Viaje matemático

¡Qué cosa es esta del álgebra!



Los primeros matemáticos que estudiaron el bra, como el árabe Al-Jwarizmi, tenían una curi forma de designar la incógnita de sus ecuaciones. Usaban el término árabe *xohy*, que significa "la cosa".

La palabra "cosa" (traducción del latín *res* y esta del árabe *xohy*) la emplearon para lo mismo los algebristas italianos.

Así que ya lo sabes: el álgebra te permitirá descubrir "un montón de cosas".

Póngamelo facilito, por favor



La lectura es una actividad sencilla si las palabras son cortas y las frases no demasiado largas.

Los psicólogos, pedagogos y lingüistas han buscado fórmulas para determinar numéricamente si un texto es fácil o difícil de leer.

Una de las primeras fue la fórmula polinómica de *Facilidad de lectura*, dada por Flesh en 1946:

$$F = 206,835 - 0,846S - 1,015P$$

donde S es el promedio de sílabas de 100 palabras, y P, el promedio de las palabras por frase.

El valor F, índice de facilidad, es un número comprendido entre 0 y 100. Si el resultado es un número bajo, quiere decir que el texto es complicado de leer, mientras que si se aproxima a 100 es muy sencillo.



DALE AL COCO

Una edad indefinida

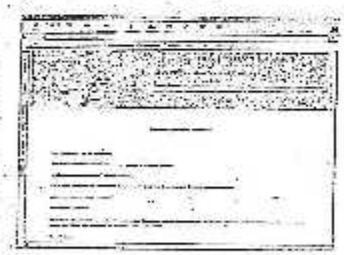
A un aficionado al álgebra le preguntan en cuántos años tenía. Contesta:

Tomad tres veces los años que tendré dentro de tres años y restadles tres veces los años que tenía hace tres años y resultarán exactamente los años que tengo ahora.

¿Cuántos años tiene?

EN INTERNET

Atención: problemas en la red



En Internet puedes encontrar un montón de páginas con problemas matemáticos interesantes, acertijos, juegos, etc. Échale un vistazo a estas:

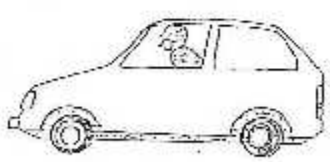
- Página de matemáticas de Ciudad futura, donde hay una colección de problemas, unos resueltos y otros por resolver:
  www.ciudadfutura.com/matematicas/problemas
- Página de problemas recreativos y acertijos:
  www.acertijos.net/21.htm
- Página del Instituto Fray Luis de León:
  www.platea.pntic.mec.es/~jescuder/

Frenazos polinómicos

Conocer las distancias de frenado en un coche puede evitarnos accidentes graves.

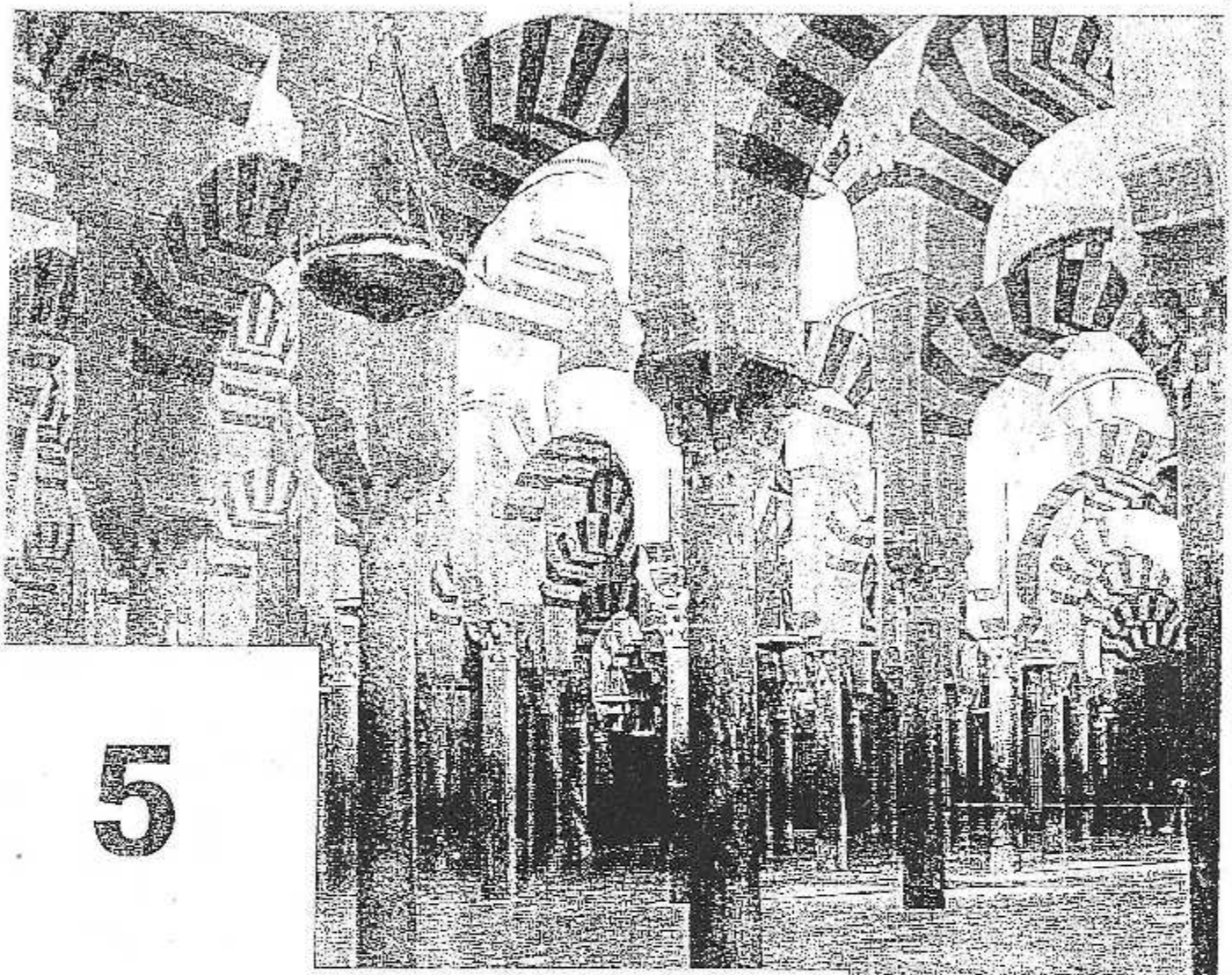
Hay una fórmula polinómica que nos ofrece la distancia de frenado de un coche en buenas condiciones (carretera seca y en buen estado):

$$D = \frac{v}{5} + \frac{v^2}{170}$$



- D es la distancia en metros que recorre el coche desde que se aprieta el freno hasta que se detiene.
- v es la velocidad, en kilómetros por hora, a la que circula el coche cuando frena.

Por ejemplo, para una velocidad de 120 kilómetros por hora son necesarios casi 109 metros para detenerse. ¡Todo un campo de fútbol!



5

Ecuaciones de primer grado

La mezquita de Córdoba fue construida por Abderramán I en el año 786, y ampliada en los dos siglos siguientes. En el siglo x se creó el Califato de Córdoba, y España se convirtió en el centro cultural más importante de Occidente.

La ciencia árabe de la época es de gran importancia. Sus contribuciones matemáticas, en el siglo IX, suponen un considerable avance en el terreno de las ecuaciones.

En esta unidad aprenderás

- Los conceptos relativos a las ecuaciones.
- Reglas para obtener rápidamente ecuaciones equivalentes.
- A resolver ecuaciones de primer grado más complicadas.
- A resolver problemas con la ayuda de las ecuaciones.

RESUELVE

1 ¿Son ciertas las siguientes igualdades numéricas? ¿Por qué?

a) $3(5 - 1) = 3 \cdot 5 - 1$ c) $-(5 + 7) = -5 + 7$

b) $3(5 - 1) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1$ d) $-(5 + 7) = -5 - 7$

2 ¿Sigue siendo válida una igualdad si escribimos los miembros en distinto orden?

a) ¿Es lo mismo escribir $x = 1$ que $1 = x$?

b) Como $2(4 - 5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$, ¿también es cierto que $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 2(4 + 5)$?

3 Expresa $4 \cdot 7 + 4 \cdot 9$ como el producto de 4 por una suma.

Repite el proceso anterior con las siguientes expresiones:

$6x + 6y = \boxed{?}$ $3x - 3y = \boxed{?}$ $4x^2 + 2x = \boxed{?}$

4 Expresa mediante una fórmula:

a) La longitud de una circunferencia de radio r.

b) El área de un rectángulo de base b y altura a.



5 Piensa un número, multiplícalo por 3, suma 2 al resultado, resta luego el doble del número pensado. ¿Qué número has obtenido?

Expresa este mismo proceso para un número cualquiera desconocido al que puedes llamar con una letra, por ejemplo x.

RECUERDA



Igualdades

En una igualdad intervienen dos expresiones unidas por el signo igual (=).

Pueden aparecer solo números: $7 = 4 + 3$

Pueden aparecer números y letras: $x + 3 = 5$

Esta ecuación significa: ¿existe algún número de forma que al sumarle 3 dé 5?

Una igualdad se puede leer en los dos sentidos

$8 : 2 + 3 = 7$ es lo mismo que $7 = 8 : 2 + 3$.

$x = 8$ es lo mismo que $8 = x$.

$x + 2 = 3$ es lo mismo que $3 = x + 2$.

Operaciones con signo menos «−» y con paréntesis

Si hay un signo menos delante de un paréntesis o de una fracción, hay que aplicar la regla de los signos y la propiedad distributiva.

Ejemplos:

a) $-(3 - x) = -3 + (-x) = -3 + x$

b) $-\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{-(x - 1)}{2} = \dfrac{-x + 1}{2}$

c) $-2(-x + 5) = -2(-x) + (-2) \cdot 5 = 2x - 10$

d) $2 - \dfrac{4 + x}{5} = \dfrac{-2(4 + x)}{5} = \dfrac{-8 - 2x}{5}$

Equivalencia de ecuaciones

Dos o más ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones:

a) $x - 2 = 1$ Solución: $x = 3$

b) $4x = 12$ Solución: $x = 3$

1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Identidades y ecuaciones

Observa las siguientes igualdades:

$4 + 5 = 1 + 2 + 6 \rightarrow 9 = 9$

$x + y = y + x \rightarrow$ Se cumple siempre, para cualquier valor de x e y } Identidad

$x + 5 = 7 \rightarrow$ Solo se cumple para $x = 2$ Ecuación

Identidad: Es una expresión con una igualdad que se cumple siempre.

Identidad numérica: Solo aparecen números.

Identidad algebraica: Aparecen números y letras.

Ecuación: Es una expresión con letras y números en una igualdad que se cumple solo para ciertos valores de las letras.

Identidad proviene de la palabra latina *"idem"*.

SACAR FACTOR COMÚN

La propiedad distributiva aplicada en sentido contrario se llama sacar factor común:

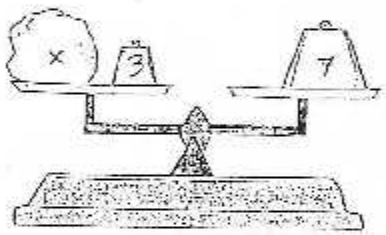
$7x + 7y = 7(x + y)$

$12 - 3x = 3(4 - x)$

$10x + 5x^2 = 5x(2 + x)$

Solución de una ecuación

¿Cuánto vale x si la balanza está en equilibrio?



Hay que resolver la ecuación $x + 3 = 7$.

La solución es $x = 4$, porque $4 + 3 = 7$.

Resuelve las ecuaciones:

1.ª $x + 5 = x - 1$

No hay ningún número tal que al sumarle 5 y restarle 1 dé lo mismo. Cuando la ecuación no tiene solución se dice que es **incompatible.**

2.ª $x + 2 = x + 2$

Tiene como solución cualquier número. La ecuación tiene **infinitas soluciones.**

ECUACIÓN	SOLUCIONES
$x + 3 = 7$	Una
$x + 2 = x + 2$	Infinitas
$x + 5 = x - 1$	Ninguna

Soluciones de una ecuación son los valores que tiene que tomar la incógnita para que se verifique la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar sus soluciones.

Las ecuaciones que tienen solución se llaman compatibles.

Las ecuaciones que no tienen solución se llaman incompatibles.

Lenguaje algebraico. Planteamiento de un problema

Para plantear correctamente un problema conviene manejar el lenguaje matemático y traducir del lenguaje usual al algebraico. Observa los siguientes ejemplos:

«El cuadrado de la mitad de un número más tres».

Si el número es x: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$

«El cuadrado de la mitad de la suma de un número más tres».

Si el número es x: $\left(\frac{x + 3}{2}\right)^2$

«El doble de la edad de Fernando dentro de diez años».

Si la edad es x: $2(x + 10)$

«Dentro de diez años la edad de Fernando será el doble de la que tiene ahora».

