$\frac{20c^{12}-16c^8-8c^5}{4c^4}=\frac{20c^{12}}{4c^4}-\frac{16c^8}{4c^4}-\frac{8c^5}{4c^4}$$
$$=5c^8-4c^4-2c$$

Ejemplo de División entre dos Polinomios.

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-2 & x^2+x-6 \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & 3x-6 \\ & \underline{-3x+6} \\ & 0 \end{array}$$

1. Tanto el dividendo como el divisor se disponen en orden ascendente de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos
2. Se divide el primer termino del dividendo entre el divisor y se obtiene así el primer termino del cociente
3. Se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto obtenido se sustrae del dividendo
4. El residuo obtenido en el paso anterior se trata como nuevo divisor y se repiten con el los pasos 2 y 3

Dividir las fracciones algebraicas:

Se aplica el producto de los medios es igual al producto de los extremos, se factoriza y se simplifica

$$\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x}=$$

$$=\frac{(x^2+2x)(x^2-4x)}{(x^2-5x+6)(x^2+4x+4)}=\frac{x(x+2)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x+2)^2}=\frac{x}{x-3}$$

EJEMPLO:

$$\frac{x^2-4}{\mathrm{x}-5}:\frac{x+2}{3\mathrm{x}-15}=\frac{(x^2-4)(3\mathrm{x}-15)}{(\mathrm{x}-5)(x+2)}=\frac{(x+2)(x-2)(3)(\mathrm{x}-5)}{(\mathrm{x}-5)(x+2)}=$$

$$=\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{5})}{(\mathbf{x}-\mathbf{5})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}=\frac{(\cancel{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\mathbf{3})(\cancel{\mathbf{x}-\mathbf{5}})}{(\cancel{\mathbf{x}-\mathbf{5}})(\cancel{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}})}=\frac{\mathbf{3}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}{\mathbf{1}}=\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{6}$$

Ejercicios de Operaciones algebraicas

Efectúa las siguientes operaciones con monomios:

1. $2x^3 - 5x^3 = -3x^3$
2. $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 = 8x^4$
3. $(2x^3) \cdot (5x)^3 = 10x^6$
4. $(12x^3) : (4x) = 3x^2$
5. $(18x^6\, y^2\, z^5) : (6x^3\, y\, z^2) = 3x^3\, y\, z^3$
6. $(2x^3\, y^2)^3 = 8\, x^9\, y^6$
7. $(2\, x^3\, y^2\, z^5)^5 = 32\, x^{15}\, y^{10}\, z^{25}$
8. $3x^3 - 5x^3 - 2x^3 = -4x^3$
9. $(12\, x^3\, y^5\, z^4) : (3x^2\, y^2\, z^3) = 4xy^3\, z$
10. $(12\, x^3\, y^5 + 18\, x^5\, y^7 - 48x^{12}\, y^6)/\,(3\, x^2 y^2) = 4\, x\, y^3 + 6\, x^3\, y^5 - 16x^{10}\, y^4$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$; $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; $R(x) = 6x^2 + x + 1$; $S(x) = 1/2x^2 + 4$

$T(x) = 3/2x^2 + 5$; $U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

1 $P(x) + Q(x)$

2 $P(x) - U(x)$

3 $P(x) + R(x)$

4 $2P(x) - R(x)$

5 $S(x) + R(x) + U(x)$

6 $S(x) - R(x) + U(x)$

Multiplicar:

1 $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

2 $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

Calcular:

1 $(x^2 - 1/2x)^2$

2 $(x + 2)^3$

3 $(3x - 2)^3$

4 $(2x + 5)^3$

5 $(3x - 2) \cdot (3x + 2)$

Dividir:

$(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

EL ARTE DE PLANTEAR ECUACIONES:

El idioma del álgebra es la ecuación. Isaac Newton en su manual de álgebra titulado Aritmética Universal escribió: «Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico»

También mostró con ejemplos como debía efectuarse dicha traducción. He aquí alguno de ellos:

EL COMERCIANTE.

Un comerciante tenía una determinada suma de dinero, el primer año se gastó 100 libras, aumentó el resto con un tercio de este; y al año siguiente volvió a gastar 100 libras y aumentó la suma restante en un tercio de ella; el tercer año gastó de nuevo 100 libras, después de que agregó su tercera parte y entonces el capital llegó al doble del inicial.

Cuál es esa cantidad? RESPUESTA ___1480_____

EN LENGUAJE COTIDIANO	EN EL IDIOMA DEL ÁLGEBRA
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero	X
El primer año se gastó 100 libras	x - 100
Aumentó el restó con un tercio de éste	(x-100) +(x-100)/3 = (4x-400)/3
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	(4x-400)/3 - 100 = (4x-700)/3
y aumentó la suma restante en un tercio de ella	(4x-700)/3 + (4x-700)/9 = (16x-2800)/9
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	(16x-2800)/9 - 100 = (16x-3700)/9
Después de que agregó su tercera parte	(16x-3700)/9 + (16x-3700)/27 = (64x-14800)/27
El capital llegó al doble del inicial	(64x-14800)/27 = 2x

La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil.

Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir «la lengua cotidiana a la lengua algebraica». Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo,

por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy distintas por el grado de su dificultad que presenta cada texto, como se verá.

EL CABALLO Y EL MULO.

Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: « ¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si yo te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía». ¿Cuántos sacos llevaban el caballo, y cuántos el mulo?

EN LA LENGUAJE COTIDIANO	EN EL IDIOMA DEL ÁLGEBRA
Si yo te tomara un saco	$x - 1$
mi carga	$y + 1$
Sería el doble que la tuya.	$y + 1 = 2 (x - 1)$
Y si te doy un saco,	$y - 1$
tu carga	$x + 1$
se igualaría a la mía	$y - 1 = x + 1$

Una vez resuelto el sistema vemos que $x = 5$, $y = 7$. El caballo llevaba 5 sacos, y el mulo, 7.

Observaciones a tener en cuenta para la resolución

- Leer y comprender el enunciado.
- Realizar un dibujo para interpretar el problema, en caso de ser posible.
- Identificar cuál es la incógnita y observar que posibles valores puede tomar.
- Hacer un plan (camino a seguir), relacionando los datos.
- Plantear la ecuación y resolverla.
- Comprobar la solución ya sea desde la ecuación misma o en el contexto del problema.

LA CAJA DE CARAMELOS.

En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada sabor? I

Le llamamos X al número de caramelos de fresa, tendremos:

X + 3X + 3(X + 3X) = 144*

X + 3X + 3X + 9X = 144

16X = 144

X = 144/16 = 9 caramelos de fresa

*Caramelos de menta = 9*3 = 27 y de naranja 3*(9 + 27) = 108;*

Total 9 + 27+ 108 = 144

Aplicaciones algebraicas

Resuelve cada uno de las aplicaciones por medio de planteamientos algebraicos.

1. Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?

2. En el triángulo ABC, los lados AB = 3AC y BC = 2AC. Si su perímetro es 168m. ¿Cuánto mide cada lado?

3. El perímetro de un jardín rectangular es de 58 m. Si el lado mayor mide 11 m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

4. El ángulo desigual de un triángulo isósceles es la mitad de cada uno de los otros dos. Calculen el valor de los tres ángulos del triángulo.

5. Encuentra el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

6. Calcula los ángulos interiores de un triángulo sabiendo que es el doble del otro y que el tercero es el cuádruplo de la suma de los dos primeros.

7. El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y este 3 más que el menor. Si entre todos tiene la edad del padre que tiene 40 años ¿qué edad tiene cada hermano?

8. En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada sabor?

9. Encuentra dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.

10. Encuentra dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 194.

11. El doble de un número aumentado en 12 es igual a su triple disminuido en 5. ¿Cuál es el número?

12. Al comprar 3 Kg. de berenjenas y 4 Kg. de chauchas, una dueña de casa pagó $ 119. ¿Cuánto vale el kilo de berenjenas, sabiendo que es $ 14 más caro que el kilo de chauchas?

13. La base y la altura de un triángulo equilátero miden 3x+2cm y 2x+1cmm, respectivamente. Si el perímetro es de 33cm, ¿cuál es la superficie de triángulo?

LA GYMKHANA MATEMÁTICA

OBJETIVO: Aprender plantear ecuaciones en forma algebraica traduciendo del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico y reducirlas.

COMPETENCIA: Aplicar en problemas cotidianos el uso de notación algebraica

TIEMPO: 120 Minutos

MATERIAL: Lápiz, y tabla con las frases

INSTRUCCIONES:

1. El maestro formará grupos de cuatro, cinco o hasta seis jugadores. (También se puede jugar individualmente o en equipos de dos).
2. Sacar copia de la tabla de las frases una para cada equipo.
3. Se entrega a cada equipo una hoja con la tabla de las frases.
4. Cada equipo debe primero traducir las frases a su expresión simbólica, simplificando al máximo las expresiones, y después resolver las preguntas que aparecen en sus cinco tarjetas.
5. Gana el equipo que acaba primero y de forma correcta sus preguntas

TABLA DE FRASES:

Frase	***Expresión***	***Expresión reducida***
Ana tenía x puntos.	X	
Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos.		
A Pablo le faltaban 500 puntos para alcanzar a Isabel		
Sergio consiguió el triple de Ana más 300 puntos.		

Lo de Pilar menos lo de Isabel es 3 veces lo de Ana. Pilar tuvo entonces:		
Marta tuvo la quinta parte de lo de Pilar.		
A Rafael le faltan 1000 puntos para tener lo de Sergio.		
Si a Raquel le quitase Ana Belén 500 puntos, tendría como Ana. Raquel tiene:		
Patricia tiene dos veces los de Raquel, más 100 puntos.		
Juntas, Teresa y Patricia, suman tres veces lo de Ana. Teresa tiene:		
Daniel obtuvo la tercera parte de Sergio más 2000 puntos.		

Casos algebraicos

Resolver los ejercicios en forma individual o en equipo, comprobar los resultados con el anexo.

1. Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

2. Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por 792 €. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?

3. Con 12 botes conteniendo cada uno ½ kg de pintura se han pintado 90 m de verja de 80 cm de altura. Calcular cuántos botes de 2 kg de pintura serán necesarios para pintar una verja similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.

4. 11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

5 Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 m^3 de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 depósitos de 500 m^3 cada uno?

2.2 Productos notables

Definición

Son aquellos productos que se rigen por reglas fijas y cuyo resultado puede hallarse por simple inspección. Su denominados también "Identidades Algebraicas". Son aquellos productos cuyo desarrollo es clásico y por esto se le reconoce fácilmente. Las más importantes son:

1. **Binomio de Suma al Cuadrado**

   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. **Binomio Diferencia al Cuadrado**

   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. **Diferencia de Cuadrados**

   $(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$

4. **Binomio Suma al Cubo**

   $(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2b + 3 ab^2 + b^3$

   $= a^3 + b^3 + 3 ab (a + b)$

5. **Binomio Diferencia al Cubo**

   $(a - b)^3 = a^3 - 3 a^2b + 3 ab^2 - b^3$

6. **Suma de dos Cubos**

   $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 – ab + b^2)$

- **Diferencia de Cubos**

  $a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$

- **Trinomio Suma al Cuadrado ó Cuadrado de un Trinomio**

  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

  $= a^2 + b^2 + c^2 + 2 (ab + bc + ac)$

- **Trinomio Suma al Cubo**

  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c + 3(a + b) . (b +c). (a + c)$

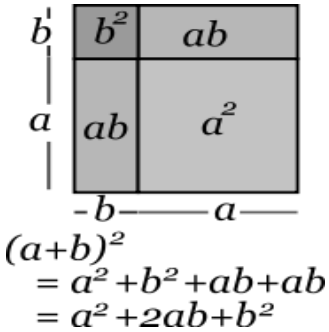
- **Identidades de Legendre**

  $(a + b)^2 + (a – b)^2 = 2 a^2 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$

  $(a + b)^2 + (a – b)^2 = 4 ab$

- **Producto de dos binomios que tienen un término común**

  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) x + ab$



Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo), se suman los cuadrados de cada término con el doble del producto de los mismos. Es decir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Un trinomio de la forma: $a^2 + 2ab + b^2$, se conoce como trinomio cuadrado perfecto.

