CORRECTION TES OBLIGATOIRE Juin 2019

Exercice 1 :

1. **FAUX**

$$p_S\left(\overline{R}\right)=\frac{p\left(\overline{R}\cap S\right)}{p\left(S\right)}=\frac{0,3\times 0,2}{0,7\times 0,4+0,3\times 0,2}=\frac{0,06}{0,34}=\frac{6}{34}=\frac{3}{17}\approx 0,18$$

2. **FAUX**

$E\left(X\right)=\frac{k+18}{2}$ donc $\frac{k+18}{2}=12$ donc $k=2\times 12-18=6$

3. **VRAI**

$$\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{e}\right)+\ln\left(2\right)=\ln\left(2x\right)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2\times\frac{x^2}{\frac{x^5}{e}}\right)=\ln\left(2x\right)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e}{x^3}\right)=\ln\left(2x\right)+5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e}{x^3}\right)-\ln\left(2x\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{2e}{x^3}}{2x}\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{x^4}\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{x^4}=e^5$$

$$\Leftrightarrow x^4=\frac{e}{e^5}$$

$$\Leftrightarrow x^4=\frac{1}{e^4}$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{e^4}\right)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

4. **FAUX**

Il y a deux tangentes horizontales car la dérivée s'annule deux fois (0 est une valeur intermédiaire entre -5 et 30 et 0 est une valeur intermédiaire entre -5 et 20).

5. **VRAI**

La fonction est convexe sur $\left[5;15\right]$ car f' est croissante sur $\left[5;15\right]$.

Exercice 2 :

1. a) $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$ car baisser de 4% revient à multiplier par 0,96 et Laurence replante 22 pommiers.

1. b)

$$u_1 = 0,96 \times 300 + 22 = 310$$
$$u_2 = 0,96 \times 310 + 22 \approx 320$$

Donc en 2020, le nombre de pommiers par hectare sera de 320.

2 a)

tant que U < 400

U ←0,96×U+22

2 b) Grâce au mode récurrence de la calculatrice, on trouve N= 13.

3.a)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 550$$
$$v_{n+1} = 0,96u_n + 22 - 550$$
$$v_{n+1} = 0,96u_n - 528$$
$$v_{n+1} = 0,96(v_n + 550) - 528$$
$$v_{n+1} = 0,96v_n + 528 - 528$$
$$v_{n+1} = 0,96v_n$$

Le premier terme est $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$

3b)

$$v_n = v_0 \times q^n = -250 \times 0,96^n$$

donc

$$u_n = v_n + 550 = -250 \times 0,96^n + 550$$

3.c)

$$u_7 = 550 - 250 \times 0,96^7 \approx 362$$

3.d)

$$u_n > 400$$
$$550 - 250 \times 0,96^n \geq 400$$
$$-250 \times 0,96^n \geq 400 - 550$$
$$-250 \times 0,96^n \geq -150$$
$$0,96^n \leq \frac{-150}{-250}$$
$$\ln 0,96^n \leq \ln 0,6$$
$$n \ln 0,96 \leq \ln 0,6$$
$$n \geq \frac{\ln 0,6}{\ln 0,96}$$
$$n \geq 12,51$$

Donc c'est à partir du rang 13 : on retrouve le résultat.

Exercice 3 :

Partie A :

1. $p(D<8)=p(-10^{99}<D<8)\approx 0{,}11$

2. $p(8<D<26)\approx 0{,}85$

3. On reconnaît l'intervalle 2σ car $15{,}5-2\times 6=3{,}5$ et $15{,}5+2\times 6=27{,}5$

Partie B :

1. On considère X qui suite la loi binomiale de paramètres p = 0,25 et n = 10.
   Succès : « Sébastien effectue le relevé » donc p = 0,25
   On choisit 10 relevés donc n = 10

2. $P(X=4)\approx 0{,}15$

3. $p(X\geq 2)=1-p(X\leq 1)=1-0{,}24=0{,}76$

Partie C :

L'intervalle de fluctuation est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

L'amplitude est $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}}<0{,}1$$
$$\frac{\sqrt{n}}{2}>\frac{1}{0{,}1}$$
$$\sqrt{n}>\frac{2}{0{,}1}$$
$$n>\left(\frac{2}{0{,}1}\right)^2$$
$$n>400$$

Il faut effectuer 401 relevés.

Exercice 4 :

Partie A :

1. $f(0) \approx 115 \quad et \quad f(60) \approx 70$

2. $f''(7) = 0$ car le point A est le point d'inflexion.

3. a) Il faut hachurer la surface entre la courbe, l'axe des abscisses et les 2 droites verticales $x = 0 \;\; et \;\; x = 60$

3.b) Un rectangle correspond à 200 unités d'aires. Dans la partie hachurée, il y a au moins 20 rectangles donc l'aire est supérieure à $200 \times 20 = 4000$ unités d'aires. L'estimation n'est donc pas correcte.

Partie B :

1.

$$f'(x) = 0 + 14 \times e^{\frac{-x}{5}} + (14x + 42) \times \left(\frac{-1}{5}\right) e^{\frac{-x}{5}} = 14e^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times 14xe^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times 42e^{\frac{-x}{5}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{-x}{5}}\left(14 - \frac{14}{5}x - \frac{42}{5}\right) = e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-14}{5}x + \frac{28}{5}\right) = \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{5}}(-14x + 28)$$

2. a) et 2. b)

x	0		2		60
1/5		+		+	
-14x+28		+	0	-	
$e^{-x/5}$		+		+	
f'(x)		+	0	-	
f(x)	112	↗	117	↘	70

3. On a $f''(x) = 14e^{\frac{-x}{5}} \dfrac{x-7}{25}$

x	0		7		60
14		+		+	
x-7		-	0	+	
25		+		+	
$e^{-x/5}$		+		+	
f''(x)		-	0	+	

On en déduit que la fonction est convexe sur $[7;60]$.

4.a) Il faut vérifier que $G'(x) = g(x)$

$$G'(x) = -70 \times e^{\frac{-x}{5}} + (-70x - 560) \times \left(\frac{-1}{5}\right) e^{\frac{-x}{5}} = -70e^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times (-70)\, xe^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5} \times (-560) e^{\frac{-x}{5}}$$

$$G'(x) = e^{\frac{-x}{5}} \left(-70 + \frac{70}{5}x + \frac{560}{5}\right) = e^{\frac{-x}{5}} (14x + 42) = g(x)$$

4.b) Une primitive de f est : $F(x) = 70x + G(x)$

4.c)

$$\int_0^{60} f(x)\,dx = F(60) - F(0) = \left[70 \times 60 + (-70 \times 60 - 560) e^{-60/5}\right] - \left[70 \times 0 + (-70 \times 0 - 560) e^{-0/5}\right]$$

$$\int_0^{60} f(x)\,dx = \left[4200 - 4670e^{-12}\right] - [-560] = 4200 + 560 - 4670e^{-12} = 4760 - 4760e^{-12\mathbb{F}}$$

$$\int_0^{60} f(x)\,dx \approx 4760$$

<u>Partie C :</u>

$$4760 \times 2 + 5400 = 14920$$

14 920 cm² = 1,492m²

$$\frac{1}{4} \times 10 = 2,5$$

1,492<2,5 donc il aura suffisamment de vernis.