Si la edad es x: $(x + 10) = 2x$

ACTIVIDADES

unidad 5

PARA PRACTICAR

1 ● Coloca el signo igual (=) o desigual (≠) según corresponda:

a) $(5 - 3) \cdot 4 \ \boxed{?} \ 5 \cdot 3 - 4$

b) $3(7 + 5) - 4 \ \boxed{?} \ (128 : 2) : 2$

c) $(2 + 3)^2 \ \boxed{?} \ 2^2 + 3^2$

d) $54 : (2 + 3) \ \boxed{?} \ 54 : 2 + 3$

Ejercicio resuelto

2 Indica si las siguientes igualdades son identidades numéricas, identidades algebraicas o ecuaciones:

a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $x + 1 = 0$

a) Es una identidad algebraica que expresa a qué es igual el cuadrado de un binomio. Se verifica para todo valor de x.

b) Es una ecuación: solo se cumple la igualdad si $x = -1$.

3 ● Indica si las siguientes igualdades son identidades numéricas, identidades algebraicas o ecuaciones:

a) $(36 : 3) \cdot (4 + 2) = 72$

b) $xy = yx$

c) $3x - 6 = 0$

d) $x = x + 1$

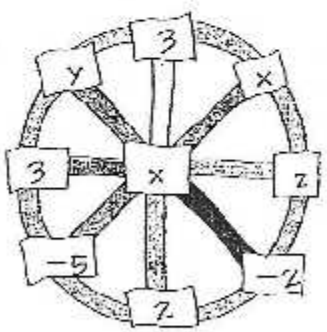
4 ● Comprueba si $x = 3$ es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 75 - 23x$

b) $10x + 10 = 2x + 36$

PARA APLICAR

9 ● La suma de los tres números de cada diámetro de esta circunferencia es la misma. Plantea las ecuaciones que permitan hallar x, y, z y resuélvelas. ¿Son equivalentes?



10 ● Una ecuación de primer grado puede tener una solución, infinitas o ninguna. Escribe un ejemplo de cada una de ellas.

11 ● Escribe en el lenguaje usual las siguientes igualdades algebraicas:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

5 ● ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones? ¿Son compatibles o incompatibles?:

a) $x - 2 = 3x - 1 - 2x$

b) $x + 1 = 3 + 2$

c) $2 - x = 5 - 2 - x$

d) $x - 3 = 4$

6 ● ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones? ¿Son compatibles o incompatibles?

a) $3x - 2x = 3$

b) $3x - 2x - x = 0$

c) $3x - 2x - x = 7$

d) $3x - 2x - x = 7x$

Ejercicio resuelto

7 Escribe con una incógnita:

a) Una cantidad cuatro unidades menor que el triple de x.

b) Un número impar.

a) Triple de x: $3x \longrightarrow$ cuatro unidades menor: $3x - 4$.

b) Un número impar es un número par más 1.

par: $2x \longrightarrow$ impar: $2x + 1$.

8 ● Escribe con una incógnita:

a) El doble de un número x.

b) El número anterior a x.

c) El doble de la suma de un número más el consecutivo.

d) La suma del doble de un número más el consecutivo.

12 ● Un adivinador de números le dice a Nuria que haga sucesivamente lo siguiente: que piense un número, le sume 2, multiplique por 2 el resultado, luego sume 3, reste del anterior el número pensado, después sume 5, y finalmente le diga el resultado. El número final que le ha dicho Nuria es 15. ¿En qué número había pensado?

13 ● ¿Es cierto que la diferencia entre dos números consecutivos elevados al cuadrado es el doble del menor más uno? Tradúcelo al lenguaje algebraico. ¿Es una identidad algebraica?

14 ● Plantea la ecuación que calcula la edad de una persona en los siguientes casos:

a) Si al doble de su edad se le resta la edad que tiene actualmente, resulta la edad que tendrá dentro de 3 años.

b) Si al triple de su edad se le resta 3 años, resulta el triple de la edad que tenía el año pasado.

c) La edad que tendrá dentro de 15 años excede en 3 años al doble de su edad actual.

2 Obtención de ecuaciones equivalentes



Para resolver una ecuación conviene transformarla en otra equivalente más sencilla. Para ello se pueden aplicar las reglas de la suma y del producto.

Regla de la suma

Resuelve la ecuación: $6x - 1 = 2x + 8$

Se resta $2x$: $6x - 1 - 2x = 2x + 8 - 2x \rightarrow$ Ecuación equivalente: $4x - 1 = 8$

Se suma 1: $4x - 1 + 1 = 8 + 1 \rightarrow$ Ecuación equivalente: $4x = 9$

Regla de la suma: Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta los mismos números o letras, se obtiene otra ecuación equivalente.

Observa: La regla de la suma permite que la incógnita esté en un solo miembro.

Ejemplo:

Calcula la solución de la siguiente ecuación: $3x - 5 = 7 + 2x - 4$

Se opera: $3x - 5 = 3 - 2x$

Se resta $2x$ a los dos miembros: $3x - 5 - 2x = 3 + 2x - 2x$

Se opera: $x - 5 = 3$

Se suma 5 a los dos miembros: $x - 5 + 5 = 3 + 5$

$x = 8$

Una aplicación muy útil de la regla de la suma es la **simplificación**, que consiste en suprimir en los dos miembros un mismo término (número o letra) que estaba sumando o restando.

$$x + 7 - 5 + 7 \Rightarrow x = 5$$

Se suprime el término 7 que está sumando en los dos miembros.

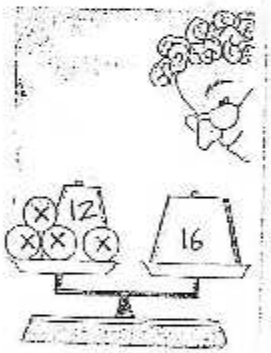
TRANSPONER TÉRMINOS

Pasar un término de un miembro a otro cambiado de signo:

$3x - 5 = 3 + 2x$

$3x - 2x = 3 + 5$

$x = 8$



TRANSPONER

Los términos que están multiplicando a todo un miembro los podemos pasar dividiendo al otro, y los que están dividiendo, pasarlos multiplicando.

Regla del producto

Resuelve la ecuación: $4x + 12 = 16$

Se divide por 4: $x + 3 = 4$

Regla del producto: Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

Observa: La regla del producto permite que la incógnita esté sola.

Ejemplo:

Calcula la solución de la siguiente ecuación: $\frac{-3x}{8} = 2$

Se multiplica por 8: $8 \cdot \frac{(-3x)}{8} = 2 \cdot 8 \Rightarrow -3x = 16$

Se divide por (-3): $\frac{-3x}{(-3)} = \frac{16}{(-3)} \Rightarrow x = \frac{-16}{3}$

Una aplicación de la regla del producto muy útil es la **simplificación**, que consiste en suprimir números distintos de cero que están multiplicando o dividiendo a los dos miembros de la ecuación.

$$4x = 12 \Rightarrow 4x = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{2x}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

15 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la regla de la suma:

a) $x + 5 = 9 - 7$

b) $4x - 2 = 3x$

a) Se opera: $x + 5 = 2$

Regla de la suma: $x + 5 - 5 = 2 - 5$

$x = -3$

b) Regla de la suma: $4x + 2 - 3x = 3x - 3x$

$x + 2 = 0$

Regla de la suma: $x + 2 - 2 = 0 - 2$

$x = -2$

16 ● Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la regla de la suma:

a) $1{,}5x - 0{,}5x + 4$ c) $7x + 4 = 6x - 5$

b) $1 + 2x - 3x - 1$ d) $1 - 6x - 7x$

17 ● Resuelve las siguientes ecuaciones simplificando:

a) $2x - 0{,}5 - 0{,}5 + 4$

b) $3x - 1 = x - 1$

c) $x + 7 + x = x + 3$

d) $x + 6 - x = -x + 3$

Ejercicio resuelto

18 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la regla del producto:

a) $\frac{-3x}{5} = -9$ b) $-\frac{3}{4} = \frac{1}{x}$

a) Se multiplica por 5 y dividimos por (-3):

$$\frac{3x \cdot 5}{5 \cdot (-3)} = \frac{9 \cdot 5}{(-3)} \Rightarrow x = \frac{(-9) \cdot 5}{(-3)} = 15$$

b) Se multiplica por 4 y por x:

$$\frac{(-3) \cdot 4 \cdot x}{4} = \frac{1 \cdot 4 \cdot x}{x} \Rightarrow (-3)x = 4 \rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

19 ● Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la regla del producto:

a) $10 - 4x = 2$

b) $\frac{3}{2} = \frac{2x}{4}$

c) $-2 = \frac{-2}{x}$

20 ● Resuelve las siguientes ecuaciones simplificando:

a) $-2x = -2$ c) $4x = 2$ e) $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$

b) $3x = 6$ d) $0{,}5x = 0{,}5$ f) $\frac{7x}{2} = 7$

21 ● Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la regla de la suma y del producto:

a) $3x - 2 = x + 4$

b) $\frac{3}{2} = \frac{9}{x}$

c) $2x + 4 = 5x + 1$

d) $4x - 5 = x + 4$

e) $5x - 2x = 9 - 3$

f) $3x + 8 = 5x - 6$

22 ● Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 7 + 5x = 25$

b) $2x - 8 + 7x = 19$

c) $6x + 2x + 7 = 31$

d) $7x + 3 = 63 - 3x$

e) $2x + 3x + 4 + 5x = 34$

f) $3x + 4 + 5x + 6x = 32$

PARA APLICAR

23 ● La suma de tres números consecutivos es 72. Halla esos números.

24 ● Halla dos ecuaciones que tengan por solución $x = -2$ utilizando la regla de la suma y la regla del producto.

25 ● La edad de Alberto, dentro de 12 años, será el triple de su edad actual. ¿Cuántos años tiene ahora?

26 ● Un portaminas y su mina cuestan 1,10 euros. El portaminas cuesta 1 euro más que la mina. ¿Cuánto vale el portaminas y cuánto la mina?

27 ● Sentándose dos alumnos en cada banco quedan todavía cinco sin asiento. ¿Cuántos bancos hay si son 28 los alumnos de la clase?

28 ● En una reunión de 49 personas hay doble número de mujeres que de hombres, y el número conjunto de niños y niñas es cuatro veces el número de hombres. ¿Cuántas personas hay de cada clase?

3 Resolución de ecuaciones de primer grado



Observa cómo se resuelven ecuaciones en la práctica.

Supresión de paréntesis

– **Resuelve la ecuación:** $5x - 3 = 7 - (1 - 2x)$

Se suprimen paréntesis (se cambia de signo los términos de dentro): $5x - 3 = 7 - 1 + 2x$

Se opera: $5x - 3 = 6 + 2x$

Se aplica la regla de la suma: $5x = 9 + 2x$

Se aplica la regla de la suma: $3x = 9$

Se aplica la regla del producto: $x = 3$

Resuelve la ecuación: $x - 6 = -2(3x - 4)$

Se suprimen paréntesis (se aplica la propiedad distributiva y la regla de los signos): $x - 6 = -6x + 8$

Se aplica la regla de la suma: $x = -6x + 14$

Se aplica la regla de la suma: $7x = 14$

Se aplica la regla del producto: $x = 2$

Eliminación de denominadores

MULTIPLICAR CON PARÉNTESIS

Si se quiere multiplicar varios términos por una misma cantidad hay que poner paréntesis.

– **Resuelve la ecuación:** $\frac{x}{4} = 1 - \frac{x-4}{6}$

Se halla el m.c.m. (4,6) = 12

Se multiplica por 12: $\frac{12x}{4} = 12 - \frac{12(x-4)}{6}$

Se simplifica: $3x = 12 - 2(x - 4)$

Se suprimen paréntesis: $3x = 12 - 2x + 8$

Se opera: $3x = 20 - 2x$

Se aplica la regla de la suma: $5x = 20$

Se aplica la regla del producto: $x = 4$

– **Resuelve la ecuación:** $\frac{3x}{2} - \frac{2x+1}{5} = \frac{5x}{4} + 7$

Se halla el m.c.m. (2, 5, 4) = 20

Se multiplica por 20 y se simplifica: $30x - 4(2x + 1) = 25x + 140$

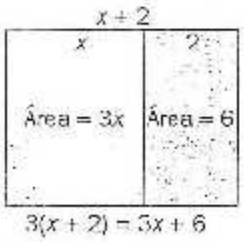
Se suprimen paréntesis: $30x - 8x - 4 = 25x + 140$

Se opera: $22x - 4 = 25x + 140$

Se aplica la regla de la suma: $-3x = 144$

Se aplica la regla del producto: $x = -48$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA



Para resolver ecuaciones:

1.° *Si hay* **denominadores**, *se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores y multiplicamos a ambos miembros por ese número.*

2.° *Si hay* **paréntesis**, *se suprimen aplicando la propiedad distributiva y cambiando el signo de los términos de dentro si delante hay un signo «–».*

3.° *Aplicamos las reglas de la suma y del producto.*

PARA PRACTICAR

29 ●
Resuelve las ecuaciones:
a) $2(x - 1) - 4 = x$
b) $4x + 3(7 - 2x) = 19$
c) $6x - (4 - 2x) = 7$
d) $x + 9 - (-x + 3) = 2(3 - x)$

30 ●
Resuelve las ecuaciones:
a) $5(2x - 3) + 4x = 11$
b) $4(3x + 5) = 5 - 2x$
c) $4(x + 1) - 5 = 2(1 - 2x)$
d) $7 + 3(x - 4) = 21x - 6(x - 2)$

31 ●
Resuelve las ecuaciones:
a) $6(5x - 2) - 5x = 1$
b) $5x - 7 = 2(4x + 1) - 9$
c) $3(4x - 5) - 2(6x - 1) = 18$
d) $x + (x - 1) = 2(x + 3)$

32 ○
Resuelve la siguiente ecuación:
$(x + 1)^2 = (x + 1)(x - 1) + 4$

Ejercicio resuelto

33 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2$ b) $\frac{2x}{3} - \frac{2}{3} = x - 4 + \frac{2}{3}$

a) Se calcula el m.c.m. (3,5) = 15

Se multiplica por 15: $15\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) = 30$

Se simplifica: $5x - 3x = 30 \Rightarrow 2x = 30$

Se aplica la regla del producto: $x = 15$

b) Se aplica la regla del producto:

$$3\left(\frac{2x}{3} - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x - 4 + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = 3x - 12 + 2$$

Se aplica la regla de la suma:

$$-2 + 12 - 2 = 3x - 2x \Rightarrow 8 = x$$

34 ○
Resuelve las ecuaciones:
a) $\frac{x}{2} + 27 = x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5}$
b) $2 + \frac{1 - x}{8} = \frac{2(5 - x)}{6}$
c) $\frac{x - 9}{3} + \frac{3x - 4}{4} = \frac{2x + 3}{2}$
d) $3 - x = \frac{x + 1}{3}$
e) $\frac{x - 3}{4} = \frac{x - 5}{6} + \frac{x - 1}{9}$
f) $\frac{2 - x}{4} + 3x = \frac{5 + x}{6}$

35 ○
Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $\frac{2x}{15} - \frac{3x - 5}{20} = \frac{x}{5} - 3$
b) $2x - 1 - \frac{3x - 1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{x + 2}{6} + x - 3$
c) $\frac{x - 2}{3} + \frac{x + 1}{6} = \frac{x - 1}{4} + 1$

36 ●
Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $\frac{2x - 5}{x} = \frac{4}{3}$
b) $\frac{1 - x}{4 - x} = \frac{2}{3}$
c) $\frac{x - 28}{x} = \frac{5}{2}$
d) $\frac{5x - 1}{4 + x} = \frac{7}{2}$

PARA APLICAR

37 ○
Halla el número cuya mitad, tercera y cuarta parte suman 39.