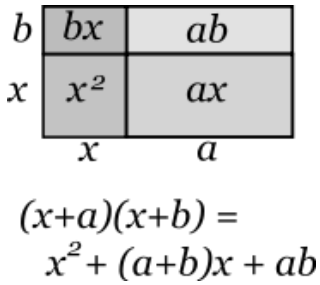
Cuando el segundo término es negativo la fórmula que se obtiene es

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Producto de binomios con un término común



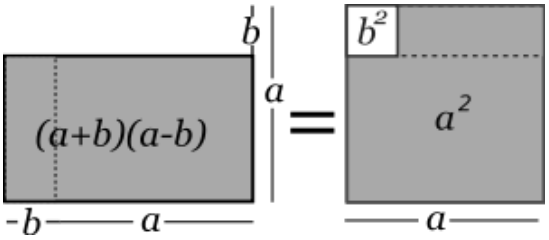
Cuando se multiplican dos binomios que tienen un término común, se suma el cuadrado del término común con el producto el término común por la suma de los otros, y al resultado se añade el producto de los términos diferentes.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplo:

$$(3x+4)(3x-7) = (3x)^2 + (4-7)(3x) + (4)(-7) = 9x^2 - 9x - 28$$

Binomios conjugados



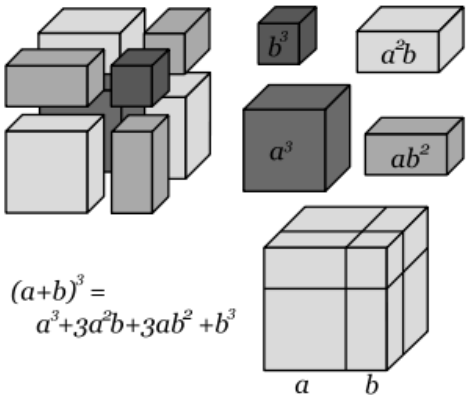
Dos binomios que sólo se diferencien en el signo de la operación se denominan binomios conjugados. Para multiplicar binomios conjugados, basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos, obteniendo una diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(3x+5y)(3x-5y) = (3x)^2 - (5y)^2 = 9x^2 - 25y^2$$

Binomio al cubo



Para calcular el cubo de un binomio, se suma: el cubo del primer término, con el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cuando la operación del binomio es resta, el resultado es: el cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo

$$(x+2y)^3 = x^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$$

$$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

Polinomio al cuadrado

Para elevar un polinomio con cualquier cantidad de términos, se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de la suma de los productos de cada posible par de términos.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

Ejemplo:

$$(3x+2y-5z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 2(6xy - 15xz - 10yz)$$

$$= 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12xy - 30xz - 20yz$$

OTRAS IDENTIDADES

Dado que la notabilidad de un producto es un concepto ambiguo, no existe una lista determinante que indique cuales productos son los únicos que pueden llamarse notables y los demás no. Existen otras fórmulas, que aunque menos usadas que las

anteriores, pueden en cierto contexto ser consideradas productos notables. Entre ellas se destacan:

Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Resta de cubos

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Es más frecuente listar las dos fórmulas anteriores como fórmulas de factorización ya que los productos tienen una forma particularmente simétrica pero el resultado sí (contrastar por ejemplo con la fórmula de binomio al cubo). La suma y diferencia de cubos se pueden generalizar a sumas y diferencias de potencias n-ésimas:

Suma de potencias n-ésimas

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$

Aunque la fórmula anterior sólo es válida cuando n es impar.

Diferencia de potencias n-ésimas

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

Las fórmulas de binomio al cuadrado y binomio al cubo se pueden generalizar con el Teorema de Newton.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\
a^4 - b^4 &= (a+b)(a-b)(a^2 + b^2) \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc
\end{aligned}$$

Ejercicios de productos notables

Binomio al cuadrado **$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$**

$(x + 3)^2 =$

Suma por diferencia $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
$(2x + 5) \cdot (2x - 5) =$

Binomio al cubo $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$
$(x + 3)^3 = X^3 + 9X^2 + 27X + X^3$

Trinomio al cuadrado $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
$(x^2 - x + 1)^2 =$

Suma de cubos $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$; $x^3 + 27 =$

Diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = 8x^3 - 27 =$

Producto de dos binomios que tienen un término común
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, $(x + 2)(x + 3) =$

Desarrolla los binomios al cuadrado.
1.- $(x + 5)^2 =$
2.- $(2x - 5)^2 =$
3.- $(x^2 - x/2)^2$

Desarrolla los binomios al cubo.

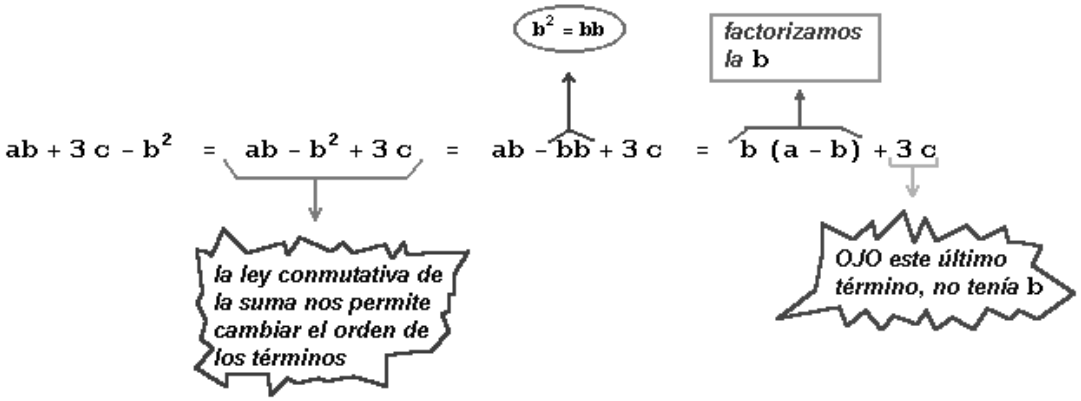
1 $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$
2 $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$
3 $(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 =$
4 $(2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 =$

Desarrolla las sumas por diferencias

1.- $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$
2.- $(x + 5) \cdot (x - 5) =$
3.- $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$
4.- $(3x - 5) \cdot (3x - 5) =$

2.3 Factorización

En matemáticas, la factorización es la descomposición de un objeto (por ejemplo, un número, una matriz o un polinomio) en el producto de otros objetos más pequeños (factores), que, al multiplicarlos todos, resulta el objeto original. Por ejemplo, el número 15 se factoriza en números primos 3 × 5; y a^2-b^2 se factoriza en



el binomio conjugado (a - b)(a + b).

La Factorización se utiliza normalmente para reducir algo en sus partes constituyentes. Factorizar enteros en números primos se describe en el teorema fundamental de la aritmética; factorizar polinomios en el teorema fundamental del álgebra.

Factorizar un polinomio

Antes que nada hay que decir que no todo polinomio se puede factorizar utilizando números reales, si se consideran los números complejos sí se puede. Existen métodos de factorización, para algunos casos especiales.

Caso I - Factor común Sacar el factor común es extraer la literal común de un polinomio, binomio o trinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes.

Factor común monomio. Factor común por agrupación de términos

$ab + ac + ad = a(b + c + d)$

$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$

Factor común polinomio.

$c(a + b) + d(a + b) + e(a + b) = (a + b)(c + d + e)$

Caso II - Factor común por agrupación de términos

Para trabajar un polinomio por agrupación de términos, se debe tener en cuenta que son dos características las que se repiten. Se identifica porque es un número par de términos. Para resolverlo, se agrupan cada una de las características, y se le aplica el primer caso, es decir, $ab+ac+bd+dc = (ab+ac)+(bd+dc$

$x^2 + bx + c$

Caso III - Trinomio cuadrado perfecto

Se identifica por tener tres términos, de los cuales dos tienen raíces exactas, y el restante equivale al doble producto de las raíces.

Para solucionar un T.C.P. debemos organizar los términos dejando de primero y de tercero los términos que tengan raíz cuadrada, luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis, separándolos por los signos que acompaña al segundo término, al cerrar el paréntesis elevamos todo el binomio al cuadrado.

Ejemplo:

$(5x - 3y)^2=25x^2 - 30xy + 9y^2$

$(3x + 2y)^2=9x^2 + 12xy + 4y^2$

$(x + y)^2=x^2 + 2xy + y^2$

Ejemplo: $-20xy+4x^2+25y^2$

Organizando los términos tenemos

$4x^2 - 20xy + 25y^2$

Extrayendo la raíz cuadrada del primer y último término y agrupándolos en un paréntesis separado por el signo del segundo término y elevando al cuadrado nos queda:

$(2x - 5y)^2$

Caso IV - Diferencia de cuadrados

Se identifica por tener dos términos elevados al cuadrado y unidos por el signo menos. Se resuelve por medio de dos paréntesis, (parecido a los productos de la forma), uno positivo y otro negativo. En los paréntesis deben colocarse las raíces.

Ejemplo:

$(9y^2) - (4x^2)$

$(3y-2x)(3y+2x)$

Caso V - Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Se identifica por tener tres términos, dos de ellos son cuadrados perfectos, pero el restante hay que completarlo mediante la suma para que sea el doble producto de sus raíces, el valor que se suma es el mismo que se resta para que el ejercicio original no cambie. Para solucionarlo, se usan como ayuda los casos número III y IV.

Para moldar debe de saber el coseno de la raíz de la suma de dos polinomio x que multiplicado sale igual a la raíz de 2

Caso VI - Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se identifica por tener tres términos, hay una literal con exponente al cuadrado y uno de ellos es el término independiente.

Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados o restados den como resultado el término del medio. *Ejemplo:

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

$a^2 + 2a - 15 = (a + 5)(a - 3)$

Caso VII. Factorización de Trinomios (ax^2+bx+c; $a \neq 1$)

Descripción: Analice el ejercicio. Si es un trinomio, primero coteje si se puede Factorizar por factor común mayor y factorice el trinomio resultante. Para verificar la respuesta, se puede usar FOIL o la ley distributiva. Siga los pasos que aparecen a continuación:

Pasos:

1) Ordene los términos según el grado de mayor a menor.

2) Coteje si el coeficiente en el término principal (primer término) no es 1.

3) Halle parejas de factores del primer y el último término.

4) Halle dos parejas de números que la suma de sus productos sea el término el medio.

5) Escriba entre paréntesis los factores que cumplen con las condiciones antes mencionadas agrupando los del primer término con los del último término.

Ejemplo:

Factorizar: $2x^2 - 7x + 3$

Solución:

Los factores de $2x^2$ son 2x y x. Los factores de 3 son 3 y 1, -3 y -1. Al multiplicar 2x y -3 da -6x. Al multiplicar -1 y x da -x. Luego, al sumar los productos -6x y -x da -7x. Así que, el resultado es:$(2x - 1)(x - 3)$

FACTORIZAR LOS SIGUIENTES TRINOMIOS:

1) $3x^2 + 7x + 4$

2) $4x^2 + 4x - 3$

3) $6y - 45 + 3y^2$

4) $6x^2 + 7x + 2$

5) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

Soluciones:

1) $(3x + 4)(x + 1)$

2) $(2x - 1)(2x + 3)$

3) $3(y + 5)(y - 3)$

4) $(3x + 2)(2x + 1)$

5) $(4a - 3b)(4a - 3b)$

CASO VIII. SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

En una diferencia de cubos perfectos.

Procedimiento para factorizar

1) Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio.

2) Se forma un producto de dos factores.

3) Los factores binomios son la diferencia de las raíces cúbicas de los términos del binomio.

4) Los factores trinomios se determinan así: El cuadrado de la primera raíz más el producto de estas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 1: Factorizar $y^3 - 27$

La raíz cúbica de: y^3 es y

La raíz cúbica de: 27 es 3

Según procedimiento $y^3 - 27 = (y - 3)[(y)^2 + (y)(3) + (3)^2]$

Suma de cubos perfectos

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Procedimiento para factorizar en una suma de cubos perfectos.

1) Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio.

2) Se forma un producto de dos factores.

3) Los factores binomios son la suma de las raíces cúbicas de los términos del binomio.