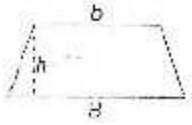
38 ○
Encuentra un número tal que restándole 1 resulte tres veces mayor que restándole 10.

39 ●
Jaime y su hermana Elsa tienen 25 cromos. Reparte los cromos de forma que Elsa tenga dos cromos más que la mitad de Jaime.

40 ●
Alex y Sonia viven a 18 km de distancia, y se dirigen a encontrarse. Alex con una velocidad de 5 km por hora, y Sonia con una velocidad de 4 km por hora. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

41 ●
El área de un trapecio de altura h y bases b y B es:

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$



Despeja h, B y b.

42 ●
Un caminante realiza las $\frac{2}{3}$ partes de un viaje en bicicleta, $\frac{1}{4}$ del resto en autobús y los 10 km restantes andando. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?

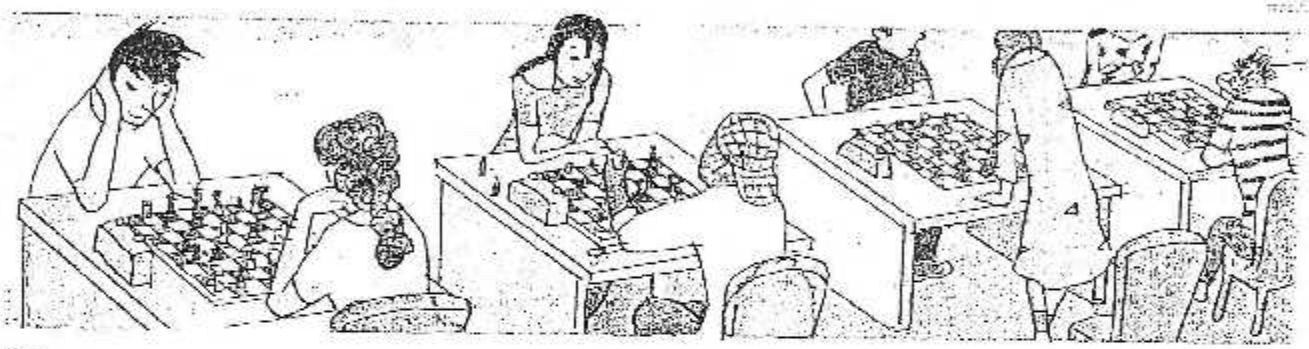
TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Para plantear una ecuación

- Elige la incógnita y plantea la ecuación.
- Resuelve la ecuación.
- Comprueba el resultado.

Problema

A una competición de ajedrez asistieron en total 20 personas entre chicos y chicas. Olga jugó con 7 chicos, María jugó con 8, Luisa con 9, y así hasta llegar a Sonia, que jugó con todos ellos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había en la competición?



Solución

Elige la incógnita y plantea la ecuación

Se podría empezar el razonamiento así:

x: número de chicos; $20 - x$: número de chicas

Pero ¿cómo seguir?

Como tenemos datos del número de chicos que van jugando, es mejor para compararlos elegir $(20 - x)$ como número de chicos.

Empezamos de nuevo eligiendo otra incógnita:

x: número de chicas; $20 - x$ = número de chicos

- La primera chica, Olga, jugó con 7 chicos $\quad 7 = 1 + 6$ (Olga es la chica número 1)
- La segunda chica, María, jugó con 8 chicos $\quad 8 = 2 + 6$ (María es la chica número 2)
- La tercera chica, Luisa, jugó con 9 chicos $\quad 9 = 3 + 6$ (Luisa es la chica número 3)

...

- La última chica, Sonia, jugó con todos los chicos todos $= x + 6$ (Sonia es la chica número x)
- El número total de chicos es $x + 6$

Ecuación: $\quad 6 + x = 20 - x$

Resuelve la ecuación

Se aplica la regla de la suma: $\quad 2x = 14$

Se aplica la regla del producto: $\quad x = 7$

Hay 7 chicas y 13 chicos.

Comprueba el resultado

La primera chica jugó con 7, la segunda con 8, la tercera con 9, la cuarta con 10, la quinta con 11, la sexta con 12, y la séptima y última con los 13 chicos.

PARA PRACTICAR

43 ● En un garaje hay, entre coches y motos, 50 vehículos. Sabiendo que el número total de ruedas es de 160, halla el número de motos y el número de coches.

44 ● La suma de las dos cifras de un número es 10, y el doble del número supera en una unidad al número que se obtiene invirtiendo sus dos cifras. ¿Qué número es?

LO MÁS IMPORTANTE

Ecuaciones de primer grado

Identidad Expresión con una igualdad que se cumple siempre.	*Numérica* $4 + 5 - 1 + 2 = 6$ solo aparecen números *Algebraica* $x + y - 1 = y + x - 1$ aparecen números y letras.	*Ecuación* Expresión con letras y números en una igualdad que se cumple para ciertos valores de las letras.	*Compatible* Con una solución: $x + 5 = 7$ Con infinitas soluciones: $x + 2 = x + 2$
			Incompatible Sin solución: $x + 1 = x$

Ecuaciones equivalentes

Regla de la suma

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta los mismos números o letras, se obtiene otra ecuación equivalente.

$$6x - 2x + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x - 2x = 2x + 3 - 2x$$

Esta regla permite que la incógnita esté en un solo miembro.

- Simplificación: $x + \not{7} = 5 + \not{7} \rightarrow x = 5$
- Transposición:

$$3x = \not{2}x + 4$$
$$3x - \not{2}x = 4$$

Regla del producto

Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

$$2x - 8 = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2x - 8}{2} = \frac{6}{2}$$

Esta regla permite que la incógnita esté sola.

- Simplificación: $\not{4}x = \not{4} \rightarrow x = 1$
- Transposición:

$$\frac{2x}{5} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

Resolución de ecuaciones

1.º Si hay *denominadores*, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores y se multiplican ambos miembros por ese número.

$$\frac{x}{4} = 1 - \frac{x - 4}{6} \quad \text{m.c.m. } (4,6) = 12$$
$$\frac{12x}{4} = 12 - \frac{12(x - 4)}{6}$$

2.º Si hay *paréntesis*, se suprimen aplicando la propiedad distributiva y cambiando el signo de los términos de dentro si por delante hay un signo «−».

$$3x = 12 - 2(x - 4)$$
$$3x = 12 - 2x + 8$$

3.º Se aplican las *reglas de la suma y del producto*.

$$3x + 2x = 20$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$

ACTIVIDADES DE SÍNTESIS

PARA PRACTICAR

45 ¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones?

a) $x - 7 = 1$ c) $2x + 3 = 19$

b) $3x - 5 = 19$ d) $5 - 3x = 19$

46 ¿Por qué símbolo de una operación aritmética hay que sustituir ? para que se tenga una identidad?

$$6 \ ? \ 3 + 4 - (3 - 1) = 5$$

47 Resuelve las siguientes ecuaciones simplificando:

a) $5x = 5$ c) $4x = 16$ e) $0{,}1x = 0{,}1$

b) $2x = -10$ d) $-3x = -3$ f) $\frac{3x}{5} = \frac{1}{5}$

48 Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la regla de la suma:

a) $x + 5 = 7 + 6$ d) $3x = 2x + 4$

b) $5x - 1 = 4x$ e) $9x + 3 = 8x + 9$

c) $4 + x = 2x + 4$ f) $2 - 3x = -3x + 3$

49 Escribe dos identidades numéricas, dos identidades algebraicas y dos ecuaciones.

PARA APLICAR

53 Pepa dice que $x = 4$ es la única solución de la ecuación:

$$5(2x + 7) = 5x + 21 + x$$

¿Es cierto?

54 Reparte 105 euros entre cinco personas, de modo que a cada una corresponda 5 euros más que a la anterior.

55 Escribe, utilizando una incógnita, las siguientes frases:

a) La mitad de un número par.

b) La diferencia de las potencias cúbicas de dos números.

c) La potencia cúbica de la diferencia de dos números.

56 La diferencia entre los cuadrados de dos números impares consecutivos es 16. ¿Cuáles son los números?

50 Resuelve las ecuaciones:

a) $7(1 + 2x) = 4x - 3$

b) $5x - (x + 4) = 2x + 10$

c) $x - 5(-2x - 1) = 3(x - 5) + 11$

d) $9(x - 2) - 2(3x + 1) = -(5x + 4)$

51 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 1}{3} + \frac{x - 2}{6} = 0$

b) $\frac{27 - x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x - 54}{10}$

c) $\frac{x - 3}{2} + \frac{x - 8}{12} = \frac{5 - x}{4} - \frac{x}{3}$

d) $\frac{2 - x}{3} + \frac{1 - x}{5} = 1 - \frac{x + 3}{5} - \frac{x}{2}$

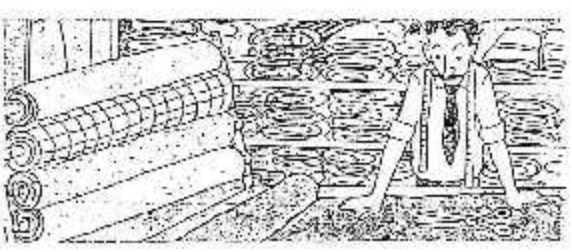
52 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{x} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{5 - x}{4x + 1} = \frac{-3}{2}$

b) $\frac{x - 10}{x} = \frac{5}{2}$ d) $\frac{3x - 7}{4x + 2} = \frac{3x - 14}{4x - 13}$

57 En un partido de baloncesto, el base ha encestado 4 puntos menos que el pivot y el alero el doble que el base. El resto de los jugadores han sumado 16 puntos y en total el equipo ha metido 76 puntos. ¿Cuántos puntos ha encestado el pivot?

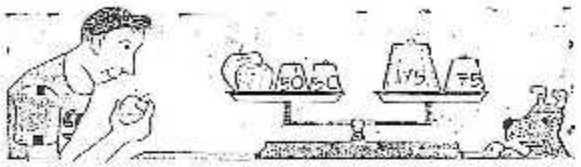
58 Halla la longitud de una pieza de tela, sabiendo que después de haber vendido la mitad, la quinta parte y la décima parte quedan diez metros.



DE REFUERZO

Identidades y ecuaciones

59 La balanza está en equilibrio. ¿Cuánto pesan las manzanas?



60 Comprueba si alguno de los siguientes valores: 0, $\frac{1}{2}$, 4, 1; es solución de la ecuación $\frac{2(x+1)}{3} = 1 - x$.

Halla una ecuación equivalente a ella.

61 ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones?

a) $x + 2 = 7$
b) $1 - 5x = x + 1 - 5x$
c) $4x = 5 - 3x$
d) $x + 5 = x + 2$

62 ¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones?

a) $2x + 1 = -1$ c) $3 + 3x = 3$
b) $-1 - x = -2$ d) $x - 1 = 1 - x$

63 Indica cuáles son identidades numéricas, cuáles identidades algebraicas y cuáles ecuaciones:

a) $2x = 0$
b) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
c) $x^2 = 1$
d) $36 : (2 + 3) = 7,2$

64 Escribe, utilizando una incógnita, los siguientes datos:

a) Un número y su raíz cúbica.
b) La suma de un número y el anterior.
c) Dos números cuya suma es 14.
d) El triple del cuadrado de un número.

65 Escribe con una incógnita las siguientes ecuaciones:

a) La suma de tres números pares consecutivos es 102.
b) La suma de dos múltiplos de 3 consecutivos es 75.
c) Un número más su cuarta parte es 100.
d) La diferencia entre un número y la tercera parte del anterior es 1.