4) Los factores trinomios se determinan así: El cuadrado de la primera raíz menos el producto de estas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 1: Factorizar $x^3 + 1$

La raíz cúbica de : x^3 es x

La raíz cúbica de : 1 es 1

Según procedimiento $x^3 + 1 = (x + 1)[(x)^2 - (x)(1) + (1)^2]$

Luego $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

EJERCICIOS DE FACTORIZACIÓN

I.-Factorizar los siguientes polinomios

1 $\frac{2x^5}{5} - \frac{6x^4}{5} + \frac{14x^2}{15} =$

2 $xy - 2x - 3y + 6 =$

3 $25x^2 - 1 =$

4 $36x^6 - 49 =$

5 $x^2 - 2x + 1 =$

6 $x^2 - 6x + 9 =$

7 $x^2 - 20x + 100 =$

8 $x^2 + 10x + 25 =$

9 $x^2 + 14x + 49 =$

10 $x^3 - 4x^2 + 4x =$

11 $3x^7 - 27x =$

12 $x^2 - 11x + 30$

13 $3x^2 + 10x + 3$

14 $2x^2 - x - 1$

II Factorizar

1) $a^2b - ab^2 =$

2) $6p^2q + 24pq^2 =$

3) $12x^3y - 48x^2y^2 =$

4) $9m^2n + 18\,mn^2 - 27mn =$

5) $1/4ma + 1/4mb + 1/4mc =$

6) $1/5x^3 + 1/10x^2 - 1/15x =$

7) $x^2 - 8x + 16 =$

8) $16y^2 + 24y + 9 =$

9) $36a^2 - 12a + 1 =$

10) $4x^2 + 20xy + 25y^2 =$

11) $16x^2 - 25y^2 =$

12) $144 - x^2y^2 =$

13) $36 - 25a^2 =$

14) $25 - 4a^2 =$

15) $16m^2n^2 - 9p^2 =$

16) $x^2 - 4x + 3 =$

17) $x^2 - 2x - 15 =$

18) $x^2 - 7xy - 18y^2 =$

19) $12 - 4x - x^2 =$

20) $5x^2 - 11x + 2 =$

21) $6x^2 - 7x - 5 =$

22) $12x^2 + 17x - 5 =$

23) $7u^4 - 7u^2v^2 =$

24) $kx^3 + 2kx^2 - 63kx =$

25) $5x^3 - 55x^2 + 140x =$

26) $4m^2n^2 + 24m^2n - 28m^2 =$

27) $7hkx^2 + 21\,hkx + 14hk =$

28) $wx^2y - 9wxy + 14wy =$

29) $2x^3 + 10x^2 + x + 5 =$

30) $px + py + qx + qy =$

31) $3x^3 + 12x^2 - 2x - 8 =$

32) $3x^3 + 2x^2 + 12x + 8 =$

33) $x^3 - 27 =$

34) $125x^3 + y^3 =$

35) $8y^3 + z^3 =$

36) $64 - y^3 =$

Respuestas ejercicio II:

1) $ab(a - b)$

2) $6pq(p + 4q)$

3) $12x^2y(x - 4y)$

4) $9mn(m + 2n - 3)$

5) $\frac{1}{4}m(a+b+c)$

6) $\frac{1}{5}x(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})$

7) $(x - 4)^2$

8) $(4y + 3)^2$

9) $(6a - 1)^2$

10) $(2x + 5y)^2$

11) $(4x - 5y)(4x + 5y)$

12) $(12 + xy)(12 - xy)$

13) $(6 + 5a)(6 - 5a)$

14) $(5 + 2a)(5 - 2a)$

15) $(4mn + 3p)(4mn - 3p)$

16) $(x - 3)(x - 1)$

17) $(x - 5)(x + 3)$

18) $(x - 9y)(x + 2y)$

19) $(6 + x)(2 - x)$

20) $(5x - 1)(x - 2)$

21) $(3x - 5)(2x + 1)$

22) $(4x -1)((3x + 5)$

23) $7u^2(u^2 - v^2) = 7u^2(u + v)(u - v)$

24) $kx(x^2 + 2x -63) = kx(x + 9)(x - 7)$

25) $5x(x^2 - 11x +28) = 5x(x - 4)(x - 7)$

26) $4m^2(n^2 + 6n - 7) = 4m^2(n + 7)(n - 1)$

27) $7hk(x^2 + 3x + 2) = 7hk(x + 1)(x +2)$

28) $wy(x^2 - 9x + 14) = wy(x - 2)(x - 7)$

29) $(2x^2 + 1)(x + 5)$

30) $(p + q)(x + y)$

31) $(3x^2 – 2)(x + 4)$

32) $(x^2 + 4)(3x + 2)$

33) $(x – 3)(x^2 + 3x + 9)$

34) $(5x + y)(25x^2 – 5xy + y^2)$

35) $(2y + z)((4y^2 – 2yz + z^2)$

36) $(4 – y)(16 + 4y + y^2)$

UNIDAD III ECUACIONES ALGEBRAICAS

Introducción

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, sin importar el valor que tomen las variables implicadas en cada expresión (denominados miembros de la ecuación; el primer miembro es el que aparece antes del signo de igualdad, y el segundo miembro es el que aparece en segundo lugar, aunque es perfectamente válido permutarlos).

En muchos problemas matemáticos, la condición del problema se expresa en forma de ecuación algebraica; se llama solución de la ecuación a cualquier valor de las variables de la ecuación que cumpla la igualdad; es decir, a cualquier elemento del conjunto de números o elementos, sobre el que se plantea la ecuación, que cumpla la condición de satisfacer la ecuación.

Al igual que en otros problemas matemáticos, es posible que ningún valor de la incógnita haga cierta la igualdad.

También puede que todo valor posible de la incógnita valga. Estas últimas expresiones se llaman identidades. Si en lugar de una igualdad se trata de una desigualdad entre dos expresiones, se denominará inecuación.

Una ecuación polinómica es una igualdad entre dos polinomios:

$$x^3y + 4x - y = 2xy$$

En particular, realizando transformaciones sobre los miembros de la ecuación (en ambos miembros las mismas transformaciones y en el mismo orden) puede conseguirse que uno de los miembros se reduzca a 0, razón por la cual se suele considerar que una ecuación polinómica es una en la que en el primer miembro aparece un polinomio y en el segundo aparece el cero (volviendo a nuestro ejemplo, la ecuación resultaría

$$x^3y + 4x - y - 2xy = 0$$

Una ecuación funcional es una ecuación en la que las constantes y variables que intervienen no son números reales sino funciones.

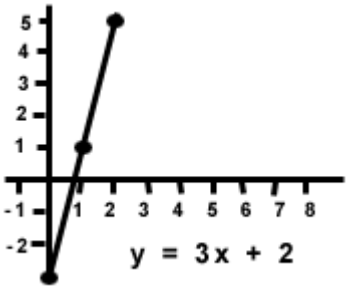
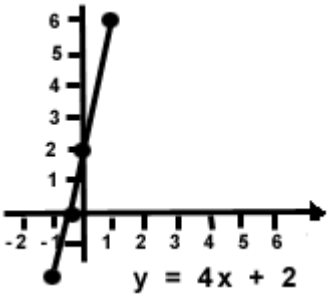
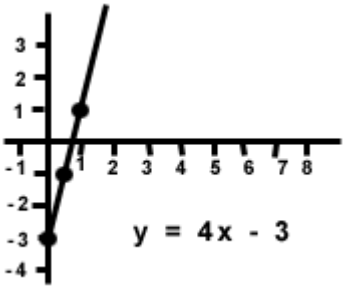
3.1 Ecuación lineal

Decimos que una función es lineal si se puede expresar de la forma

$$y = mx + b \text{ donde m y b son constantes}$$

La gráfica de una función lineal es una recta que tiene pendiente m e intersecta al eje y en el punto (0, b).

A continuación se muestran tres ecuaciones lineales con sus respectivas gráficas y una lista de algunas de las parejas ordenadas que pertenecen a dichas funciones lineales.

y= 3x + 2 m=3 b=2	y= 4x +2 m=4 b=2	y= 4x - 3 m=4 b=-3
		

x	y
-1	-1
-1/2	1/2
0	2
1/2	7/2
1	5

x	y
-1	-2
-1/2	0
0	2
1/2	4
1	6

x	y
-1	-7
0	-3
1/2	-1
1	1
2	5

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicamos el criterio del operador inverso (inverso aditivo o inverso multiplicativo), como veremos en el siguiente ejemplo:

Resolver la ecuación **2x – 3 = 53**

Debemos tener las letras a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=), entonces para llevar el –3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el inverso aditivo (el inverso aditivo de –3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Entonces hacemos:

2x – 3 + 3 = 53 + 3

En el primer miembro –3 se elimina con +3 y tendremos:

2x = 53 + 3 entonces **2x = 56**

Ahora tenemos el número 2 que está multiplicando a la variable o incógnita **x**, entonces lo pasaremos al otro lado de la igualdad dividiendo. Para hacerlo, aplicamos el inverso multiplicativo de 2 (que es ½) a ambos lados de la ecuación:

2x • ½ = 56 • ½

Simplificamos y tendremos ahora:

x = 56 / 2 entonces **x = 28**

Entonces el valor de la incógnita o variable "x" es 28.

Resolución de ecuaciones con agrupaciones de signos

Para resolver este tipo de ecuaciones primero debemos suprimir los signos de agrupación considerando la ley de signos, y en caso de existir varias agrupaciones, desarrollamos de adentro hacia afuera las operaciones.

Veamos el siguiente ejemplo:

$2x - [x - (x - 50)] = x - (800 - 3x)$	
$2x - [x - x + 50] = x - 800 + 3x$	Primero quitamos los paréntesis.
$2x - [50] = 4x - 800$	Reducimos términos semejantes.
$2x - 50 = 4x - 800$	Ahora quitamos los corchetes.
$2x - 4x = -800 + 50$	Transponemos los términos, empleando el criterio de operaciones inversas.
$-2x = -750$	Nuevamente reducimos términos semejantes
$x = \frac{-750}{-2} = 375$	Despejamos x pasando a dividir a – 2, luego simplificamos.

Advertencia

Para suprimir los signos de agrupación debemos tener en cuenta que:

a) Si tenemos un signo + antes de un signo de agrupación no afecta en nada a lo que esté dentro de este signo. Por ejemplo: +(3x – 5) = 3x – 5

b) Si por el contrario, tenemos un signo – antes del signo de agrupación, este signo afectará a todo lo que esté dentro del signo. **Todos los términos dentro del signo de agrupación cambiarán de signo**. Por ejemplo: –(3x – 5) = – 3x + 5

Resolución de ecuaciones con productos incluidos

Para resolver este tipo de ecuaciones, primero se efectúan los productos incluidos y luego se sigue el procedimiento general (aplicando el criterio de las operaciones inversas).

Observemos un ejemplo:

$5(x-3)-(x-1)=(x+3)-10$	
$5x-x-x=3-10+15-1$	Resolvemos el producto indicado, y adicionalmente eliminamos los paréntesis.
$5x-x-x=3-10+15-1$	Llevamos los términos semejantes a un lado de la igualdad, y los términos independientes al otro lado (empleamos operaciones inversas.)
$3x=7$	Reducimos términos semejantes en ambos lados de la igualdad.
$x=\frac{7}{3}$	Despejamos x pasando 3 a dividir.

3.2 Ejercicios de ecuaciones de primer grado

Despeja x

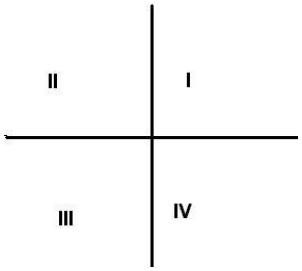
1) 2x=6
2) 2x-3=6+x
3) 2(2x-3)= 6+ x
4) $\frac{x-1}{5}-\frac{x-3}{2}$ = -1
5) ¾(2x +4) = x +19
6) 4(x-10) = -6(2-x)-6x
7) 2(x+1) -3(x-2) = x + 6
8) $\frac{x-1}{4}-\frac{x-5}{36}=\frac{x+5}{9}$
9) $\frac{3x+1}{4}-\frac{2-4x}{3}=\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}$
10) $\frac{5}{x-7}=\frac{3}{x-2}$
11) $\frac{4}{x-3}=\frac{5}{x-2}$
12) $6(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16})=3(\frac{3}{4x}-1/4)-3/8(3x-2)$
13) $2\text{-}(-2(x+1)-\frac{x-3}{2})=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$
14) $2/3(x\text{-}(1\text{-}\frac{x-2}{3}))$ +1= x

3.3 Ecuaciones lineales con dos variables

Sistemas de Coordenadas Cartesianas

El sistema de coordenadas cartesianas es formado por dos rectas; una horizontal y otra vertical, en el cual ambos se intersecan en el punto 0 de cada recta. Las dos rectas son llamados ejes.

Estos dos ejes dividen el plano cartesiano en 4 secciones llamadas cuadrantes. Estos cuadrantes son numerados "contra el reloj" del I al IV de la siguiente forma:

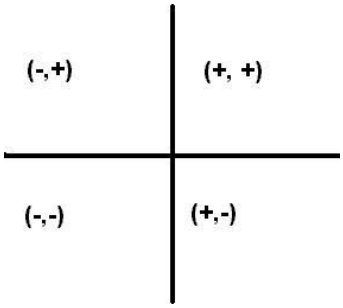


Cada punto en el plano se puede identificar por un par de números llamado par ordenado. El primer número del par, que se llama la abcisa; está en la recta horizontal, el eje de x. El segundo número del par se llama la ordenada que se encuentra en la recta vertical, el eje de y.

$$(1, 4)$$

Eje de x Eje de y
Abcisa Ordenada

Los números negativos y positivos se colocan de la siguiente manera:



El sistema de coordenadas es usada además de localización de puntos en el plano, para graficar el conjunto de soluciones de ecuaciones de dos variables como:

$$y = 4x + 8$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$

$$3y = 5x + 8$$

Digamos que queremos hacer la gráfica la ecuación lineal y = 3x + 7. Hay que asignar valores a la x y resolverlo para encontrar el valor de y. Con los resultados se formaran los puntos de la gráfica de la siguiente manera:

Ej. Encontrar los puntos de la ecuación y = 3x + 7. Vamos a utilizar la siguiente tabla para organizar el trabajo. Le daremos a la x , los valores de -2, -1, 0, 1 y 2

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

Y = 3x + 7
Y = 3(-2) + 7 [Cuando la x es -2, la y es 1]
Y = -6 + 7
Y = 1

Y = 3x + 7
Y = 3(-1) + 7 [Cuando la x es -1, la y es 4]
Y = -3 + 7
Y =4

Y = 3x + 7
Y = 3(0) + 7 [Cuando la x es 0, la y es 7]
Y = 0 + 7
Y = 7

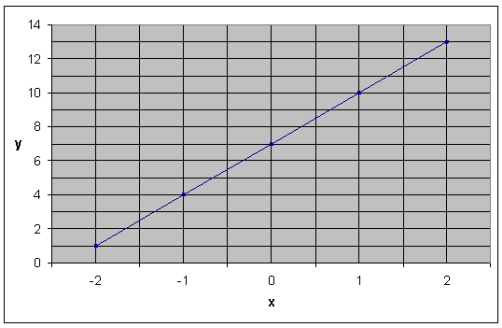
Y = 3x + 7
Y=3(1) + 7
Y= 3 + 7
Y = 10 [Cuando la x es 1, la y es 10]

Y = 3x + 7
Y= 3(2) + 7
Y= 6 + 7
Y = 13 [Cuando la x es 2, la y es 13]

x	y
-2	1
-1	4
0	7
1	10
2	13

Y así se resuelve con cada valor que le quieras dar a la x de la tabla. Es por esto que x se llama la variable independiente, ya que le puedes dar cualquier valor de su dominio, que son los valores permitidos para la x. En el caso de esta ecuación lineal, x puede ser cualquier número real, pero en nuestro estudio se encontrarán ecuaciones que tienen restricciones en su dominio.

Veamos cómo queda la gráfica de la ecuación y = 3x + 7. (Ver Parte



Para verificar que un punto sea solución de la ecuación hay que hacer lo siguiente:

1. Sustituir la abcisa por x.
2. Sustituir la ordenada por la y. (siempre recordar la forma {x,y})
3. Resolver la ecuación.
4. Si resulta ser igualdad, entonces el punto es solución de la ecuación.

Ejemplo 1 : ¿ Es (3,11) una solución a la ecuación y = 2x + 5?

Y = 2x + 5
11 = 2(3) + 5 Sustituir los puntos por x y y
11 = 6 + 5 Resolver
11 = 11 Hay igualdad

Quiere decir que el punto (3,11) es una solución a la ecuación.

Ejemplo 2: ¿Es (2,8) una solución de la ecuación y = 2x + 5?

y = 2x + 5
8 = 2(2) + 5 Se sustituyó la x y la y
8 = 4 + 5 Resolver
8 = 9 FALSO, no es solución

El punto (2,8) no es solución.

Interceptos, pendiente y ecuación de la recta

Las ecuaciones lineales son siempre de la forma:

$$y = mx + b$$

Donde **m** es la pendiente y la **b** es el intercepto en y.

El intercepto en y esta expresada por: (0,b) y es donde la recta corta el eje de y
El intercepto en x esta expresada por: (a,0) y es donde la recta corta el eje de x.

Si la ecuación es y = 2x + -6, el intercepto en y seria: (0,-6)

Ejemplo 1: Buscar el intercepto en y de la ecuación y = 3x + -5.

Solución: En este caso, la b es -5; quiere decir que el intercepto en y es (0, -5)

Ejemplo 2: Buscar el intercepto en y de la ecuación y = 4x.

Solución: En este caso, la b no está presente en la ecuación, pero la ecuación y = 4x equivale a y = 4x + 0. Por lo tanto, el intercepto en y es (0, 0).

Ejemplo 3: Buscar el intercepto en y de la ecuación 3y = 18x + 24

Solución: ¡Ojo! El intercepto en y no es 24, hay que fijarse bien que la ecuación no está en su forma y = mx + b, hay que despejar de la siguiente manera:

$$\frac{3y}{3} = \frac{18x}{3} + \frac{24}{3}$$

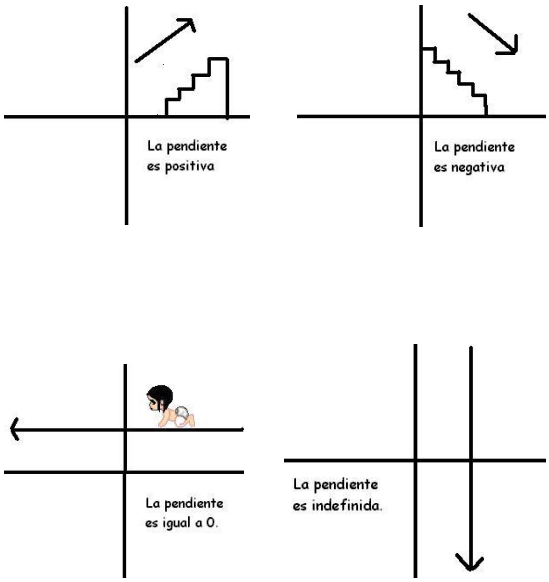
y = 6x + 8 < Ahora, está en su forma y = mx + b. El intercepto en y es (0,8)>

La Pendiente

La pendiente es la inclinación de una recta. Una forma de calcular la pendiente de una recta usando la siguiente fórmula. Dado dos puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2),que están en una recta L, la inclinación o la pendiente m de la recta de determina mediante

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente es la razón de cambios de x y y. . Esta puede ser positiva, negativa, puede ser 0 y en algunos casos, la pendiente esta indefinida.



Ejemplo1: Buscar la pendiente de los puntos (2,4) y (3,6)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 4}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

La pendiente es 2.

A veces, tenemos dos puntos, y queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por estos puntos. Primero, hay que determinar la pendiente de la recta, y para hallar la ecuación, utilizamos la ecuación $y = mx + b$ donde m es la pendiente de la recta y b es el intercepto de b.

Ejemplo: Buscar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,5) y (0,9).

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{0 - 1} = \frac{4}{-1} = -4$$

La pendiente es -4. Ahora, hay que buscar el intercepto en y. En este caso, ya está dado por (0,9)

Si la pendiente es -4, y el intercepto (0,9) entonces la ecuación es:

$y = -4x + 9$

Nota: Para buscar el intercepto en y, hay que siempre fijarse que la ecuación este en su forma

y = mx + b. Si no lo está, hay que expresarla respecto a y.

Ejemplo: 9x - 3y = 12 <No está en la forma y = mx + b>

-3y = -9x + 12 <Dejar la y sola, pasar el 9x opuesto>

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-9x}{-3} + \frac{12}{-3}$$ <Dividir entre 3 para despejar la y>

y = 3x - 4

Ya está en su forma y = mx + b, y su intercepto en y es -4.

También se puede conseguir el intercepto en y , sustituyendo la x por 0.

Intercepto de x

Para buscar el intercepto en x, se sustituye la y por 0 en la ecuación.

Ejemplo: y = 9x + 5
0 = 9x + 5
-9x = 5

$$\frac{-9x}{-9} = \frac{5}{-9}$$

x = -5/9

El intercepto en y es (-5/9, 0)

Forma punto - pendiente

Hay otra manera para buscar una ecuación lineal, cuando se conoce un punto y la pendiente, utilizando la fórmula punto - pendiente:

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Ejemplo: Buscar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-7) y tiene pendiente de 8.

m= 8

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$
y - (-7) = 8(x -3) Se sustituyó
y + 7 = 8x - 24 Propiedad distributiva
y = 8x - 24 -7 Se resuelve hasta dejarlo en y=mx+b
y = 8x - 31

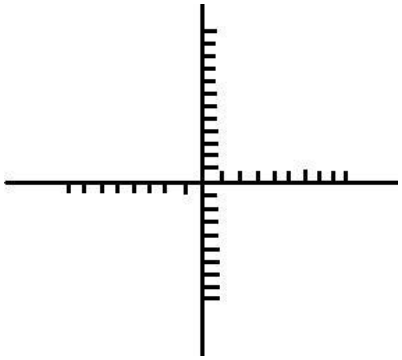
3.3 Ejercicios de ecuaciones lineales con dos variables

A. Indique a qué cuadrante pertenece los siguientes puntos.

1. (6,8)
2.(-2,7)
3. (-8,-3)
4. (0,-4)
5.(1,0)

B. Localice los siguientes puntos en la gráfica:

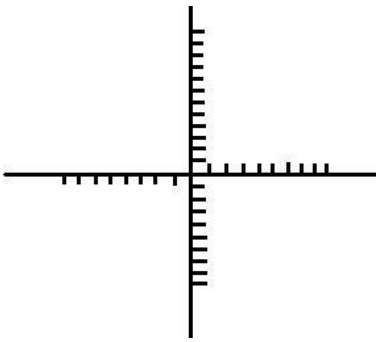
1. (-3,-7)
2. (-2, -4)
3. (-1,-1)
4.(0 , 2)
5.(1 , 5)
6.(2 , 8)
7.(3 ,11)



C. Resolver la ecuación para encontrar sus puntos y coloque éstos en la gráfica.

1. y = 2x + 1

x	y
0	
-1	
1	
2	



D. De los siguientes puntos, ¿cuáles son soluciones a la ecuación y = -3x + 9?

1. (2, 3)
2. (5, 4)
3. (1,9)
4. (0,9)
5. (4,-3)

E. Buscar el intercepto de **x** y **y** de las siguientes ecuaciones:

1. y = 4x + 6
2. y = -3x + 7

F. Buscar la pendiente de los siguientes puntos:

1. (2,5) y (-3,8)
2. (4,-8) y (-7,0)
3. (1,0) y (-2,-4)

G. Buscar la ecuación de los puntos dados.
1. (5,0) y (2,-1)
2. (-3, -4) y (6,0)

Cuadro mágico algebraico

Observa el siguiente cuadrado:

(2-X)(2+X)	**$(X+5)^2$**	**$(X+4)^2$**	**11(1-X)**	**5(x+4)**
5(1-3X)	**-4(X-1)**	**(5-X)(5+2X)**	**7(X+1)+14**	**3+X**
4(1-X)-1	**$(X+6)^2$**	**-15X-2**	**-X**	**-(1+20X)**
$(3-X)^2+8$	**6(1-X)**	**-X+4**	**$(X+5)^2+2$**	**-3X+3**
-10X+1	**$(X-1)^2$**	**$(X-3)^2+1$**	**$(X-2)^2+1$**	**$(X-4)^2-2$**

1. Escribe las sumas de las doce líneas del cuadrado mágico.

2. Igualando dos líneas entre si y resolviendo la ecuación, halla el valor de x. Repítelo con otras dos líneas.

3. Si el número mágico de este cuadrado es 65, halla de nuevo el valor que debe tener x.

4. Comprueba, con este valor, que se trata realmente de un cuadrado mágico.

5. Halla el cuadrado numérico correspondiente.

3.4 Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de la forma $ax^2+c=0$

Este tipo de ecuaciones son las más sencillas de resolver, ya que se resuelven igual que las de primer grado. Tengamos por ejemplo:

$$x^2 - 16 = 0$$

Pasamos -16 al segundo término

$$x^2 = 16$$

Ahora pasamos el exponente al segundo término, haciendo la operación opuesta; en este caso, raíz cuadrada

$$X = \pm\sqrt{166} = \pm 4$$ La ecuación ya está resuelta

Ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$

Ejemplo en pasos	*Descripción de Pasos*
$3x^2 + 9x = 0$	En este tipo de ecuaciones, lo primero que hacemos es declarar x como factor común de ambas expresiones.
$x(3x + 9) = 0$	Esta expresión es una multiplicación cuyo resultado es 0; por lo tanto, uno de los factores tiene que ser igual a 0. Así que, o el primer factor (x) es igual a cero (ésta es la primera solución)
$3x + 9 = 0$	
$3x = -9$	
$x= -9/3 = -3$	Por lo tanto, las 2 soluciones válidas para esta ecuación son 0 y -3

Ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$

Tengamos por ejemplo la ecuación:

Ejemplo	Descripción de los pasos
$x^2 + 5x + 6 = 0$	Para resolver este tipo de ecuaciones utilizamos directamente la siguiente fórmula:
$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$	Por lo tanto, para resolver esta ecuación sustituimos las letras por los números:
$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$	A partir de esta fórmula obtenemos que las soluciones válidas para esta ecuación son -2 y -3

Solución por Factorización:

$$3n^2 + 14n - 5 = 0$$

$$(3n-1)(n+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3n - 1 = 0 \quad ó \quad n + 5 = 0$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{3} \quad ó \quad n = -5$$

Observa; ***la ecuación inicial se factoriza, cada parte de la factorización se iguala a cero y se despeja, entonces tienes dos resultados.***

Así pues:

$$x^2 + 3kx - 10k^2 = 0$$

$$(x+5k)(x-2k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 5k = 0 \quad ó \quad x - 2k = 0$$

$$\therefore \quad x = -5k \quad ó \quad x = 2k$$

Diversos tipos de ecuaciones cuadráticas:

$$2\sqrt{x} = x - 8$$

$$\left(2\sqrt{x}\right)^2 = (x-8)^2$$

$$4x = x^2 - 16x + 64$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$(x-16)(x-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 16 = 0 \quad ó \quad x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad x = 16 \quad ó \quad x = 4$$

Para una ecuación de la forma $x^2 = a$, con a real podemos proceder como sigue:

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{a} \quad ó \quad x = -\sqrt{a}$$

Ejemplos:

Ecuación	*Raíces*
$x^2 = 45$	$\left\{-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\right\}$
$x^2 = -9$	$\{-3i, 3i\}$
$7n^2 = 12$	$\left\{-\frac{2\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{21}}{7}\right\}$
$(3n+1)^2 = 25$	$\left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$

Encuentre la solución de:

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

La ecuación ya está igualada a cero y solo hay que factorizar e igualar sus factores a cero y luego resolver en términos de **x**:

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} + 16) = 0$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{x} - 4)(\mathbf{x} - 4) = 0$$

Ahora, si $x = 0$

o si $x - 4 = 0$ $\quad \mathbf{x = 4}$

Resolver cada ecuación por el método de factorización

1) $(\mathbf{x} + 5)(\mathbf{x} - 2) = 0$
2) $3\mathbf{y}^2 + 8\mathbf{y} - 9 = 2\mathbf{y}$
3) $9\mathbf{x}^2 - 4 = 0$
4) $\mathbf{a}^2 - 14\mathbf{a} = -45$
5) $\mathbf{z}(2\mathbf{z} - 3) = 14$
6) $\mathbf{x}^3 - 22\mathbf{x} = 9\mathbf{x}^2$

Ecuación cuadrática completando el cuadrado

Los siguientes trinomios son cuadrados perfectos

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2, \qquad x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$$

$$x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2, \qquad x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$$

Nótese que en todos ellos el término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente en x.