Reglas de la suma y del producto

66 Resuelve las siguientes ecuaciones simplificando:

a) $x - 7 = 10 - 7$
b) $3x - 1 = 6 - 1$
c) $x + 7 + 2x = 2x - 1$
d) $x + 3 + 4 = 4$
e) $2x + 7 = x + 7 + 5$

67 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 6$ c) $\frac{2x}{3} = 10$ e) $6 = \frac{3x}{2}$
b) $\frac{x}{2} = 4$ d) $\frac{-x}{7} = 3$ f) $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

68 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 1 = x + 8$
b) $4x - 7 = x - 31 - 6$
c) $-6 - 2x = 10 - 6x + 1$
d) $-3x - 1 + 9 = -x - 48 - 3x$

69 Si al número que estoy pensando lo multiplico por 2 y a lo que me dé le sumo 50, obtengo el 124. ¿De qué número se trata?

70 En mi casa hay un patio rectangular de perímetro 42 m. Halla sus dimensiones sabiendo que es el doble de largo que de ancho.

Paréntesis y denominadores

71 Resuelve las ecuaciones:

a) $6(4x + 7) = 9 - 2x$
b) $7(2 - x) = 3(x + 6)$
c) $4x - 2(3x - 7) = 8$
d) $2x - 7 \quad (3x - 2) = 2(6 - 4x)$

72 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{2x - 1}{4} + x = 2x - 3$
b) $\frac{2 - x}{4} + 3x = \frac{4 + x}{6}$
c) $\frac{5 - x}{x} = \frac{1}{4}$
d) $\frac{1 - x}{2} + \frac{1 + x}{3} = 1 + x$
e) $\frac{x - 1}{5} = 2 - \frac{1 - x}{5}$

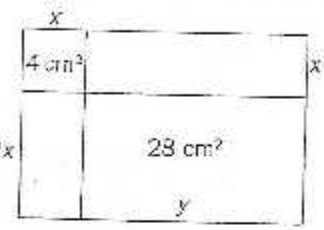
73 El mástil de una bandera mide 9,10 m y se parte en dos trozos. El mayor mide 80 cm más que el otro. Calcula la longitud de cada trozo.

74 El precio de un libro coincide con un tercio de lo que vale más un cuarto de lo que vale más 5 €. ¿Cuánto cuesta el libro?

ACTIVIDADES

DE AMPLIACIÓN

75 El rectángulo de la figura se ha descompuesto en un cuadrado y tres rectángulos. Dentro del cuadrado y de uno de los rectángulos se ha escrito el valor de su área en cm^2. Halla x e y.



76 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = -3$

b) $x + \dfrac{1}{x} = x + 1$

77 Pon los paréntesis y símbolos de operaciones necesarios entre los términos del primer miembro para que se tengan identidades numéricas:

a) $4\ 4\ 4\ 4 = 3$ c) $4\ 4\ 4\ 4 = 6$

b) $4\ 4\ 4\ 4 = 7$ d) $4\ 4\ 4\ 4 = 8$

78 Completa para que se tenga una identidad algebraica:

$$(a + c + b + d)(a + c - b - d) = (a + c)^2 - \boxed{?}^2$$

79 Un cesto tiene 72 unidades entre manzanas, peras y naranjas. Sabiendo que el número de manzanas es cinco veces el de peras y que el de naranjas es la semisuma de los otros dos, halla las unidades de cada tipo de fruta que contiene el cesto.

80 María tiene 7 años. Cuando alcance la edad de su madre, la suma de ambas edades será de 104 años. ¿Cuál es la edad actual de su madre?

81 Un obrero realiza un trabajo en 12 horas. Ese mismo trabajo lo efectúa otro en 15 horas. ¿Cuánto tiempo invertirán en hacerlo los dos a la vez?

82 Un coche recorre la distancia entre dos ciudades en un tiempo determinado. Si aumenta su velocidad en 40 kilómetros por hora tarda 1 hora menos en hacer el viaje. Calcula la distancia entre las dos ciudades.

AUTOEVALUACIÓN

1 Resuelve estas ecuaciones simplificando:

a) $2x + 3 = 1 - 4x + 3$

b) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{6}{5}$

c) $6x - 8 + x = 3 + x - 1$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 7 = -5$

b) $3x = 2x - 0{,}5$

c) $3 - 8x = -9x + 5$

3 Resuelve las ecuaciones:

a) $5x - 2(3x - 7) = -13$

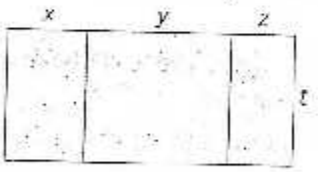
b) $x + 2(x + 4) = 1 + 3(x + 2)$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 1 - \dfrac{x + 2}{2} - \dfrac{x + 3}{3} = 5(1 - x)$

b) $\dfrac{x - 11}{8} + \dfrac{2x + 3}{4} - \dfrac{7}{24} = \dfrac{x}{24} - 0$

5 ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo grande y las áreas de los tres rectángulos en que se ha descompuesto? Exprésala mediante una identidad algebraica.



6 Reparte 300 euros entre tres personas, de modo que la segunda reciba 16 euros más que la primera, y la tercera 28 euros más que la segunda.

7 Antonio tiene 50 años. ¿Qué edad tiene su hijo Luis, si hace dos años su padre le triplicaba su edad?

8 Dos números suman 15. Si al primero lo dividimos entre 3 y al segundo entre 2, el resultado es el mismo. Halla dichos números.

Viaje matemático



¿Ha sido niño o niña? ¡Ha sido 1!

El matemático P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) no era partidario de escribir cartas. Se cuenta que, por eso, cuando nació su primer hijo envió un telegrama a su suegro con el siguiente mensaje:

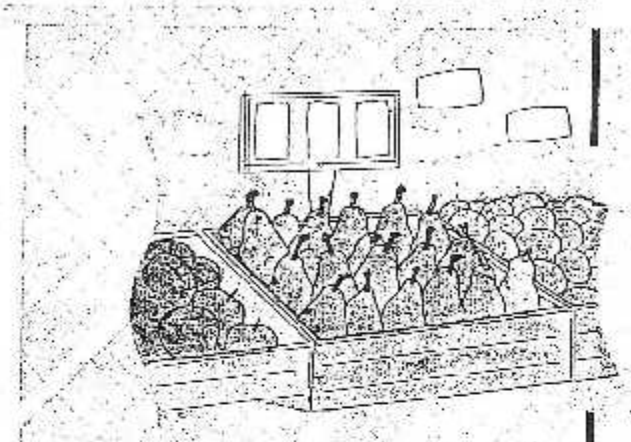
2 + 1 = 3

Ecuación de huesos

La palabra álgebra viene del término árabe *al-jabr*, que significa "restauración", y se refiere a la transposición de términos de un miembro a otro en las ecuaciones.



Durante mucho tiempo, esta palabra se ha utilizado también para designar el arte de recomponer o restaurar los huesos dislocados. Si de alguien decían que era un algebrista, lo mismo podía ser un matemático que un médico especializado en huesos.



DALE AL COCO

El viento ha tirado el primer número (las centenas) del precio y así quedó dividido entre 5. Otra ráfaga de viento ha hecho volar la cifra de las decenas y el precio se ha vuelto a dividir entre 5. ¿Cuál era el precio original?

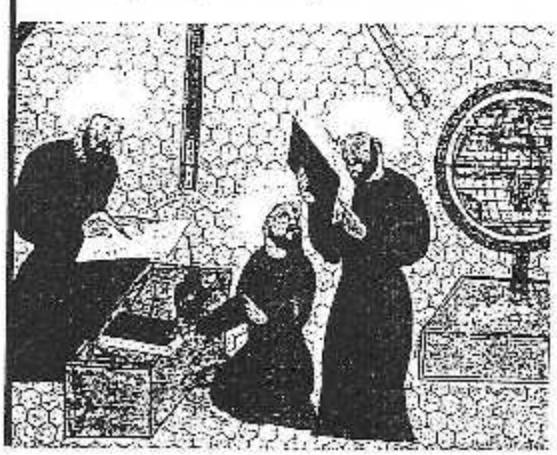
Las mil y una noches del álgebra

La *Casa de la Sabiduría* de Bagdad que figura en esta ilustración del siglo XIII está considerada como una de las academias científicas más importantes de la historia.

Desde ella se impulsó el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias en general.

Fue fundada en el siglo IX por el califa Al-Mamun, el mismo que aparece en el cuento de *Las mil y una noches*.

En esta institución trabajó el matemático árabe Al-Jwarizmi, al que se debe uno de los libros que más influencia tuvo en el desarrollo del álgebra en Europa: *Al jabr al muqabala*.



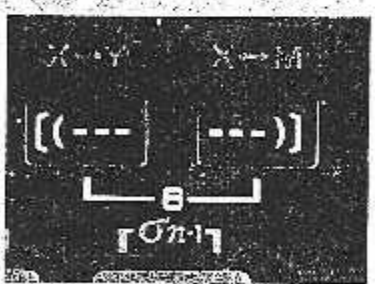
EN LA CALCULADORA

Los paréntesis te ayudan a mantener el orden

Puedes conseguir que tu calculadora haga las operaciones en el orden que tú quieras utilizando las teclas de paréntesis.

Para que veas cómo funcionan, halla 7(5+3) con la calculadora.

Debes dar a las siguientes teclas:



7 [(--] 5 [+] 3 [--)]

Al cerrar el paréntesis aparece en la pantalla el resultado de la operación 5 [+] 3. Si ahora das a la tecla [=], la pantalla muestra el resultado final: 56.



6

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas



En el libro *El arte matemático*, escrito en el siglo III a.C. por un autor chino desconocido, aparecen resueltos algunos problemas de sistemas de ecuaciones. Esto nos lleva a pensar que los chinos posiblemente fueran los primeros en encontrar un procedimiento general para resolver sistemas. Utilizaban para ello un método que consistía en la aplicación de determinadas reglas primitivas de cálculo en un tablero de contar.

En esta unidad aprenderás

- Cuáles son las ideas principales sobre los sistemas de ecuaciones y sus soluciones.
- Qué transformaciones mantienen las soluciones de los sistemas.
- A resolver sistemas de ecuaciones utilizando distintos métodos.
- A resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones.

ACTIVIDADES

unidad 6

PARA PRACTICAR

1 ● En las siguientes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas indica cuáles son los coeficientes de las incógnitas y cuáles los términos independientes:

a) $3x + 5y = 10$ c) $x - 2y = -3$

b) $-x + y - 1 = 0$ d) $7y + 4 = 0$

2 ● ¿Son ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

a) $x - 4y = 4$ c) $x + 2y + 3z = 1$

b) $\frac{x}{3 + y} = 1$ d) $y = -5$

3 ● Encuentra tres soluciones de esta ecuación:

$$x - 2y = 3$$

4 ● En las ecuaciones con dos incógnitas

$$2x + 6y = 4 \quad \text{y} \quad -x + 2y = 3$$

x e y representan los mismos valores. Completa:

a) $3x + 4y =$? c) $x + 3y =$?

b) $2x - 4y =$? d) $5x =$?

PARA APLICAR

Problema resuelto

8 Expresa en forma de ecuaciones con dos incógnitas los siguientes enunciados:

a) La edad de una madre es el triple de la edad de su hijo.

b) La edad de un padre hace cinco años era el doble de la edad de su hija.

a) Edad de la madre: x
Edad de su hijo: y

$$x = 3y$$

b) Edad actual del padre: x
Edad actual de la hija: y

$$x - 5 = 2(y - 5)$$

9 ● Expresa en forma de ecuaciones con dos incógnitas los siguientes enunciados:

a) La base de un triángulo es la mitad de su altura.

b) En una biblioteca han entrado unas personas y han salido otras, y quedan 12 dentro.

c) En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 10 cabezas y 34 patas.

d) De los 29 alumnos de una clase de 3.º de ESO, un grupo ha elegido como idioma optativo francés y el resto alemán.

5 ● Escribe un sistema de ecuaciones compatible y otro incompatible en los que una de las ecuaciones sea

$$4x + 3y = 1$$

Ejercicio resuelto

6 Resuelve el siguiente sistema mediante tablas:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

$y = x + 3$

x	y
−1	2
0	3
1	4
2	5
3	6

$2x + y = 9$

x	y
−1	11
0	9
1	7
2	5
3	3

La solución es: $x = 2, y = 5$

7 ● Resuelve los siguientes sistemas mediante tablas:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

10 ● Sabiendo que 3 periódicos y 4 revistas cuestan 11 euros, y que 1 periódico y 2 revistas cuestan 5 euros, halla cuánto vale:

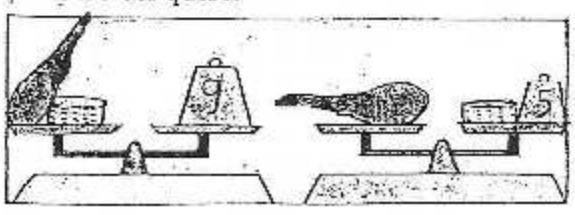
a) 1 revista c) 1 periódico y 1 revista

b) 1 periódico d) 2 periódicos y 2 revistas

11 ● Mi perra y su cachorro pesan entre los dos 6 kg, pero la perra pesa 4 kg más que el cachorro. Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y resuélvelo mediante tablas.



12 ● Las dos balanzas están en equilibrio. Explica qué cambios harías para averiguar el peso del jamón y el peso del queso.