Ejemplo 1:

Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 + 10x - 2 = 0,$

$x^2 + 10x = 2,$

$x^2 + 10x + 25 = 2 + 25,$

$(x+5)^2 = 27,$

$\therefore \quad x = -5 - \sqrt{27} \quad ó \quad x = -5 + \sqrt{27}$

Ejemplo 2:

$x^2 + 4x + 7 = 0,$

$x^2 + 4x = -7,$

$x^2 + 4x + 4 = -7 + 4,$

$(x+2)^2 = -3,$

$x + 2 = \pm\sqrt{-3} = \pm\, i\,\sqrt{3},$

$\therefore \quad x = -2 + i\sqrt{3} \quad ó \quad x = -2 - i\sqrt{3}$

Ejercicio

Resolver las siguientes ecuaciones con este método:

$x^2 - 3x + 1 = 0, \qquad respuesta: \quad \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$2x^2 + 12x - 5 = 0, \qquad respuesta: \quad \left\{\frac{-6-\sqrt{46}}{2}, \frac{-6+\sqrt{46}}{2}\right\}$

$x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad respuesta: \quad \{-2, 4\}$

Verificar la solución de los siguientes polinomios:

$x^2 + 4x - 21, \quad 9x^2 - 6x + 1, \quad 15x^2 + 17x - 4, \quad 2x^2 - 6x - 1.$

Podemos utilizar esta fórmula para encontrar las raíces de cualquier ecuación cuadrática simplemente sustituyendo los valores de los coeficientes a, b, c en ella.

Ejemplos:

$a\,x^2 + b\,x + c$	(a, b, c)	$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x^2 + 5\,x + 2 = 0$	(1, 5, 2)	$\left\{\dfrac{-5 \pm \sqrt{7}}{2}\right\}$
$x^2 - 2\,x - 19 = 0$	(1, -2, -19)	$\{1 \pm 3\,i\,\sqrt{2}\}$
$x^2 - 2\,x - 4 = 0$	(1, -2, -4)	$\{1 \pm \sqrt{5}\}$

NOTA.- Las raíces negativas son IMAGINARIAS

Ejemplos resueltos

1) **$x^2 + 8x = 48$**, que también puede escribirse **$x^2 + 8x - 48 = 0$**

Al primer miembro de la ecuación **$(x^2 + 8x)$** le falta un término para completar el **cuadrado de la suma de un binomio** del tipo

$$(ax + b)^2$$

Que es lo mismo que **$(ax + b)\,(ax + b)$**

Que es lo mismo que **$ax^2 + 2axb + b^2$**

En nuestro ejemplo **$x^2 + 8x = 48$**, el **8** representa al doble del segundo número del binomio, por lo tanto, ese número debe ser obligadamente 8 dividido por 2 (8/2), que es igual a 4, y como en el cuadrado de la suma de un binomio **$(a^2 + 2ab + b^2)$** el tercer término corresponde al cuadrado del segundo término **$(4^2 = 16)$** amplificamos ambos miembros de la ecuación por 16, así tenemos

$$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$$

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 64}$$

la cual, factorizando, podemos escribir como sigue: **$(x + 4)\,(x + 4) = 64$**

Que es igual a **$(x + 4)^2 = 64$**

Extraemos raíz cuadrada de ambos miembros y tenemos $\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{64}$

Nos queda **$x + 4 = 8$**

Entonces **x = 8 − 4**

x = 4

2) Partamos con la ecuación $\mathbf{x^2 + 6x - 16 = 0}$

Hacemos $\mathbf{x^2 + 6x = 16}$

Luego, a partir de la expresión $\mathbf{x^2 + 6x}$ (primer miembro de la ecuación) debemos obtener una expresión de la forma $\mathbf{(ax + b)^2}$ (cuadrado de la suma de un binomio).

Para encontrar el término que falta hacemos:

$$(6/2)^2 = 3^2 = 9$$

(Para encontrar dicho término en cualquier ecuación siempre debemos dividir por 2 el valor real del segundo término y el resultado elevarlo al cuadrado).

Ahora, para obtener la expresión completa se suma 9 a ambos miembros de la ecuación: $\mathbf{x^2 + 6x = 16}$

$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 16 + 9}$

$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 25}$ factorizamos, y queda $\mathbf{(x + 3)(x + 3) = 25}$

$\mathbf{(x + 3)^2 = 25}$

3) Resolver la ecuación $\mathbf{2x^2 + 3x - 5 = 0}$

Vemos claramente que **a = 2, b = 3** y **c = −5**, así es que:

$$\mathbf{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Ahora, tenemos que obtener las dos soluciones, con el + y con el − :

$$\mathbf{x} = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{y también} \quad \mathbf{x} = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$$

Así es que las soluciones son $\mathbf{x} = 1 \;\; \mathbf{y} \;\; \mathbf{x} = \frac{-5}{2}$

4) Resolver: $\mathbf{-5x^2 + 13x + 6 = 0}$

Se identifican las letras, cuidando que la ecuación esté ordenada respecto a la **x**, de grado mayor a menor. Con esta condición tenemos: **a = − 5; b = 13; c = 6**.

Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 6}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - (-120)}}{-10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

Como la raíz buscada es 17 (el cuadrado de 17 es 289), se tiene entonces que:

$$x = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Según esto, tendremos dos raíces diferentes, una usando el signo + y otra usando el signo −.

Llamaremos X_1 y X_2 a las dos soluciones, que serán:

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-13 - 17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

3.5 Despeje de ecuaciones o fórmulas

Lo primero que debes de saber para poder despejar una fórmula, son los siguientes puntos:

Saber bien la jerarquización de las operaciones, es decir; que operación tiene más valor que otra.

1. Agrupación
2. Exponente y Radicación
3. Multiplicación y División
4. Suma y Resta
5. Comparación

Este último con pocos fines de aplicación por ahora, pero que también es un proceso de operación a seguir en temas de programación, por ejemplo.

Ejemplos de despejes de fórmulas

1.- Despejar a q2 de la Fórmula de atracción de cargas de la ley de Coulomb

El problema nos pide despejar q_2 de la ley de Coulomb.

$$F = K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Para ello lo primero que vamos hacer será darnos cuenta que nuestra operación tiene diversas operaciones, como multiplicación, división y una potencia elevada al cuadrado. Entonces, **¿cómo iniciamos?**

Si multiplicamos toda la ecuación por r^2 vamos a poder eliminarla del denominador, nos quedaría algo así:

$$r^2 \cdot F = r^2 \cdot K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Con esto podemos simplificar en el segundo miembro a r^2

$$r^2 \cdot F = Kq_1 \cdot q_2$$

Si observamos Kq1 están multiplicando ambos, entonces pasarán a dividir al otro miembro, es decir:

$$\frac{r^2 F}{Kq_1} = q_2$$

Invertimos la ecuación: $q_2 = \frac{r^2 F}{Kq_1}$

Listo…!! Problema resuelto, veamos otro ejemplo más complicado.

2.- Despeje "d" de la fórmula de atracción de Newton

Para poder obtener a "d" de la siguiente fórmula de Gravitación Universal de Newton

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

Vamos a despejar por partes, aunque este ejemplo no es nada complicado. Si sabemos que "d" está siendo dividida, entonces puede pasar a multiplicar lo del otro miembro, quedando así:

$$d^2 \cdot F = G \cdot m_1 \cdot m_2$$

Y la fuerza está multiplicándose, entonces puede ser divida por todo lo que tenemos en el segundo miembro, quedando así:

$$d^2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}$$

Pero como lo que nos piden, es solamente la distancia. Entonces sacamos raíz cuadrada de ambos miembros, quedando así:

$$d = \sqrt{\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$$ Por lo que la respuesta es esa.

Ahora veamos un ejemplo aún más difícil.

3.- Despeje a M de la siguiente fórmula

$$P = \frac{\sqrt{3Mk}}{2t^2}$$

Lo primero que haremos será nuevamente analizar las operaciones que están dentro de esa ecuación y por lo pronto tenemos una raíz cuadrada en el numerador que dentro tiene a operación de productos y en el denominador tenemos un producto con una variable al cuadrado.

Despejamos a 2t^2 de ahí para que nos quede de la siguiente forma:

$$2t^2P = \sqrt{3Mk}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros, para poder quitarle la raíz a nuestra variable M

$$\left(2t^2P\right)^2 = \left(\sqrt{3Mk}\right)^2 = 3Mk$$

es decir:

$$\left(2t^2P\right)^2 = 3Mk$$

Despejamos ahora a “3k” para que podamos tener la variable que nos pide el problema:

$$\frac{\left(2t^2P\right)^2}{3k} = M$$

Invertimos la ecuación, nos queda:

$$M = \frac{\left(2t^2P\right)^2}{3k}$$ Por lo que sería nuestro resultado.

4.- Despeje a F de la siguiente fórmula

En este caso, usaremos el ejemplo que tenemos en el artículo principal, donde tenemos la siguiente ecuación:

$$T = \frac{k - d^2 + \frac{4\pi}{\sqrt{4F}}}{4kx + 2\pi - d}$$

Al principio, podría parecer difícil, pero no, no lo es…

Vamos a despejar todo el denominador del segundo miembro, para después multiplicarlo a T , debido a que como está dividendo, ahora en el primer miembro tendrá que pasar a multiplicar, quedando así:

$$T(4kx + 2\pi - d) = k - d^2 + \frac{4\pi}{\sqrt{4F}}$$

Ahora, vamos a despejar a $\frac{4\pi}{\sqrt{4F}}$ que está sumando en el segundo miembro y lo pasaremos a restar al primero, quedando así:

$$T(4kx + 2\pi - d) - \frac{4\pi}{\sqrt{4F}} = k - d^2$$

Ahora toda la expresión de $T(4kx + 2\pi - d)$ la pasaremos a restar al segundo miembro:

Y obtenemos lo siguiente:

$$-\frac{4\pi}{\sqrt{4F}} = k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)$$

Ahora pasamos a $\sqrt{4F}$ a multiplicar al segundo miembro.

$$-4\pi = \left[k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)\right]\sqrt{4F}$$

Después de este paso, lo más recomendable es mandar a dividir toda la expresión que acababa de pasar a multiplicar a raiz de (4F), quedando esto así:

$$\frac{-4\pi}{k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)} = \sqrt{4F}$$

Invertimos la ecuación, esto no modifica nada.

$$\sqrt{4F} = \frac{-4\pi}{k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)}$$

Pero…. $\sqrt{4F} = 2\sqrt{F}$ (Esto es por Álgebra básica) .

$$2\sqrt{F} = \frac{-4\pi}{k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)}$$

Pasamos a dividir a 2, al segundo miembro.

$$\sqrt{F} = \frac{-4\pi}{2\left[k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)\right]}$$

Podemos dividir a $\frac{-4\pi}{2}$

$$\sqrt{F} = \frac{-2\pi}{k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)}$$

Finalmente tenemos un odioso signo negativo en nuestro numerador del segundo miembro, que vamos a eliminar multiplicando por $\left(\frac{-1}{-1}\right) = 1$

Que finalmente no altero nada, porque estoy multiplicando por la unidad, es decir por 1

$$\sqrt{F} = \frac{-2\pi}{k - d^2 - T(4kx + 2\pi - d)}\left(\frac{-1}{-1}\right)$$

$$\sqrt{F} = \frac{2\pi}{-k + d^2 + T(4kx + 2\pi - d)}$$

Ahora, queda la parte más fácil, vamos a elevar ambos miembros al cuadrado, para eliminar la raíz, y dar con el resultado.

Que finalmente es:

$$F = \left(\frac{2\pi}{-k + d^2 + T(4kx + 2\pi - d)}\right)^2$$ Y listo… Problema resuelto

5.- Despejar a en la formula $V_f^{\,2} = V_i^{\,2} + 2.a.d$

Explicación: Podemos agrupar la expresión 2.a.d para no confundirlos

$V_f^{\,2} = V_i^{\,2} + (2.a.d)$

Como queremos calcular **a**, debemos de quitar la expresión $V_i^{\,2}$, la cual está sumando, por lo tanto la pasamos a restar

$V_f^{\,2} - V_i^{\,2} = 2.a.d$

Luego debemos quitar el **2** y la **d**

$a = V_f^{\,2} - V_i^{\,2} / 2.d$

El método de despejes para fórmulas de física y matemáticas no son complicados, muchas veces lo complicado lo hacemos nosotros. Trata de resolver tu despeje entendiendo el concepto de jerarquización de las operaciones, para poder profundizar el tema.