2 Resolución de sistemas. Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones hay que pasar a otro equivalente más sencillo. Para ello se pueden utilizar las siguientes reglas:

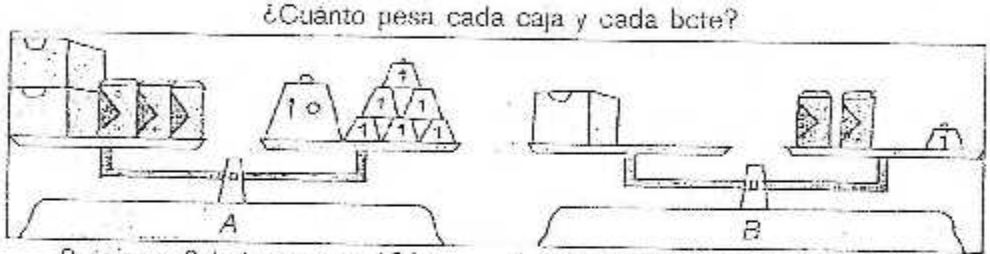
- Regla de la suma (de las ecuaciones)
- Regla del producto (de las ecuaciones)
- Regla de sustitución
- Regla de reducción

Regla de sustitución

EL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

¿Cuánto pesa cada caja y cada bote?



2 cajas y 3 botes pesan 16 kg

1 caja pesa igual que 2 botes y 1 kg

EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} 7y + 2 = 16 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Regla de sustitución



Se sustituye en la balanza *A* lo que pesa cada caja, peso que sabemos por la balanza *B*.

Regla de sustitución

Si en una ecuación de un sistema se sustituye una incógnita por la expresión que se obtiene al despejarla de otra ecuación, resulta otro sistema equivalente.

El método de sustitución

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

Se despeja y en la 2.ª ecuación:

$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ y = 4 + 2x \end{cases}$ → Se sustituye y en la 1.ª ecuación $\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4 + 2x = 6 \\ y = 4 + 2x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Se resuelve la 1.ª ecuación $\Rightarrow \begin{cases} 5x = -10 \\ y = 4 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 + 2x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Se sustituye $x = -2$ en la 2.ª ecuación $\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 + 2(-2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Solución: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Método de sustitución

1.º *Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.*

2.º *Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación.*

3.º *Se resuelve la ecuación resultante.*

4.º *Se calcula la otra incógnita, sustituyendo en la ecuación despejada el valor obtenido.*

Observación: Este método es muy útil si el coeficiente de una de las incógnitas es 1 ó −1.

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

13 Resuelve el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Se eliminan los denominadores de la primera ecuación multiplicando por el m.c.m(4, 2) = 4; se tiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Se despeja, por ejemplo, x en la primera ecuación:

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Se sustituye el valor de x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ 8 + 2y - y = 6 \end{cases}$$

Se resuelve la segunda ecuación:

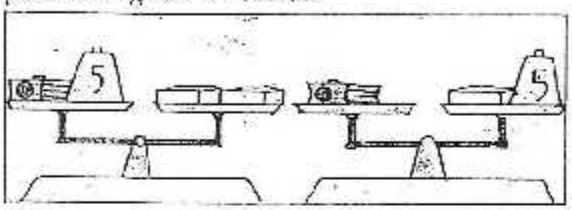
$$y = -2$$

Se sustituye el valor de y en la expresión de x despejada:

$$\begin{cases} x = 8 + 2(-2) \\ x = 4 \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

14 Las balanzas, en cuyos platillos hay sacapuntas, gomas de borrar y pesas de 5 g, están en equilibrio. ¿Cuánto pesa cada sacapuntas y cuánto pesa cada goma de borrar?



15 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$

16 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} y = 8 - 4x \\ y = 2 + 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = y - 4 \\ x = \frac{7y + 3}{2} \end{cases}$

17 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2(x + 1) - 5y = 3 \\ 2x + y = 1 - x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3(y + 2) = 4 \\ 5(x - 1) + 2y = -6 \end{cases}$

18 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{5x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \\ \frac{-3x}{2} - \frac{3y}{4} = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{4} - y = -2 \\ \frac{2x}{3} + \frac{2y}{5} = 4 \end{cases}$

PARA APLICAR

19 Halla dos números, sabiendo que su suma es 52 y que uno es el triple del otro.

Problema resuelto

20 En un campamento de verano hay tiendas de campaña dobles y triples. Si en total hay 20 tiendas y 52 sacos de dormir, ¿cuántas tiendas hay de cada clase?

Si se llama x a las tiendas dobles e y a las triples:

Hay 20 tiendas: $x + y = 20$

Hay 52 sacos de dormir: $2x + 3y = 52$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 3y = 52 \end{cases}$$

Se despeja, por ejemplo, la x de la primera ecuación y se sustituye su valor en la segunda:

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 2(20 - y) + 3y = 52 \end{cases}$$

Se resuelve la segunda ecuación:

$$40 - 2y + 3y = 52 \Rightarrow y = 12$$

Se sustituye en el valor de x: $x = 20 - 12 = 8$

Hay 8 tiendas dobles y 12 triples.

21 Separa el número 633 en dos sumandos de manera que si se divide el mayor entre el menor se obtiene 3 de cociente y 5 de resto.

22 Las edades de un padre y su hija suman 32 años, y dentro de 8 años la edad del padre será el triple de la edad de la hija. ¿Qué edades tienen?

23 Se quiere mezclar café de 6,50 euros el kilo con otro de 8 euros el kilo, de manera que resulte una mezcla de 7 euros el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deben tomarse para obtener 90 kilos de la mezcla?

24 Si a cada uno de los dos términos de una fracción le sumamos 3, la fracción resultante es equivalente a $\frac{10}{1}$; pero si a cada uno le restamos 4, resulta otra fracción equivalente a $\frac{3}{2}$. Halla la fracción.

25 Las dos cifras de un número suman 5. Si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 9. ¿Qué número es?

3 Resolución de sistemas. Método de reducción



Regla de reducción

A Lucía le gusta pintar. Ha comprado dos pinceles y tres botes de pintura, que han costado 13 euros. Por su cumpleaños le han regalado dos pinceles y siete botes, que han costado 25 euros.

¿Cuánto vale cada pincel y cada bote?

Si se llama p a lo que cuesta un pincel y b a lo que cuesta un bote:

$$\begin{cases} 2p + 3b = 13 \\ 2p + 7b = 27 \end{cases}$$

Como los coeficientes de p son iguales, para resolver el sistema se restan las ecuaciones para eliminar p:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2p + 3b = 13 \\ \cdot(-1)\ \ 2p + 7b = 25 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} \ \ 2p + 3b = \ \ 13 \\ -2p - 7b = -25 \end{cases} \\ \hline -4b = -12 \end{array}$$

El sistema se reduce a la ecuación: $-4b = -12$

Regla de la reducción

Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, se obtiene un sistema equivalente.

Método de reducción

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

Se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para obtener un sistema equivalente en el que los coeficientes de la x sean iguales:

$$\begin{array}{r} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array} \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 16y = 28 \\ 12x - 15y = \ \ 9 \end{cases}$$

Se restan las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \ \ 12x + 16y = \ \ 28 \\ \ \ 12x - 15y = -9 \end{cases} \\ \hline y = 19 \end{array}$$

Para hallar el valor de x se sustituye el valor de y en cualquiera de las ecuaciones:

$$3x + 4(19) = 7 \Rightarrow x = -23$$

La solución es:

$$x = -23 \qquad y = 19$$

Método de reducción

1.º *Se igualan los coeficientes (salvo el signo) de una incógnita.*

2.º *Se suman o restan las dos ecuaciones, según convenga, para eliminar esa incógnita.*

3.º *Se resuelve la ecuación resultante.*

4.º *Se calcula la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones, o bien aplicando el método de reducción de nuevo para la segunda incógnita.*

PARA PRACTICAR

26 ● Halla el precio del cepillo (c) y del tubo de crema dental (t), sabiendo que:

$$\begin{cases} 3c + t = 7\,€ \\ 6c + 5t = 17\,€ \end{cases}$$

Ejercicio resuelto

27 Aplica la regla de reducción para transformar el siguiente sistema en otro equivalente:

$$\begin{cases} x - 5y = 6 \\ x - 3y = 18 \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 5y = 6 \\ 8y = 24 \end{cases}$$

28 ● Aplica la regla de reducción para transformar cada uno de los siguientes sistemas en otro equivalente:

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5y = 28 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases}$

29 ● Resuelve el siguiente sistema:

a) $\begin{cases} 4x + y = 15 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 4y = 7 \\ x + y = -8 \end{cases}$

30 ● Resuelve el siguiente sistema:

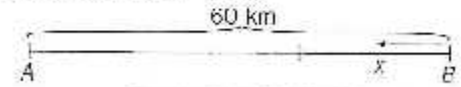
$$\begin{cases} -x - 3 = 3y - 4 \\ 4(x + 3) - y = 2y - 12 \end{cases}$$

PARA APLICAR

Problema resuelto

34 Un ciclista y un peatón parten a la vez de un mismo punto para recorrer un mismo camino. El ciclista lleva una velocidad de 20 km por hora, y el peatón de 5 km por hora. Al recorrer el ciclista 60 km, regresa y encuentra al peatón. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentran?

Ambos parten de A; el ciclista al llegar a B regresa, y se encuentran en un punto.



	e	t	v
ciclista	$60 + x$	t	20
peatón	$60 - x$	t	5

$$\begin{cases} 60 + x = 20t \\ 60 - x = 5t \end{cases} \qquad \text{Si suma: } 120 = 25t \qquad t = 4{,}8$$

$x = 20t - 60 = 20 \cdot 4{,}8 - 60 = 36; \quad 60 - 36 = 24$

Se encuentran a 24 km del punto de partida.

Ejercicio resuelto

31 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$$

Se igualan los coeficientes de x:

$$\begin{cases} 15x - 18y = 3 \\ 15x + 40y = 20 \end{cases}$$

Se resta la primera de la segunda:

$$\begin{cases} -15x + 18y = -3 \\ 15x + 40y = 20 \end{cases} \qquad 58y = 17 \qquad y = \frac{17}{58}$$

Se sustituye el valor de y en una de las ecuaciones del enunciado:

$$5x - 6 \cdot \frac{17}{58} = 1 \rightarrow x = \frac{16}{29}$$

Solución: $x = \frac{16}{29}$ $y = \frac{17}{58}$

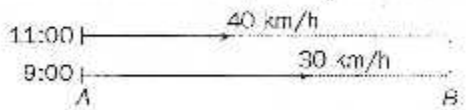
32 ● Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 5y = 40 \end{cases}$

33 ● Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x+2}{3} = -y \\ 7x - 4y = -14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \\ -3(x+1) - y = -10 + y \end{cases}$

35 ● Un tren parte de la estación A a las 9 horas con una velocidad de 30 km por hora, y otro parte dos horas más tarde de la misma estación recorriendo su mismo itinerario con una velocidad de 40 km por hora. Halla la hora del encuentro y la distancia de A a la que se produce.



36 ● Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 60 y cuya altura es 2 unidades mayor que la base.

37 ● Hace 5 años la edad de un padre era 4 veces la de su hijo, pero dentro de 15 años solo seré el doble. Halla las edades de los dos.

38 ● La razón de dos números es $\frac{3}{2}$. Si se les suma 3 a cada uno de ellos, la razón es de $\frac{4}{3}$. ¿De qué números se trata?

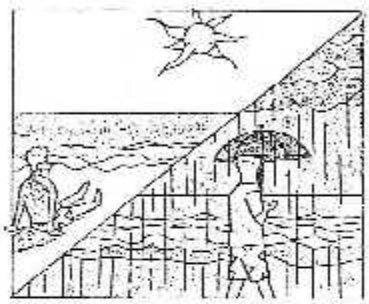
TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Para resolver un problema utilizando sistemas de ecuaciones

- Interpreta el enunciado y elige bien las incógnitas.
- Plantea el sistema de ecuaciones. Puede ser conveniente hacer un esquema.
- Resuelve el sistema.
- Comprueba el resultado.

Problema

Durante las vacaciones de Luis llovió 9 días, y hubo 10 mañanas y 9 tardes soleadas. Cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada. En sus vacaciones estuvo días completos. ¿Cuánto duraron?



Solución

Interpreta el enunciado y elige bien las incógnitas

Ningún día llovió por la mañana y por la tarde; es decir, si un día llovió por la mañana, no lo hizo por la tarde.

Llamamos x al número de días que llovió por la mañana, e y al número de días que llovió por la tarde.

Además, el número de mañanas de sus vacaciones coincidió con el número de tardes.

Plantea el sistema de ecuaciones. Haz un esquema

Se organizan los datos en forma de cuadro:

	Soleadas	Lluviosas	Total
Número de mañanas	10	x	$10 + x$
Número de tardes	9	y	$9 + y$

A partir del cuadro se puede plantear el sistema:

1.º Llovió 9 días: $x + y = 9$

2.º Estuvo de vacaciones el mismo número de días que de tardes: $10 + x = 9 + y$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10 + x = 9 + y \end{cases}$$

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10 + x = 9 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Se suman las ecuaciones: $2x = 8 \rightarrow x = 4$

Se sustituye el valor de x: $4 - y = -1 \rightarrow y = 5$

Por tanto, llovió 4 mañanas y 5 tardes.

Las vacaciones duraron $10 + 4 = 14$ días.