Ejercicios.- Aquí se propone un grupo de ejercicios para realizar el despeje de la letra señalada en paréntesis.

1) $p = n.l$ (n)

2) $A = \frac{B + b}{2} . h$ (B)

3) $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ (C)

4) $E = mgh$ (m)

5) $x = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ (V_0) ; (a)

6) $F = \frac{9}{5} C + 32$ (C)

7) $I = \frac{L - M}{N}$ (M)

8) $E = m C^2$ (C)

9) $a_c = \omega^2 R$ (ω)

Compara tus resultados con tus compañeros e investiga fórmulas para despejar todas sus incógnitas.

BIBLIOGRAFÍA

Baldor Aurelio, Algebra, Publicaciones Cultural, S.A. de C.V (México D.F.) 2006

De Sánchez Margarita A., *Desarrollo de Habilidades del Pensamiento*, Ed.Trillas-ITESM (México) 2011

García Azcárate Ana, *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Madrid, (España) 1999

Stanley I. Grossman, *Algebra Lineal* Grupo Editorial Iberoamérica, 5a. Edición Mac Graw Hill Mex D.F.1999

LINKOGRAFÍA:

http://www.infancia-misionera.com/dinpenitencia.htm#1#1

http://centros1.pntic.mec.es/~sanfer2/paginas/problemas%20logica.html#s1

http://www.matematicasdivertidas.com/

http://www.juegosdelogica.com/solucion_acertijo_de_einstein.htm

http://www.plastelina.net/

www.x.edu.uy/damaso/polinomios%202006.doc

http://es.wikipedia.org/wiki/Jeopardy!

http://geomatematicas.wordpress.com/2008/12/09/cruza-las-familias-por-el-puente-y-por-el-rio/

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/ecua2g.htm

ANEXOS

ANEXOS.- UNIDAD I ARITMÉTICA SOLUCIONES

SERIE PUNK

SOLUCIÓN: 3, 6, 9, 12, 13, 15, 18, 21, 23, 24, 27, 30, 33,…

LAS CINCO CASAS

SOLUCIÓN:

	Casa	Mascota	Bebida	Fuma	Posición
Británico	Roja	Pájaro	Leche	Pall Mall	Casa 3
Sueco	Blanca	Perro	Cerveza	Bluemasters	Casa 5
Danés	Azul	Caballo	Té	Brends	Casa 2
Noruego	Amarilla	Gato	Agua	Dunhill	Casa 1
Alemán	Verde	Pececito	Café	Prince	Casa 4

Por lo tanto: EL ALEMÁN TIENE UN PECECITO DE MASCOTA.

AMIGO O ENEMIGO

SOLUCIÓN:

Operación	Frase correspondiente	Resultado	Amigo o enemigo
(+8)(-5) =	El amigo de mi enemigo será mi enemigo	(+8)(-5) =(-40)	Enemigo
(+3)(+12) =	El amigo de mi amigo será mi amigo	+36	Amigo
(-9)(-9) =	El enemigo de mi enemigo será mi amigo	+81	Amigo
(-10)(+11) =	El enemigo de mi amigo será mi enemigo	-110	Enemigo
(-41)(-3) =	El enemigo de mi enemigo será mi amigo	+123	Amigo
(+42)(+7) =	El amigo de mi amigo será mi amigo	+294	Amigo
(+8)(-23) =	El amigo de mi enemigo será mi enemigo	-184	Enemigo
(-13)(+5) =	El enemigo de mi amigo será mi enemigo	-65	Enemigo
(-(-25)) =	El enemigo de mi enemigo será mi amigo	+25	Amigo

LOS CUATRO CUATROS

EJERCICIO 1 SOLUCIÓN:

44/44 = 1

4/4 + 4/4 = 2

(4 + 4 + 4)/4 = 3

4+ (4 – 4)/4 = 4

(4 x 4 + 4)/4 = 5

(4+4)/4 + 4 = 6

(44)/4 + 4 =7

4 + 4 + 4 – 4 = 8

4+4+4/4 = 9

(44 – 4)/ 4 = 10

EJERCICIO 2 SOLUCIÓN:

1.- $27 + 3 \cdot 5 – 16 = 27 + 3 \cdot 5 – 16 = 27 + 15 - 16 = 26$

2.- $27 + 3 – 45 : 5 + 16= 27 + 3 – 45 : 5 + 16 = 37$

3.- $(2 \cdot 4 + 12) (6 - 4) = (2 \cdot 4 + 12) (6 - 4) = (8 + 12) (2) = 20 \cdot 2 = 40$

4.- $3 \cdot 9 + (6 + 5 – 3) – 12 : 4 = 3 \cdot 9 + (6 + 5 – 3) – 12 : 4 = 27 + 8 – 3 = 32$

5.- $2 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^3 = 2 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^3 = 2 + 5 \cdot (6)^3 = 2 + 5 \cdot 216 = 2 + 1080 = 1082$

6.- $440 - [30 + 6 (19 - 12)] = 440 - [30 + 6 (19 - 12)] = 440 - (30 + 6 \cdot 7)] = 440 - (30 + 42) =440 - (72) = 368$

7.- $2\{4[7 + 4 (5 \cdot 3 - 9)] - 3 (40 - 8)\} = 2\{4[7 + 4 (15 - 9)] - 3 (40 - 8)\}=$

$= 2[4(7+4 \cdot 6)-3 (32)]= 2[4 (7 + 24) -3 (32)]= 2[4 (31) -3 (32)]= 2 (124- 96)= 2 (28)$

$= 56$

EJERCICIO 3 SOLUCIÓN:

1.- $(3 - 8) + [5 - (-2)] = - 5 + (5 + 2)= - 5 + 7= 2$

2.- $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 = 5 - [6 - 2 - (-7) - 3 + 6] + 5 =$

$= 5 - [6 - 2 + 7 - 3 + 6] + 5 = 5 - 14 + 5 = -4$

3.- $9 : [6 : (- 2)] = 9 : (- 3) = -3$

4.- $[(-2)^5 - (-3)^3]^2 = [-32 - (-27)] = (-32 + 27)^2 = (-5)^2 = 25$

5.- $(5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2)^2 =$

$= (5 + 6 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2)^2 = (5 + 1 - 4) \cdot (2 - 3 + 6) : (7 - 4 - 2)^2$
$= 2 \cdot 5 : 1^2 = 2 \cdot 5 : 1 = 10 : 1 = 10$

6.- $[(17 - 15)^3 + (7 - 12)^2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)] = [(2)^3 + (-5)^2] : [(-1) \cdot (-11)] =$

$= (8 + 25) : [(-1) \cdot (-11)] = (8 + 25) : 11 = 33 : 11 = 3$

7.- $(7 - 2 + 4) - (2 - 5) = 12$

8.- $1 - (5 - 3 + 2) - [5 - (6 - 3 + 1) - 2] = -2$

9.- $-12 \cdot 3 + 18 : (-12 : 6 + 8) = -3$

SUDOKU

SOLUCIÓN:

6	**5**	**4**
1	**9**	**3**
7	**8**	**2**

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. c **2.** c **3.** c **4.** c **5.** e **6.** d **7.** d **8.** c **9.** e **10.** a **11.** c **12.** d

---

OPERACIONES CON FRACCIONES (SOLUCIONES)

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 1

Asociar cada fracción de hora con los minutos correspondientes:

SON FRACCIONES DE 60 MINUTOS

½= 30 MIN. ¼= 15 MIN., 3/ 4= 45 MIN., 1/10= 6 MIN., 1/12= 5 MIN., 1/3= 20 MIN.

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 2

Halla los pares de fracciones equivalentes y colócalas en parejas:

$\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{2}{11}, \quad \frac{6}{9}$

$\frac{16}{6}, \quad \frac{15}{21}, \quad \frac{4}{22}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{12}{9}$

$\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \qquad 4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 \qquad 36 = 36$

$\frac{5}{7} = \frac{15}{21} \qquad 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15 \qquad 105 = 105$

$\frac{8}{3} = \frac{16}{6} \qquad 8 \cdot 6 = 3 \cdot 16 \qquad 48 = 48$

$\frac{2}{11} = \frac{4}{22} \qquad 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 \qquad 44 = 44$

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad 6 \cdot 3 = 9 \cdot 2 \qquad 18 = 18$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 3

Escribe los inversos de:

$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{2}, \quad -\frac{3}{7}, \quad 5, \quad \frac{4}{11}, \quad \frac{1}{8}$

$\frac{3}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad -\frac{7}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{11}{4}, \quad 8$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 4

Escribe el signo > o <, donde corresponda.

$\frac{3}{7} \square \frac{3}{9}, \qquad \frac{2}{5} \square \frac{6}{5}, \qquad \frac{3}{9} \square \frac{3}{4}, \qquad \frac{2}{7} \square \frac{5}{7}$

$\frac{3}{7} \boxed{>} \frac{3}{9}$, $\frac{2}{5} \boxed{<} \frac{6}{5}$, $\frac{3}{9} \boxed{<} \frac{3}{4}$, $\frac{2}{7} \boxed{<} \frac{5}{7}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 5

Compara las siguientes fracciones:

$\frac{2}{3} \square \frac{3}{5}$, $\frac{2}{5} \square \frac{3}{7}$, $\frac{5}{7} \square \frac{6}{8}$, $\frac{4}{3} \square \frac{5}{4}$

$\frac{10}{15} \boxed{>} \frac{9}{15}$, $\frac{14}{35} \boxed{<} \frac{15}{35}$, $\frac{40}{56} \boxed{<} \frac{42}{56}$, $\frac{16}{12} \boxed{>} \frac{15}{12}$

$\frac{2}{3} \boxed{>} \frac{3}{5}$, $\frac{2}{5} \boxed{<} \frac{3}{7}$, $\frac{5}{7} \boxed{<} \frac{6}{8}$, $\frac{4}{3} \boxed{>} \frac{5}{4}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 6

Ordenar de menor o mayor:

$\frac{5}{12}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$

$\frac{5 \cdot 5}{60}$, $\frac{2 \cdot 4}{60}$, $\frac{5 \cdot 15}{60}$, $\frac{7 \cdot 12}{60}$

$\frac{25}{60}$, $\frac{8}{60}$, $\frac{75}{60}$, $\frac{84}{60}$

$\frac{2}{15} < \frac{5}{12} < \frac{5}{4} < \frac{7}{5}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 7

Realiza de dos modos distintos:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6+1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{6+1}{16}=\frac{7}{16}$$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 8

Opera, sacando factor común.

1 $$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}==\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{6}$$

2 $$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}==\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{5}$$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 9

Una fracción propia es aquella que no tiene enteros y una impropia es la que si los tiene.

Clasifica las siguientes fracciones en propias o impropias:

$$\frac{2}{3},\quad\frac{5}{6},\quad\frac{8}{5},\quad\frac{7}{9},\quad\frac{5}{2},\quad\frac{5}{12},\quad\frac{3}{4},\quad\frac{7}{5}$$

Propias: $\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{9},\ \frac{5}{12},\ \frac{3}{4}$

Impropias: $\frac{8}{5},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{5}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 10

Opera:

$$5\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=5\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=\frac{5\cdot4+1}{4}+\frac{1\cdot6+1}{6}=\frac{21}{4}+\frac{7}{6}=\frac{63+14}{12}=\frac{77}{12}$$

$$\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=3+\frac{1}{4}-2-\frac{1}{6}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{12+3-2}{12}=\frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{3+4}{12}\right)=\frac{1}{2}:\frac{7}{12}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$$

$$\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=\left(\frac{5-3}{3}\right)\cdot\left(\frac{7-4}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3+2}{4}\right):\left(\frac{10+1}{6}\right)=\frac{5}{4}:\frac{11}{6}=\frac{30}{44}=\frac{15}{22}$$

11.-Resuelve

1. $$\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$$

2. $$\frac{3}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=3:\frac{1}{2}=6$$

3. $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}:\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$$

4. $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{4}}{\frac{5-2}{6}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{6}}=\frac{7}{4}:\frac{3}{6}=\frac{7}{4}:\frac{1}{2}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

5. $$\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}=$$

$$\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{-12+9-4}{12}}{\frac{8-1}{4}}=\frac{\frac{-7}{12}}{\frac{7}{4}}=\frac{-7}{12}:\frac{7}{4}=-\frac{28}{84}=-\frac{7}{21}=-\frac{1}{3}$$

6. $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=$$

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{2-1}{2}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{1-2}=1-\frac{1}{-1}=1+1=2$$

OPERACIONES CON EXPONENTES (SOLUCIÓN)