Comprueba el resultado

Número de días de lluvia: $4 + 5 = 9$ días

Número de días de vacaciones: $10 + 4 = 9 + 5 = 14$ días

PARA PRACTICAR

39 Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sacos sobre sus lomos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo:

«¿De qué te quejas? Si te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía.»

¿Cuántos sacos llevaba el caballo? ¿Y el mulo?

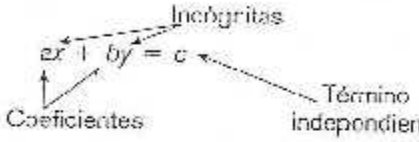
(Problema atribuido a Euclides.)

40 La edad de mi abuelo es un número de dos cifras que coincide con 9 veces la suma de sus cifras. Si se invierte el orden de las cifras de su edad actual, se obtiene la edad que tenía hace 63 años. ¿Cuántos años tiene mi abuelo?

LO MÁS IMPORTANTE

Sistemas de ecuaciones

Ecuaciones con dos incógnitas



Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones, dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -5x + 2y = -7 \end{cases}$$

Soluciones de un sistema. Definición

Solución: Verifica las dos ecuaciones simultáneamente.

Sistemas equivalentes: Tienen las mismas soluciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$, $y = 1$ Solución: $x = 2$, $y = 1$

Soluciones

Compatible

Tiene solución: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Incompatible

No tiene solución: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Método de sustitución

Regla de sustitución

Si se sustituye una incógnita por la expresión que se obtiene al despejarla de otra ecuación se obtiene un sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7y = 16 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Método de sustitución

1.º Se despeja una incógnita en una ecuación: $\begin{cases} 3x + y = -6 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y = -6 \\ y = 4 + 2x \end{cases}$

2.º Se sustituye en la otra ecuación: $\begin{cases} 3x - 4 + 2x = -6 \\ y = 4 + 2x \end{cases}$

3.º Se resuelve la ecuación: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 + 2x \end{cases}$

4.º Se sustituye el valor obtenido: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 + 2(-2) \end{cases}$ Solución: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Método de reducción

Regla de reducción

Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta la otra ecuación, se obtiene otro sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -2x - 7y = -25 \\ \hline -4y = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -4y = -12 \end{cases}$$

Método de reducción

1.º Se igualan los coeficientes: $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 12x + 16y = 28 \\ 12x + 15y = 9 \end{cases}$

2.º Se restan (o suman) las ecuaciones:

$$16y - 15y = 28 - 9$$

3.º Se resuelve la ecuación:

$$y = 19$$

4.º Se calcula la otra incógnita: $\begin{cases} 3x + 4(19) = 7 \\ x = -23 \end{cases}$ Solución: $\begin{cases} x = -23 \\ y = 19 \end{cases}$

ACTIVIDADES DE SÍNTESIS

PARA PRACTICAR

41 Sabiendo que $12x + 8y = 32$, completa:

a) $6x + 4y =$? b) $1{,}5x +$? $y = 4$

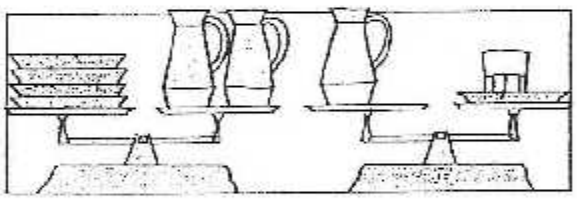
42 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 8 = 2y \end{cases}$

43 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} y - 3x = -8 \\ y = 5x = -y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x = 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

44 Las dos balanzas están en equilibrio. ¿Cuántos vasos se necesitan para equilibrar una jarra? ¿Cuántos vasos se necesitan para equilibrar un plato?



45 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 3(x + 5) = 4y - 8 \\ -x - 15 = 2x - 2(y - 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x - 18 = 4(x + 3y) + 4 \\ 12(x - y) + 9 = 4 \end{cases}$

46 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2(x + 1) = \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{3x}{2} + y = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 3}{-2} \\ -3x - 4y = 6 \end{cases}$

47 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x - 1}{6} = \dfrac{-5y - 2}{5} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{5} \end{cases}$

PARA APLICAR

48 Las edades de un padre y de su hijo suman 78 años, y la edad del padre es el doble de la edad del hijo. Halla la edad de cada uno.

49 Halla tres números consecutivos cuya suma sea 324.

50 El precio de 8 bolígrafos y 10 cuadernos es de 16 euros. ¿Cuánto cuestan las siguientes compras?

a) 4 bolígrafos y 5 cuadernos.

b) 16 bolígrafos y 20 cuadernos.

c) 12 bolígrafos y 15 cuadernos.

51 Una camisa me ha costado 24 euros. Solo tengo monedas de 2 euros y billetes de 5 euros, y el vendedor no tiene cambio. ¿De cuántas maneras puedo pagarla?

52 Halla las edades de una madre y de su hijo, sabiendo que la edad de la madre es el triple de la edad del hijo, y que si la madre tuviera 30 años menos y el hijo 6 más, las dos tendrían la misma edad.

53 Se tiene una cantidad de dinero en monedas de 1 €. Si se cambia a monedas de 2 € se tiene la misma cantidad en 12 monedas menos. ¿Cuánto dinero hay?

54 Las dos cifras de un número suman 9. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 9. ¿Qué número es?

55 Se quiere distribuir un lote de libros entre varias personas. Si a cada una se le dan 3, sobran 17 libros, y si a cada una se le asignan 4, faltan 8 libros. ¿Cuántas personas y cuántos libros hay?

DE REFUERZO

Sistema de ecuaciones

56 El precio de 2 llaveros y 3 linternas es de 19 euros, y el precio de 3 llaveros y 4 linternas es de 26 euros. Halla cuánto cuestan 5 llaveros y 7 linternas.

57 Encuentra cuatro soluciones de la ecuación

$$2x + 3y = 5$$

58 Di si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

59 He pagado por una bolsa de naranjas y otra de patatas 6 euros. Mi prima ha pagado por una bolsa de naranjas y 3 bolsas de patatas, todas ellas idénticas a la mía, 9 euros. Se quiere saber cuánto cuesta cada bolsa. Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y resuélvelo mediante tablas.

Método de sustitución

60 Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = -4 \\ 4x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$

61 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ 2x + y = \dfrac{9}{10} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3 = x + y \\ x + 2y = -2y + 1 \end{cases}$

62 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3(x - 2) = 2(x + y) \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 1 = 2x + 2(y - 2) \\ 3(x + y) = 2(y + 4) \end{cases}$

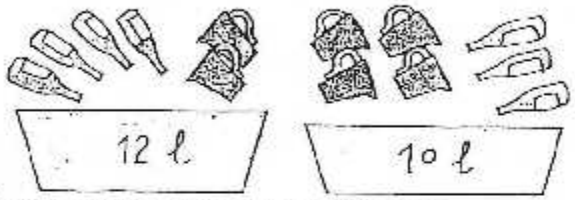
63 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 4}{2} \\ \dfrac{3x - 3}{2} = \dfrac{-5y - 20}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{23}{12} \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{7y}{3} = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Método de reducción

64 He vaciado en los dos depósitos jarras y botellas llenas de agua. ¿Cuántos litros tenía cada jarra y cuántos cada botella?



65 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + 9y = 75 \\ 4x + 3y = 33 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

66 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$

67 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = x + 1 \\ 3x + 5y = -7 - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - 2y) = 1 \\ 2(4 - x) = 3(4y - 2) \end{cases}$

68 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - x - 1 = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{3x}{2} + 4y - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - \dfrac{x}{3} = y - \dfrac{3}{5} \\ 5(x - 2) = y - 3 \end{cases}$

Planteamiento y resolución de problemas

69 Entre Olga y Luis tienen 52 libros, pero Olga tiene 4 libros más que Luis. ¿Cuántos libros tiene cada uno?

70 En el patio del instituto hay el doble de estudiantes que en el gimnasio, pero 9 de estos últimos han salido al patio, y ahora en el patio hay cinco veces el número de alumnos de los que permanecen en el gimnasio. ¿Cuántos estudiantes había al principio en cada sitio?

71 Con 74 euros puedo comprar exactamente, o bien 12 entradas de cine y 2 de teatro, o 5 entradas de cine y 7 de teatro. ¿Cuánto cuesta la entrada de cine y cuánto la entrada de teatro?

72 Con 24 euros hemos podido comprar un libro y dos CD. Si nos hacen una rebaja de 3 euros por cada libro y 2 euros por cada CD podemos comprar un CD más. ¿Cuánto cuesta cada producto?

ACTIVIDADES

DE AMPLIACIÓN

73 Pedro dice a Juan: «Yo tengo dos veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será 63 años». Halla la edad de cada uno.

74 La suma de las dos cifras de un número es 11. Si lo invertimos, el número obtenido excede en 5 unidades al triple del número dado. ¿Qué número es?

75 El producto de dos números es 15,7125. Si el menor de ellos aumenta en 2,8, el producto aumenta en 11,732. ¿De qué números se trata?

76 Una aleación contiene 270 g de oro y 30 g de cobre, y otra, 200 g de oro y 50 g de cobre. ¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una para formar 400 g de 825 milésimas de ley?

77 La ley de una aleación es la proporción de peso de elementos: oro, plata, etc., en una aleación metálica.

Una aleación de oro de 900 milésimas contiene 900 gramos de oro de cada 1 000 gramos.

Se tienen dos lingotes de plata: el primero de 920 milésimas de ley, el segundo de 780 milésimas. ¿Cuántos kilogramos hay que tomar de cada uno para formar otro lingote que pese 14 kg y su ley sea de 900 milésimas?

78 Hace unos años, la razón entre el número de habitantes de dos ciudades era $\frac{7}{9}$. En la actualidad, habiendo emigrado 15 000 personas de la primera ciudad y 25 000 personas de la segunda, la razón entre sus poblaciones es $\frac{11}{13}$. ¿Cuántos habitantes tiene cada una de ellas en la actualidad?

AUTOEVALUACIÓN

1 En las ecuaciones con dos incógnitas

$$3x + y = 3 \quad y \quad 6x + 4y = 6$$

x e y representan los mismos valores. Completa:

a) $3x + 2y =$? c) $6x + 2y =$?

b) $9x + 5y =$? d) $y =$?

2 Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 25 \\ x + 2y = 25 \end{cases}$$

estudia si son soluciones del mismo:

a) $x = 0, \quad y = 9$ c) $x = 3, \quad y = -1$

b) $x = 8, \quad y = 9$ d) $x = 7, \quad y = 11$

3 Comprueba mediante los cálculos oportunos que $x = 2$, $y = -1$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

4 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ 2x + 4y = -5 \end{cases}$$

5 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2 \\ x - 4y = 13 \end{cases}$$

6 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3(x - 6) = 2y + 10 \\ 3(x - 10) = y - 2x + 5 \end{cases}$$

7 La diferencia de dos números es $\frac{1}{6}$. El triplo del mayor menos el duplo del menor es 1. Halla dichos números.

8 Descompón el número 31 en dos sumandos tales que al dividir uno entre el otro el cociente sea 3 y el resto 1.

9 Un grupo de 15 alumnos se está repartiendo los bolígrafos de un paquete a partes iguales, pero llega una persona más, con lo que tocan a 1 menos y sobra un bolígrafo. ¿Cuántos bolígrafos hay?

Viaje matemático

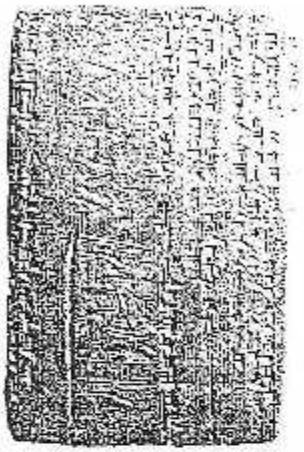
¡Qué tablas tenían los babilonios!

A principios del siglo XX se realizaron diversas excavaciones en Babilonia, en las que se descubrieron miles de tabletas de arcilla que muestran el importante desarrollo científico de esta civilización.

A las incógnitas las llamaban *longitud, anchura, área o volumen*, aunque no tuvieran relación alguna con problemas de medida. En un ejemplo tomado de una de esas tablillas se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\text{ anchura} + \text{longitud} &= 5 \text{ manos} \\ \text{longitud} + \text{anchura} &= 10 \text{ manos} \end{aligned}$$

Para resolverlo, asignan el valor 5 a una mano. ¿Sabrías hallar la solución en este caso?



En todas partes y en cualquier época

La civilización china es mucho más antigua que las de Grecia y Roma. Aunque es muy difícil fechar con exactitud documentos matemáticos chinos. Hay un tratado, *Nueve capítulos sobre el arte matemático*, que se sitúa alrededor del año 250 a.C. y que ejerció una gran influencia en la época. En este libro hay 246 problemas sobre agrimensura, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones, etc. Parece además que los orígenes de la matemática china y los de la occidental son independientes, es decir, que en distintas partes del mundo había personas resolviendo ecuaciones.



DALE AL COCO

¿Cuántos somos?

Yo tengo tantas hermanas como hermanos, pero mi hermana tiene la mitad de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos somos?

DALE AL COCO

Perlas y princesas

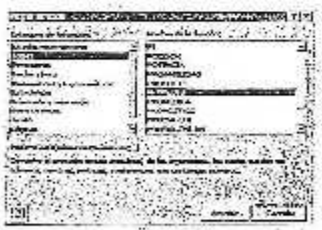


Un día, un rajá dejó en herencia cierto número de perlas que había que repartir entre sus hijas de la siguiente manera: La primera, una perla y un séptimo de las restantes; la segunda, dos perlas y un séptimo de las restantes; la tercera, tres perlas y un séptimo de las restantes, y así todas ellas.