Potenciación

$(-10)^3(-2)^4 = (-1000)\ (-16) = 16000$

$(5)^2(-6)^2(-7)^0 = (25)\ (36)\ (1) = 900$

$(3)^2 - (-2)^5 = (9) - (-64) = 9 + 64 = 73$

Operaciones Combinadas de potencias

$-7^{(6-3)} = -7^3 = -343$

$(3 + 2)^{(5-4)} = 5^1 = 5$

$(-4)^2 : 8 = 16 : 8 = 2$

Realiza las siguientes operaciones con potencias (solución)

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$

3 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

4 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

5 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2}{3}$$

6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

7 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

8 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

9 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2}{3}$$

10 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

11 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 =$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

12 $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} =$

$$\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$$

13 $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-2} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-9} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-13} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$$

14 Efectúa:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \left(\frac{2}{3}\right) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 \left(\frac{8}{27}\right)^3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \left(\frac{2}{3}\right) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-8}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{25}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-15} = \left(\frac{3}{2}\right)^{15}$$

15 Opera:

$$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^{2}}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)} - 5\frac{1}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{10-1}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{27-2}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{30}{28}-\frac{4}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}:\frac{1}{5}\right)} - \frac{35+1}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{15}{14}-\frac{4}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{15-8}{14}\right)^{3}}{\left(\frac{6-5}{12}\right)} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{12}} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{25}} : \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}} - \frac{36}{7} = \frac{81}{9} : \frac{12}{8} - \frac{36}{7} =$$

$$= 9 : \frac{3}{2} - \frac{36}{7} = \frac{18}{3} - \frac{36}{7} = 6 - \frac{36}{7} = \frac{42-36}{7} = \frac{6}{7}$$

16 Resuelve:

$$\frac{2}{3} : \left[5 : \left(\frac{2}{4}+1\right) - 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} : \left[5 : \left(\frac{2+4}{4}\right) - 3\left(\frac{2-1}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} : \left(5 : \frac{6}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} : \left(\frac{10}{3} - \frac{3}{4}\right) =$$

$$\frac{2}{3} : \left(\frac{40-9}{12}\right) = \frac{2}{3} : \frac{31}{12} = \frac{24}{93} = \frac{8}{31}$$

17 Opera:

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right) + 13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right] : \left[\left(\frac{1}{2}-1\right) : 2\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{6-1}{9}\right) + 13\left(\frac{2-3}{3}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{1-2}{2}\right) : \frac{2 \cdot 2+1}{2}\right] =$$

$$= \left[\frac{5}{9} + 13\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right] : \left(-\frac{1}{2} : \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{9} + 13 \cdot \frac{1}{9}\right) : \left(-\frac{1}{2} : \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{9} + \frac{13}{9}\right) : \left(-\frac{2}{10}\right) =$$

$$= \frac{18}{9} : \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 : \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{10}{1} = -10$$

18 Efectúa

$$\left[\left(2 - 1\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(7\frac{1}{2}\right)^3\right] : \left(5 - \frac{6}{5}\right) =$$

$$= \left[\left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3\right] : \left(5 - \frac{6}{5}\right) =$$

$$= \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3\right] : \frac{19}{5} =$$

$$= \left(\frac{4}{25} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} - \frac{54000}{5000}\right) : \frac{19}{5} = \left(\frac{4}{25} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} - \frac{54}{5}\right) : \frac{19}{5} =$$

$$= \frac{32 + 125 - 150 - 2160}{200} : \frac{19}{5} =$$

$$= \frac{-2153}{200} : \frac{19}{5} = -\frac{10765}{3800} = -\frac{2153}{760}$$

Leyes de los exponentes

a) $(4)^3(4)^2(4)^5 = (64)(16)(1024) = 1048576$

b) $\frac{9^{10}}{9} = \frac{3486784401}{9} = 387420489$

c) $(3^3)^3 = (27)^3 = 19683$

Suma y Resta de Radicales

1) La mitad del 100% de $\sqrt{16}$ es:

c) 8

2) ¿Cuál de las expresiones siguientes son igual a -2?

I) $\sqrt[3]{-8}$ II) 2^{-1} III) $\sqrt{-4}$

I) $\sqrt[3]{-8}$ ya que (-2) (-2) (-2) = -8 →sacamos raíz=-2

3) ¿Cuál es el número que corresponde a $\sqrt{144}$?

b) 12

4) Si al doble del cuadrado de un número positivo le quito 20, resulta igual que si al cuadrado del número le agrego 16. ¿Cuál es el número?

a) 6

EL CRUCIGRAMA DE HIPATIA

Se recomienda hacer lluvia de ideas en el grupo.

PORCENTAJE (SOLUCIONES)

1 De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

800 alumnos →600 alumnos
100 alumnos →x alumnos

$$\frac{800}{100} = \frac{600}{x} \qquad x = \frac{600 \cdot 100}{800} = 75\%$$

2 Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $8800, nos hacen un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

100 →7.5
8800 →x

$$X = \frac{(8800)7.5}{1000} = \$\,660$$

$8800-6600 = $8140

También se puede calcular directamente del siguiente modo:

100 →92.5

8800 →x X= $8140

3 El precio de un ordenador es de $1200 sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16%?

100 →116
1200 →x X= $ 1392

4 Al comprar un monitor que cuesta $450 nos hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto tenemos que pagar?

100 →92
450 → x X = $ 414

5 Se vende un artículo con una ganancia del 15% sobre el precio de costo. Si se ha comprado en 80 . Halla el precio de venta.

100 →115
80 → x X = $92

6 Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a $180 para ganar al venderlo el 10%.

venta compra
100 →90
x → 180 X = $ 200

7 ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comparado a $280 , para perder el 12% sobre el precio de venta?

venta compra
100 →112
x → 280 X= $ 250

8 Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de $150 .

100 →80
150 → x X= $120

PROBLEMAS

Si al pagar la cuenta en un restaurante le cobran $ 437 y le dicen que ésta ya tiene el 15% del IVA, ¿cuánto fue su consumo sin IVA?

En 1993, el 21.9% de los 5,200 millones de los pobladores del mundo eran chinos. En ese año, ¿cuál era la población China?

De cada 25 accidentes que suceden en el hogar, 2 son muy graves. ¿Qué porcentaje de esos accidentes que suceden en el hogar son muy graves?

5650000 ha, representan el 24% de las tierras laborables del país, ¿cuántas hectáreas hay en México de tierras laborables? Redondee su resultado.

Si 11 chicotes de automóvil salen con defecto de cada 550 que se fabrican, ¿qué porcentaje de la producción sale defectuosa?

María compró un automóvil en 92 500 pesos; dio el 30% de enganche y el resto lo pagó en 24 meses sin intereses. ¿Cuánto pagó de enganche y en cuánto le salen las mensualidades?

Un balón de futbol tiene un precio de $275.00, si se le aplica un descuento del 15% y una semana después un descuento del 10%. ¿Cuál es el precio final?

Si 8 kilos de manzanas valen 104 pesos, ¿cuánto costarán 13 kilos?

Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas

Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

A cierta hora del día un palo de 1,5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2,40 metros?

Un coche circulando a 90 km/h ha tardado 12 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en el mismo trayecto a una velocidad de 80 km/h?

Seis fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿Cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

Al repartir una cantidad de pesos entre 8 personas cada una recibe $1220 pesos. ¿Cuánto recibirían si el reparto se hiciera entre 5 personas?

RESPUESTAS

En la mueblería “El surtidor”… Respuesta= $943.00
Ernestina compró artículos de belleza… Respuesta= $ 552.00
Si al pagar la cuenta en un restaurante… Respuesta= $371.45
En 1993, el 21.9%... Respuesta= $ 1138.8 millones
De cada 25 accidentes… Respuesta= 8 %
5650000 ha, representan el 24%... Respuesta= 1356 000 hectáreas
Si 11 chicotes de automóvil … Respuesta= 2 %
María compró un automóvil… Respuesta = $ 27750. 00 de enganche, $ 2697.92 mensuales
Un balón de futbol … Respuesta= $ 210.38
Si 8 kilos de manzanas… Respuesta=$ 169
Un coche ha dado 60 vueltas… Respuesta= 70 minutos
Si 12 bolas de acero…Respuesta= 30 000 gramos = 30 kg
Seis fotocopiadoras… Respuesta= 9 horas
Al repartir una cantidad de pesos… Respuesta= $1952.00

RETOS:

Ernestina compró artículos de belleza por $ 480. Si al costo de los artículos se le carga el 15% por concepto de impuesto al valor agregado (IVA), ¿cuánto pagó en total?
En la mueblería “El surtidor”, en las compras de contado, se hace el 18% de descuento sobre el precio de lista. Si una estufa cuesta $1,150, ¿en cuánto saldrá si se paga de contado?
Se parará en el centro. Tres alumnos van a él y le coloca en la posición que les parezca. El castigado debe permanecer así hasta que otro alumno le toque un reto.
Cuenta un chiste (apto para todo público)
Actuar con mímica el título de tu película favorita
Baila la pelusa
Date una maroma en medio del salón o recita una poesía
Canta una canción
Acuéstate en el centro. El castigado debe permanecer así hasta que otro alumno le toque un reto.
Dale un beso en la mejilla a la persona que se sienta a tu lado.
Di una adivinanza, si te la adivinan saca otro reto.
Tócate el codo con la lengua, en caso de no poder sacar otro reto.
Haz diez lagartijas
Cuenta la anécdota más vergonzosa que te haya sucedido.

ANEXOS.- UNIDAD II ÁLGEBRA (RESPUESTAS)

Ejercicios de expresiones algebraicas

1 $3x^3$ Grado: 3, coeficiente: 3

2 $5x^{-3}$ No es un monomio, porque el exponente no es un número natural.

3 $3x + 1$ No es un monomio, porque aparece una suma.

4 $\sqrt{2}x$ Grado: 1, coeficiente: $\sqrt{2}$

5 $-3X^4/4$ Grado: 4, coeficiente: -3/4

6 $2\sqrt{x}$ No es un monomio, porque la parte literal está dentro de una raíz.

Operaciones algebraicas

1) $2x^3 - 5x^3 = -3x^3$
2) $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 = 8x^4$
3) $(2x^3) \cdot (5x)^3 = 10x^6$
4) $(12x^3) : (4x) = 3x^2$
5) $(18x^6 y^2 z^5) : (6x^3 y z^2) = 3x^3 y z^3$
6) $(2x^3 y^2)^3 = 8 x^9 y^6$
7) $(2 x^3 y^2 z^5)^5 = 32 x^{15} y^{10} z^{25}$
8) $3x^3 - 5x^3 - 2x^3 = -4x^3$
9) $(12 x^3 y^5 z^4) : (3x^2 y^2 z^3) = 4xy^3 z$
10) $(12 x^3 y^5 + 18 x^5 y^7 - 48x^{12} y^6)/ (3 x^2 y^2) = 4 x y^3 + 6 x^3 y^5 - 16x^{10} y^4$

Operaciones con polinomios

Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 – 1$, $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x – 2$, $R(x) = 6x^2 + x + 1$, $S(x) = 1/2x^2 + 4$

$T(x) = 3/2x^2 + 5$, $U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

1 $P(x) + Q (x) = (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 =$

$= x^3 + x^2 + 6x - 3$

2 $P(x) - U (x) = (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 4x^2 - 1 - x^2 - 2 = 3x^2 - 3$

3 $P(x) + R (x) = (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) = 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 = 10x^2 + x$

4 $2P(x) - R(x) = 2(4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) = 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 = 2x^2 - x - 3$

5 $S(x) + R(x) + U(x) = (1/2\, x^2 + 4) + (3/2\, x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2\, x^2 + 3/2\, x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2 = 3x^2 + 11$

6 $S(x) - R(x) + U(x) = (1/2\, x^2 + 4) - (3/2\, x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2\, x^2 + 4 - 3/2\, x^2 - 5 + x^2 + 2 = 1$

Multiplicar:

1.- $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 =$

$= x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 =$

$= x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$

2.- $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x$

Calcula:

1 $\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 = = \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = = x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2$

2 $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

3 $(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

4 $(2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 = 8x^3 + 60\, x^2 + 150\, x + 125$

5 $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

Dividir:

$(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\
\cline{1-3}
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & & \\
 & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & -6x^2 & -18x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -8 &
\end{array}
$$

Casos algebraicos

1.- Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

25 cm →300 vueltas

75 cm →x vueltas

$$\frac{75}{25} = \frac{300}{x} \qquad x = \frac{300 \cdot 25}{75} = 100 \text{ vueltas}$$

2.- Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por 792 €. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?

6 personas → 12 días→792 €

15 personas→ 8 días →x €

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{12}{8} = \frac{792}{x} \qquad x = \frac{15 \cdot 8 \cdot 792}{6 \cdot 12} = 1320 \text{ €}$$

3.- Con 12 botes conteniendo cada uno ½ kg de pintura se han pintado 90 m de verja de 80 cm de altura. Calcular cuántos botes de 2 kg de pintura serán necesarios para pintar una verja similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.

½ kg →90 · 0.8 m² →12 botes

2 kg →200 · 1.2 m² →x botes

$$\frac{2}{0.5} \cdot \frac{90 \cdot 0.8}{200 \cdot 1.2} = \frac{12}{x} \qquad x = \frac{12 \cdot 0.5 \cdot 200 \cdot 1.2}{2 \cdot 90 \cdot 0.8} = 10 \text{ botes}$$

4.- 11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

220 · 48 m² →6 días →11 obreros

300 · 56 m² →5 días →x obreros

$$\frac{220 \cdot 48}{300 \cdot 56} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{x} \qquad x = \frac{300 \cdot 56 \cdot 6 \cdot 11}{220 \cdot 48 \cdot 5} = 21 \text{ obreros}$$

5.- Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 m³ de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 depósitos de 500 m³ cada uno?

6 grifos→ 10 horas 1 depósito→ 400 m³

4 grifos→ x horas 2 depósitos→ 500 m³

$$\frac{10}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{400}{500} \qquad \frac{10}{x} = \frac{1600}{6000}$$

X= 60000/1600 = 37.5 horas

Aplicaciones algebraicas

1. 4 u
2. AC=28m
3. 9cm y 20 cm
4. x=72º
5. ángulo a= 40º
6. 12º, 24º y 144º
7. 10 años (menor)
8. 12, 24 y 108
9. 51 y 52
10. 48 y 50
11. 96 y 98
12. 9 y 23
13. 38.5 cm

La gymkhana matemática

Frase	*Expresión*	*Expresión reducida*
Ana tenía x puntos.	x	A = x

Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos.	I = 2x - 100	I = 2x - 100
A Pablo le faltaban 500 puntos para alcanzar a Isabel	P +500= 2x -100	P = 2x -600
Sergio consiguió el triple de Ana más 300 puntos.	S = 3x + 300	S = 3x + 300
Lo de Pilar menos lo de Isabel es 3 veces lo de Ana. Pilar tuvo entonces:	Pi – (2x – 100) = 3x Pi – 2x + 100 = 3x	Pi = 5x - 100
Marta tuvo la quinta parte de lo de Pilar.	M = $\frac{5x-100}{5}$	M = x - 20
A Rafael le faltan 1000 puntos para tener lo de Sergio.	R +1000= 3x + 300	R = 3x - 700
Si a Raquel le quitase Ana Belén 500 puntos, tendría como Ana. Raquel tiene:	Ra -500 = x	Ra = x + 500
Patricia tiene dos veces los de Raquel, más 100 puntos.	Pa = 2 (x+500) +100 Pa = 2x+1000+100	Pa = 2x + 1100
Juntas, Teresa y Patricia, suman tres veces lo de Ana. Teresa tiene:	T + Pa = 3x T = 3x – Pa T= 3x -2x - 1100	T = x - 1100
Daniel obtuvo la tercera parte de Sergio más 2000 puntos.	D = $\frac{1}{3}$ S D = $\frac{1}{3}$(3x+300)+2000	D = x+100+2000 D = x + 2100

Ejercicios de factorización

Factorizar los siguientes polinomios

1.- $\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 = = \frac{2}{5}x^2\left(x^3 - 3x^2 + \frac{7}{3}\right)$

2.- $xy - 2x - 3y + 6 = x \cdot (y - 2) - 3 \cdot (y - 2) = (x - 3) \cdot (y - 2)$

3.- $25x^2 - 1 = (5x + 1) \cdot (5x - 1)$

4.- $36x^6 - 49 = (6x^3 + 7) \cdot (6x^3 - 7)$

5.- $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

6.- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

7.- $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$

8.- $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

9.- $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

10.- $x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x - 2)^2$

11.- $3x^7 - 27x = 3x \cdot (x^6 - 9) = 3x \cdot (x^3 + 3) \cdot (x^3 - 3)$

12.- $x^2 - 11x + 30 = (x - 5)\ (x - 6)$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ x_2 = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$x^2 - 11x + 30 = (x - 6) \cdot (x - 5) = 133x^2 + 10x + 3 = 3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{18}{6} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

13.- $x^2 + 10x + 3 = 3\ (x - 3) \cdot (x - 1/3)$

14.- $2x^2 - x - 1 = 2x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 = 2\ (x - 1) \cdot (x + 1/2)$

Binomio al cuadrado $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Suma por diferencia $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Binomio al cubo $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Trinomio al cuadrado $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$(x^2 - x + 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$

$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Suma de cubos $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

Producto de dos binomios que tienen un término común

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$

Desarrolla los binomios al cuadrado.

$1(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$2\,(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20\,x + 25$

$4\,(x^2 - x/2)^2$

$$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = = x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

2 Desarrolla los binomios al cubo.

1.- $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36\,x^2 + 54\,x - 27$

2.- $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 8$

3.- $(3x - 2)^3 = (3\,x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = 27x^3 - 54\,x^2 + 36\,x - 8$

4.- $(2x + 5)^3 = (2\,x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 = 8x^3 + 60\,x^2 + 150\,x + 125$

3 Desarrolla las sumas por diferencias

1.- $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

2.- $(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 25$

3.- $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^4 - 4$

4.- $(3x - 5) \cdot (3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

ANEXOS.- UNIDAD III ECUACIONES (SOLUCIONES)

Ejercicios de ecuaciones de primer grado

1.- 2X= 6 Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{6}{2} \qquad x = 3$$

2.- $2x - 3 = 6 + x$ Agrupamos los términos semejantes y los independientes, y sumamos:

$2x - x = 6 + 3 \qquad x = 9$

3.- $2(2x - 3) = 6 + x$ Quitamos paréntesis:

$4x - 6 = 6 + x$ Agrupamos términos y sumamos:

$4x - x = 6 + 6 \qquad 3x = 12$ Despejamos la incógnita:

$x = \frac{12}{3} \qquad x = 4$

4.- $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo.

$m.c.m.(6, 2) = 6$

$x - 1 - 3(x - 3) = -6$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$x - 1 - 3x + 9 = -6; \qquad x - 3x = -6 - 9 + 1; \qquad -2x = -14$

Despejamos la incógnita:

$2x = 14 \qquad x = \frac{14}{2} \qquad x = 7$

5 $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$ Quitamos paréntesis y simplificamos:

$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \qquad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$

Quitamos denominadores, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$3x + 6 = 2x + 38 \qquad 3x - 2x = 38 - 6 \qquad x = 32$

6 $4(x-10) = -6(2 - x) - 6x$

$4x - 40 = -12 + 6x - 6x$

$4x - 6x + 6x = -12 + 40$

$4x = 28 \qquad x = 7$

7.- $2(x+1)-3(x-2)=x+6$

$2x+2-3x+6=x+6$

$2x-3x-x=6-2-6$

$-2x=-2 \qquad x=1$

8.- $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{x-5}{36}=\dfrac{x+5}{9}$

$m.c.m.(4,36,9)=36$

$9(x-1)-(x-5)=4(x+5)$

$9x-9-x+5=4x+20$

$9x-x-4x=20+9-5$

$4x=24 \qquad x=6$

9.- $\dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2-4x}{3}=\dfrac{-5x-4}{14}+\dfrac{7x}{6}$

$m.c.m.(7,\ 3,\ 14,\ 6)=42$

$6(3x+1)-14(2-4x)=3(-5x-4)+49x$

$18x+6-28+56x=-15x-12+49x$

$18x+56x+15x-49x=-12-6+28$

$40x=10 \qquad 4x=1 \qquad x=\dfrac{1}{4}$

10.- $\dfrac{5}{x-7}=\dfrac{3}{x-2}$

$5(x-2)=3(x-7)$

$5x-10=3x-21$

$5x-3x=-21+10$

$2x=-11 \qquad x=-\frac{11}{2}$

11.- $\frac{4}{x-3}=\frac{5}{x-2}$

$4(x-2)=5(x-3)$

$4x-8=5x-15$

$-8+15=5x-4x$

X=7

12.- $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

$\frac{6(x+1)}{8}-\frac{6(2x-3)}{16}=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{9}{8}x+\frac{6}{8}$

$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{9}{8}x+\frac{6}{8}$

$m.c.m.(8,\ 16,\ 4)=16$

$2(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$

$\cancel{12x}+12\cancel{-12x}+18=36x\cancel{-12}-18x\cancel{+12}$

$12+18=36x-18x$

$18x=30 \qquad 3x=5 \qquad x=\frac{5}{3}$

13.- $2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$ Quitamos corchete:

$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$ Quitamos paréntesis:

$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$ Quitamos denominadores:

$24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$ Quitamos paréntesis:

$24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x$ Agrupamos términos:

$24x+6x-8x+5x-36x=3-24-24+18$ Sumamos:

$-9x=-27$ Dividimos los dos miembros por: −9

X= 3

14.- $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$

$\frac{2}{3}\left(x-1+\frac{x-2}{3}\right)+1=x$

$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{2x-4}{9}+1=x$

$6x-6+2x-4+9=9x$

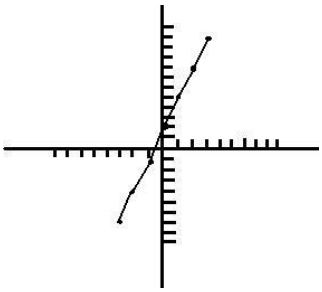
$-x=1$ $\qquad x=-1$

Ejercicios de ecuaciones lineales con dos variables

A. 1. Primer Cuadrante
2. Segundo Cuadrante
3. Tercer Cuadrante
4. Cuarto Cuadrante

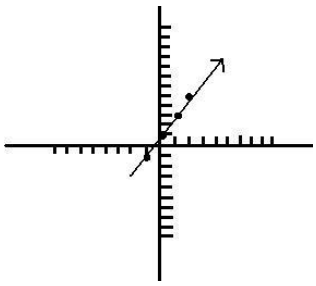
5. Primer Cuadrante

B.



C.

x	y
0	1
-1	-1
1	3
2	5



D.

1. (2, 3)

y = -3x + 9
y = -3(2) + 9
y = -6 + 9
y = 3 Es solución

2. (5, 4)

y = -3x + 9
y = -3(5) + 9
y = -15 + 9
y = -6 NO es solución

3. (1,9)

y = -3x + 9
y = -3(1) + 9

$y = -3 + 9$
$y = 6$ NO es solución

4. (0,9)

$y = -3x + 9$
$y = -3(0) + 9$
$y = 0 + 9$
$y = 9$ Es solución

5.(4,-3)

$y = -3x + 9$
$y = -3(4) + 9$
$y = -12 + 9$
$y = -3$ Es solución

E.

1. $y = 4x + 6$

Int y: $y = 4(0) + 6$
$y = 0 + 6$
$y = 6$; El int en y es (0,6)

Int x: $0 = 4x+6$
$0-6 = 4x$
$\frac{-6}{4} = \frac{4x}{4}$

$-3/2 = x$ El int en x es (-3/2,0)

2. $y = -3x + 7$

Int y $y = -3(0) + 7$
$y = 0 + 7$
$y = 7$ El intercepto en y es 7

Int x: $0 = -3x + 7$
$3x = 7$
$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$

$x = \frac{7}{3}$

F. Pendiente

1. (2,5) (-3,8)

$m = \frac{8 - 5}{-3 - 2} = \frac{3}{-5}$ Por lo tanto, la pendiente es $\frac{-3}{5}$.

2. (4,-8) (-7,0)

$m = \frac{0 - -8}{-7 - 4} = \frac{8}{-11}$ Por lo tanto, la pendiente es $\frac{-8}{11}$.

3. (1, 0) (-2,-4)

$m = \frac{-4 - 0}{-2 - 1} = \frac{-4}{-3}$ Por lo tanto, la pendiente es $\frac{4}{3}$.

G.
1. (5,0) y (2,-1)

Para conseguir la ecuación, primero hay que buscar la pendiente.

$m = \frac{-1 - 0}{2 - 5} = \frac{-1}{-3}$ Por lo tanto, la pendientes es 1/3

$Y - Y_1 = m(X - X_1)$

$Y - -1 = \frac{1}{3}(X - 2)$

$Y + 1 = \frac{1}{3}(X - 2)$

$Y + 1 = \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - 1$

$\mathbf{y = \frac{1}{3}x - .33}$

2. (-4, -2) y (0,6)

$$m = \frac{6 - -2}{0 - -4} = \frac{8}{4} = 2$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - -2 = 2(x - -4)$
$y + 2 = 2(x + 4)$
$y + 2 = 2x + 8$
$y = 2x + 8 - 2$
$y = 2x + 6$

Ecuaciones por el método de factorización

1) $(x + 5)(x - 2) = 0$
2) $3y^2 + 8y - 9 = 2y$
3) $9x^2 - 4 = 0$
4) $a^2 - 14a = -45$
5) $z(2z - 3) = 14$
6) $x^3 - 22x = 9x^2$

Soluciones:

1) $2, -5$
2) $-3, 1$
3) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$
4) $9, 5$
5) $\frac{7}{2}, -2$
6) $0, 11, -2$

ESTA OBRA, SUS CARACTERÍSTICAS Y DERECHOS SON PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE SAN LUIS POTOSÍ

LOS DERECHOS DE PUBLICACIÓN PERTENECEN A LA UTSLP QUEDA PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL POR CUALQUIER MEDIO, SIN AUTORIZACIÓN PREVIA Y POR ESCRITO DEL TITULAR DE LOS DERECHOS.

ABRIL 2016

ISBN (EN TRÁMITE)

IMPRESO EN MÉXICO.