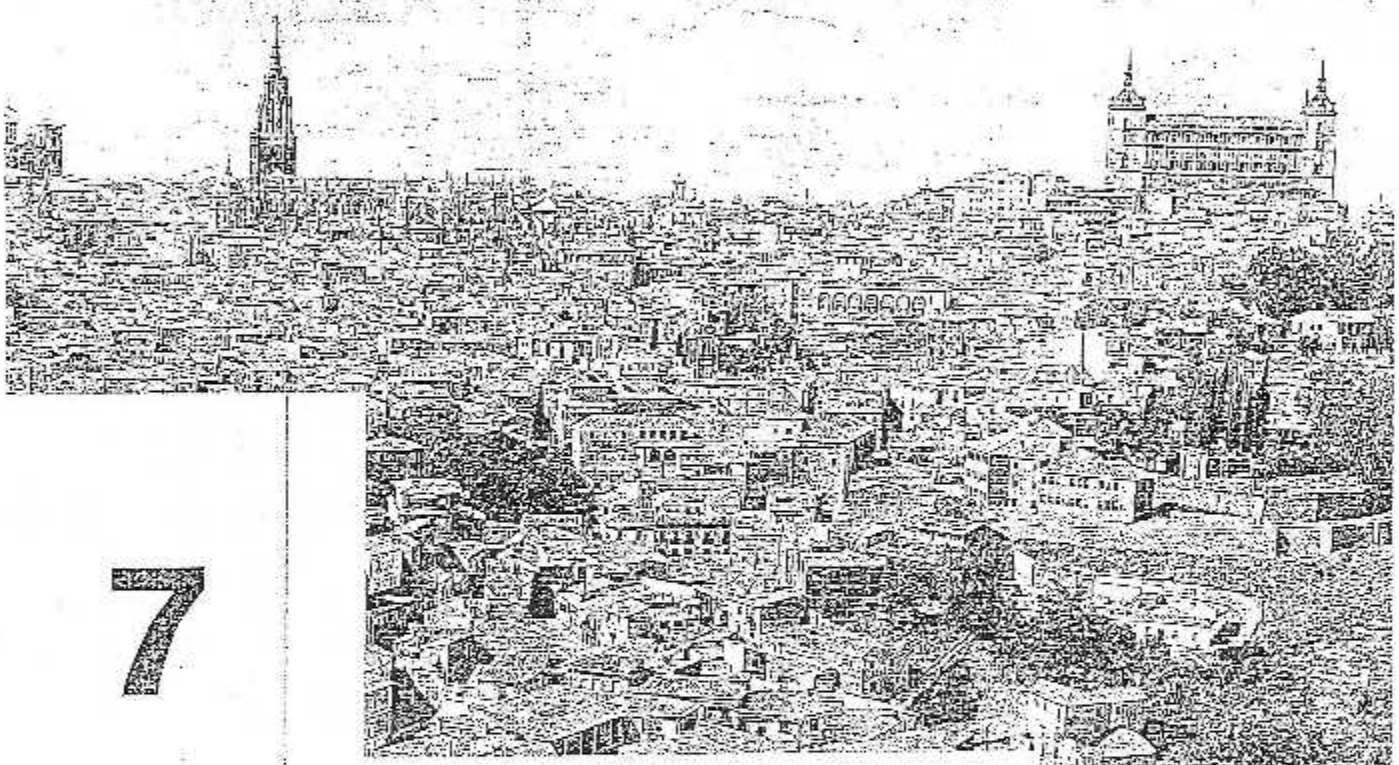
Pero todas se sintieron perjudicadas y acudieron a un juez, que después de contar las perlas aseguró que todas se llevarían las mismas. ¿Cuántas perlas y princesas hay?

EN EL ORDENADOR

Fórmulas matemáticas en Excel



La hoja de cálculo Excel tiene un asistente para fórmulas que se utiliza para operar con funciones. Cuando se escribe el signo igual en una celda aparece en la barra de herramientas un cuadro desplegable en el que podemos seleccionar la función que queremos seleccionar. Esta ventana también aparece si hacemos clic en el botón *Pegar función* de la barra de herramientas.



7

Ecuaciones de segundo grado



La Escuela de Traductores de Toledo, creada en el siglo XII, colaboró de manera notoria en la transmisión a Occidente del importante legado científico griego y del mundo oriental. En esta escuela se tradujeron tratados científicos de gran valor, como una obra del matemático árabe Al-Jwarizmi, en donde aparece resuelta la ecuación de segundo grado.

En esta unidad aprenderás

- Qué son las ecuaciones de segundo grado.
- La resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Cómo averiguar si las ecuaciones de segundo grado tienen o no soluciones sin necesidad de resolverlas.
- La factorización de una ecuación conociendo sus soluciones.

ACTIVIDADES

unidad 3

PARA PRACTICAR

1 ● Expresa como potencia única positiva las siguientes expresiones.

a) 3^{-4}

b) $\frac{1}{5^{-3}}$

c) $5^2 \cdot 5^{-9}$

d) $4^{-1} : 4^3$

2 ● Expresa como potencia única negativa las siguientes expresiones:

a) 5^2

b) $\frac{1}{2^7}$

c) $2^{-3} \cdot 2^4$

d) $3^{-1} : 3^{-2}$

3 ● Expresa como potencia única las expresiones:

a) $7^5 \cdot 7^3$

b) $8^5 : 8^2$

c) $10^5 : 5^5$

d) $7^5 : 7^2$

4 ● Expresa como potencia única las expresiones:

a) $6^5 \cdot 6^{-3}$

b) $8^{-5} : 8^{-7}$

c) $10^{-3} \cdot 5^{-3}$

d) $5^3 \cdot 2^3$

5 ● Expresa las siguientes fracciones en forma potencial:

a) $\frac{1}{7^4}$

b) $\frac{2}{9^{-3}}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{7^{-1}}{5^{-1}}$

6 ● Escribe en notación científica los números:

a) 0,0004 · 10^8

b) 0,0000012 · 200

c) 7 000 000 000

d) 123 000 000 000 000

7 ● Indica el orden de magnitud de los siguientes números, que dan el resultado de algunas medidas:

a) $2{,}11 \cdot 10^{-12}$

b) $3{,}16 \cdot 10^{-18}$

c) $2{,}34 \cdot 10^{24}$

d) $7{,}33 \cdot 10^{42}$

Ejercicio resuelto

8 Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $(3{,}75 \cdot 10^{-10}) \cdot (2{,}8 \cdot 10^{18})$

b) $(4{,}35 \cdot 10^{12}) : (1{,}25 \cdot 10^{7})$

a) $(3{,}75 \cdot 10^{-10}) \cdot (2{,}8 \cdot 10^{18}) = (3{,}75 \cdot 2{,}8) \cdot 10^{-10+18} =$
$= 10{,}5 \cdot 10^{8}$

b) $(4{,}35 \cdot 10^{12}) : (1{,}25 \cdot 10^{7}) = (4{,}35 : 1{,}25) \cdot 10^{12-7} =$
$= 3{,}48 \cdot 10^{5}$

9 ● Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $(5{,}23 \cdot 10^{12}) \cdot (6{,}8 \cdot 10^{12})$

b) $(3{,}312 \cdot 10^{-4}) : (4{,}6 \cdot 10^{-14})$

PARA APLICAR

10 ● Un cubo tiene 4 cm de lado. Expresa su volumen como potencia y luego calcula su valor.

Problema resuelto

11 Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. ¿Cuántos kilómetros recorre la luz en un año? Exprésalo en notación científica.

La luz recorre 300 000 km en un segundo.

En un año recorre:

$$3 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right) \cdot 60 \left(\frac{\text{s}}{\text{min}}\right) \cdot 60 \left(\frac{\text{min}}{\text{h}}\right) \cdot 24 \left(\frac{\text{h}}{\text{día}}\right) \cdot 365 \left(\frac{\text{día}}{\text{año}}\right) =$$
$$= 94\,608 \cdot 10^8 = 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km/año}$$

12 ● Indica el orden de magnitud de las siguientes medidas:

a) Masa de la Luna: $7{,}34 \cdot 10^{25}$ kg

b) Tamaño del virus de la gripe: $0{,}12 \cdot 10^{-6}$ m

c) Año luz: $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

d) Radio del átomo del carbono: $0{,}091 \cdot 10^{-9}$ m

13 ● La distancia de la Tierra al Sol es de unos 150 millones de kilómetros, y la distancia de la Tierra a la Luna de unos 400 000 kilómetros.

a) Expresa estas medidas en notación científica.

b) Utiliza los resultados del apartado a para hallar cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que la distancia de la Tierra a la Luna.



14 ◆ Se tiran dos monedas sucesivamente y se anota C, si ha salido cara, y X, si ha salido cruz.

Escribe el número de resultados posibles. ¿Se puede escribir como potencia de 2? Y si se tiran tres monedas, ¿el número de resultados sigue siendo potencia de 2? ¿Y si son cuatro monedas?

2 Raíz de un número

Raíces. Su número

¿Qué número multiplicado por sí mismo da 49?

Los números son 7 y −7. Se llaman raíces cuadradas.

Observa que, si el radicando es 0, solo tiene una raíz cuadrada.

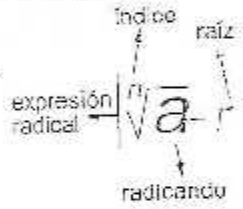
¿Qué número multiplicado por sí mismo tres veces da 125?

El número es 5. Se llama raíz cúbica y se designa por $\sqrt[3]{125} = 5$.

El número −5 no es raíz, ya que $(-5)^3 = -125$.

De la misma forma, 3 es la raíz cuarta de 81, porque $3^4 = 81$. Se escribe $\sqrt[4]{81} = 3$. Del mismo modo se pueden hallar raíces de cualquier orden.

EXPRESIONES RADICALES



$\sqrt[n]{a} = r$ *si se verifica que* $r^n = a$, *siendo* $n > 1$ *un número natural.*

En la expresión $\sqrt[n]{a} = r$, n *es el índice de la raíz,* a *el radicando y* r *la raíz.*

¿Qué número multiplicado por sí mismo da −16?

Si el número es positivo, su cuadrado es también positivo, por lo que no puede ser; si es negativo, su cuadrado sería positivo, y tampoco puede ser. Luego −16, al ser negativo, no tiene raíz cuadrada.

El número de raíces de un número es:

- *Dos, si el índice es par y el radicando positivo.*
  La raíz positiva se escribe $\sqrt{25} = 5$, *y la negativa,* $-\sqrt{25} = -5$.
- *Una, si el índice es impar o, también, si el radicando es 0.*
- *Ninguna, si el índice es par y el radicando negativo.*

Radicales equivalentes

Los radicales $\sqrt{10}$, $\sqrt[4]{10^2}$, $\sqrt[6]{10^3}$, $\sqrt[8]{10^4}$, ... son equivalentes. Para comprobarlo, observa que si se llama r a la raíz de 10, $\sqrt{10} = r$, se tiene que $r^2 = 10$

- De $r^2 = 10$, elevando al cuadrado, $r^4 = 10^2$, de donde: $\sqrt[4]{10^2} = r$
- De $r^2 = 10$, elevando al cubo, $r^6 = 10^3$, de donde: $\sqrt[6]{10^3} = r$

Cuidado con los signos

$\sqrt[5]{(-8)^5} = -32$

$\sqrt[5]{(-8)^{10}} = 32$

Por tanto, multiplicando el índice y el exponente por el mismo número, 2, 3, 4, ..., se obtiene otro radical equivalente al dado.

Si se multiplica o divide el índice y el exponente de un radical por un mismo número distinto de 0, la raíz no varía si se conserva además el signo.

Mediante radicales equivalentes se simplifican radicales y se reducen a índice común:

Simplificar radicales	Reducir radicales a índice común
$\sqrt[10]{5^5} = \sqrt[10:2]{5^{5:5}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$ $\sqrt[21]{6^{14}} = \sqrt[21:7]{6^{14:7}} = \sqrt[3]{6^2}$ Para simplificar un radical se divide el índice y el exponente del radical por el m.c.d. de ambos.	$\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5^4}$ El índice común buscado es el m.c.m. de los índices (m.c.m. (4, 6) = 12). $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot3]{3^{1\cdot3}} = \sqrt[12]{3^3}$ $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6\cdot2]{5^{4\cdot2}} = \sqrt[12]{5^8}$

ACTIVIDADES

PARA PRACTICAR

15 ● Sin utilizar la calculadora, halla las raíces cuadradas de:

a) $\frac{1}{49}$ b) $\frac{25}{100}$ c) 0,09

16 ● Sin utilizar la calculadora, halla las raíces cúbicas de:

a) 125 b) -27 c) $\frac{1}{64}$

17 ● Sin utilizar la calculadora, halla las raíces de:

a) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt[5]{-243}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[4]{-16}$

Ejercicio resuelto

18 Calcula las siguientes raíces, sin utilizar la calculadora, dando el resultado en forma potencial.

a) $\sqrt{3^6}$

b) $\sqrt[3]{5^{12}}$

c) $\sqrt[6]{2^6}$

a) $\sqrt{3^4} = \sqrt{3^{4\cdot 2}} = \sqrt{(3^2)^2} = 3^4$

b) $\sqrt[3]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^{3\cdot 4}} = \sqrt[3]{(5^3)^4} = 5^4$

c) $\sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{2^{2\cdot 3}} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2$

19 ● Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números sin utilizar la calculadora, dando el resultado en forma potencial:

a) 12^8 b) 25^6 c) 47^{16}

20 ● Calcula, sin utilizar la calculadora, las raíces cúbicas de los siguientes números dando el resultado en forma potencial

a) 15^6 c) 11^{12}

b) 25^3 d) 1^9

21 ◐ Indica si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades de radicales:

a) $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3^1}$ c) $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[8]{3^2} = \sqrt[4]{3^1}$ d) $\sqrt[8]{3^2} = \sqrt[4]{3}$

22 ◐ Expresa 2, 3, 4 y 5 en forma de raíces cuadradas y luego en forma de raíces cúbicas.

23 ◐ Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{2^6}$ c) $\sqrt[4]{5^8}$

b) $\sqrt[12]{4^6}$ d) $\sqrt[6]{27}$

24 ◐ Reduce los siguientes radicales a común índice:

a) $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{10^2}$, $\sqrt[6]{10^3}$

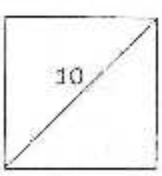
b) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$

PARA APLICAR

25 ◐ Se quiere construir un depósito de agua en forma cúbica. El volumen máximo debe ser de 27 000 litros. ¿Cuántos metros de lado tiene el cubo?

26 ◐ La superficie de una rotonda de circulación es 1 256 m². Si se toma como $\pi = 3{,}14$, ¿cuánto mide el radio de la rotonda?

27 ◐ La diagonal de un cuadrado mide 10 cm. ¿Cuál es su área?



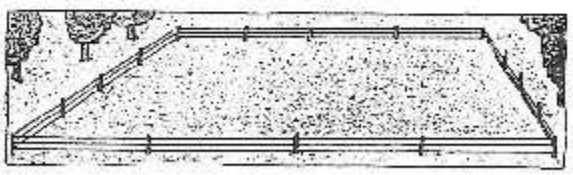
28 ◐ El año 1728 es un cubo; ¿podrías decir de qué número sin hacer cálculo? Expresa tu proceso mental.

29 ◐ Calcula la arista de los siguientes cubos:

a) El área de sus caras es 54 cm².

b) El volumen es 125 cm³.

30 ◐ Se quiere cercar una finca cuadrada de 2 500 m² de superficie. Si la cerca tiene tres vueltas de alambre, ¿cuántos metros se necesitan?



31 ◐ Averigua el perímetro de un rombo si las diagonales miden 12 cm y 15 cm.

32 ◐ Tenemos un recipiente en forma de prisma de base cuadrada cuya capacidad es de un litro. Sabemos que su altura es de 40 cm. ¿Cuál es el lado de la base?

3 Potencias de exponente fraccionario

RAÍCES EN LA CALCULADORA

$\sqrt{16}$

16 $\sqrt{\ }$

4

$\sqrt[5]{32}$

32 $x^{1/y}$ 5 =

2

En algunas calculadoras en lugar de la tecla $x^{\frac{1}{y}}$ aparece la tecla $\sqrt[y]{x}$

Relación entre potencias fraccionarias y radicales

¿Qué significa la potencia $\frac{1}{2}$? ¿Y la potencia $\frac{1}{3}$? Para descubrirlo, se parte de las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{r}(16)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4 \Rightarrow (16)^{\frac{1}{2}} = 4 \\ 4 \cdot 4 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4\end{array}\right\} \quad (16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$$

$$\left.\begin{array}{r}(5^5)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{3}} = 5^? \Rightarrow (5^5)^{\frac{1}{3}} = 5^? \\ \sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^{3+2}} = 5^? \Rightarrow \sqrt[3]{5^5} = 5^?\end{array}\right\} \quad 5^{\frac{5}{3}} = (5^5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^5}$$

Los resultados anteriores sugieren una relación entre las potencias de exponente fraccionario y las raíces.

Una potencia fraccionaria es igual a un radical que tiene, por

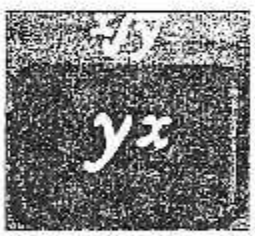
- *índice, el denominador de la fracción; y, por*
- *radicando, la base elevada al numerador.*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

De la misma forma podemos expresar una raíz como potencia fraccionaria.

$$\sqrt[5]{17^2} = 17^{\frac{2}{5}}, \qquad \sqrt[3]{90^4} = 90^{\frac{4}{3}}, \qquad \sqrt{8^3} = 8^{\frac{3}{2}}$$

Propiedades de las raíces y potencias



Las potencias de exponente fraccionario tienen las mismas propiedades que las de exponente entero.

Producto de potencias con el mismo exponente	Producto de raíces con el mismo índice
$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 21^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \cdot b}$ $\quad \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$
Cociente de potencias con el mismo exponente	**Cociente de raíces con el mismo índice**
$a^p : b^p = (a : b)^p$ $\quad \frac{5^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[q]{a} : \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a : b}$ $\quad \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

Producto de potencias con la misma base
$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = 7^{\frac{9}{10}}$
Cociente de potencias con la misma base
$a^p : a^r = a^{p-r}$ $\quad 8^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = 8^{\frac{1}{10}}$

Potencia de una potencia	Potencia de una raíz
$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$ $\quad (5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 5^{\frac{4}{2}}$	$(\sqrt[q]{a})^r = \sqrt[q]{a^r}$ $\quad (\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5^4}$
	Raíz de una raíz
	$\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[q \cdot r]{a}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

PARA PRACTICAR

33 Expresa las siguientes potencias de exponente fraccionario como raíces:

a) $8^{\frac{2}{5}}$ c) $32^{\frac{5}{3}}$

b) $27^{\frac{1}{3}}$ d) $81^{\frac{3}{4}}$

34 Expresa las siguientes raíces como potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{5^4}$ c) $\sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt[4]{7^2}$ d) $\sqrt[3]{2^{25}}$

Ejercicio resuelto

35 Calcula:

a) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[4]{4} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{2}$

a) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[4]{4} : \sqrt{2} = \sqrt[12]{8 : 4 : 2} = \sqrt[12]{1} = 1$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} =$

$= \sqrt[6]{7^2} \cdot 4^2 \cdot 2 = \sqrt[6]{224}$

36 Calcula:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$ c) $\sqrt{6} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} : \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{2}$

37 Calcula y expresa el resultado en forma de raíz:

a) $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{5}}$ c) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} : 2^{\frac{1}{5}}$

b) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$ d) $7^2 \cdot 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{5}}$

38 Calcula:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^5}}$ b) $(5^{\frac{2}{3}})^3$

39 Calcula:

a) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{7}$ c) $\sqrt[3]{6} : 2^{\frac{1}{5}}$

b) $2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{5}$ d) $4^{\frac{2}{5}} : \sqrt[3]{8}$

40 Expresa las bases de la potencia en forma de potencia y calcula los resultados:

a) $625^{\frac{1}{4}}$ b) $729^{\frac{1}{6}}$

Ejercicio resuelto

41 Calcula: $\left(\frac{64}{243}\right)^{-\frac{4}{3}}$

$\left(\frac{64}{243}\right)^{-\frac{4}{3}} - \left(\frac{2^6}{7^3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{2^{6\left(-\frac{4}{3}\right)}}{7^{3\left(-\frac{4}{3}\right)}} = \frac{2^{-8}}{7^{-4}} = \frac{7^4}{2^8}$

42 Calcula:

a) $\frac{3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3}}$ b) $5^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{5^3}$

43 Calcula:

a) $\sqrt{\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{-2}}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{2^{-2}}{16^2}}$

PARA APLICAR

44 En una plaza se han empleado 12^4 baldosas enteras. ¿Puede ser cuadrada la plaza? Si es así, ¿cuántas entran por lado?

45 Se sabe que en algunos animales el área de la superficie es casi proporcional a la masa corporal elevada a $\frac{2}{3}$. Tal sucede en una especie de salamandra. ¿A qué números serán proporcionales las superficies de las salamandras que pesan 1 000 g, 512 g y 216 g?



46 La fórmula que da el período de revolución de un satélite artificial es $T = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{R_0 \sqrt{g}}$. Calcula el período de revolución, T, de un satélite artificial cuyo radio de giro es $R = 4{,}22 \cdot 10^7$ m. (Radio de la Tierra: $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, y la gravedad de la Tierra: $g = 9{,}8$ m/s^2.) La respuesta obtenida está dada en segundos.

47 El volumen de un cubo es 1 000 m^3. Se sabe que se puede pasar directamente del volumen al área de una cara utilizando una potencia de exponente fraccionario. ¿Cuál es? Aplícalo al volumen del cubo dado.

48 Se tienen 2^9 pequeños cubos de 1 cm de lado con ellos se quiere formar un gran cubo. ¿Cuál sería la altura de dicho cubo?

4 Operaciones con radicales y potencias. Ordenación

Operaciones con radicales y potencias

■ Extracción de factores

Siempre que el exponente del radicando sea mayor que el índice de la raíz, se puede extraer factores de la siguiente forma:

$$\sqrt[4]{2^6 \cdot 7^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot 7^3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} = 2\sqrt[4]{2^2 \cdot 7^3}$$

Si el exponente del radicando es menor que el índice de la raíz, hay que descomponer en factores el radicando:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{44} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$$

Para extraer factores de radicales:

- *Se descomponen en factores los números que aparecen en el radicando.*
- *Se buscan potencias con el mismo exponente que el índice de la raíz.*

■ Suma de radicales

Se pueden sumar radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando de la siguiente forma:

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = (2 - 3 + 11)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

Los radicales con el mismo índice y el mismo radicando se suman sacando factor común.

OBSERVA

En general no se pueden sumar radicales con distinto índice o radicando

$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$

$4 + 3 \neq 5$

A veces se pueden sumar radicales con distinto índice, por ejemplo:

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Ordenación de potencias y radicales

– Ordena las potencias siguientes en orden creciente: $7^{\frac{1}{4}}$, $7^{\frac{1}{6}}$ y $7^{\frac{2}{3}}$

Se expresan con el mismo denominador $7^{\frac{3}{12}}$, $7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{12}}$, $7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{8}{12}}$.

Como tienen la misma base, es menor, la que tiene menor exponente.

Por tanto, en orden creciente son: $7^{\frac{1}{6}}$, $7^{\frac{1}{4}}$, $7^{\frac{2}{3}}$

– Ordena las siguientes expresiones: $9^{\frac{1}{2}}$, $6^{\frac{1}{2}}$, $12^{\frac{1}{2}}$

Puesto que las tres potencias tienen el mismo exponente, es menor la que tiene menor base. Por tanto, el orden creciente es $6^{\frac{1}{2}}$, $9^{\frac{1}{2}}$, $12^{\frac{1}{2}}$.

– Ordena las siguientes expresiones: $8^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{5}$, $3^{\frac{2}{3}}$

Si hay radicales y potencias con distinta base y distinto exponente se expresan todas con el mismo exponente para ordenarlas como el ejemplo anterior.

1.º Se expresan las raíces como potencia fraccionaria: $8^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{2}{3}}$

2.º Se escriben los exponentes con el mismo denominador: $8^{\frac{3}{12}}$, $5^{\frac{6}{12}}$, $3^{\frac{8}{12}}$

3.º Se introduce el numerador como exponente en la base: $(8^3)^{\frac{1}{12}}$, $(5^6)^{\frac{1}{12}}$, $(3^8)^{\frac{1}{12}}$

Se resuelven y queda: $(8^3)^{\frac{1}{12}} = (512)^{\frac{1}{12}}$, $(5^6)^{\frac{1}{12}} = (15\,625)^{\frac{1}{12}}$, $(3^8)^{\frac{1}{12}} = (6\,561)^{\frac{1}{12}}$.

Como tienen el mismo exponente, en orden creciente son: $\sqrt{5}$, $3^{\frac{2}{3}}$, $8^{\frac{1}{4}}$

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

19 ¿Cómo se puede extraer la raíz séptima de 1 280 000 000?

$\sqrt[7]{1\,280\,000\,000} = \sqrt[7]{2^8 \cdot 5^8} = \sqrt[7]{(2^7)^1 \cdot 5^7} =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

50 El número 46 656 es igual al cubo de 36. Calcula la raíz sexta de dicho número y explica cómo lo haces. ¿Puedes indicar otra forma distinta de hacerlo?

51 ¿Son iguales los números $\frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\frac{2\sqrt{5}}{5}$? Razona tu contestación.

52 Expresa como producto de un número entero y un radical los siguientes radicales:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt[3]{54}$

53 Extrae factores de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{36\,000}$ c) $\sqrt[3]{81 \cdot x^{10} \cdot y^5 \cdot z}$

b) $\sqrt{a^4 \cdot b^7 \cdot c^5}$ d) $\sqrt{\frac{625 \cdot a \cdot b^7}{a^5 \cdot b^3}}$

54 Suma los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{50} + 4\sqrt{27}$

b) $3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} \quad 7\sqrt[3]{250}$

55 Calcula:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{45} - \frac{5}{6}\sqrt{20}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{162} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{1\,250}$

Ejercicio resuelto

56 Suma los siguientes radicales:

$\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{4}{3}}$

$\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2^2}{3}} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{15}\sqrt{\frac{1}{3}}$

57 Suma los siguientes radicales:

$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{28}{25}} - \frac{1}{3}\sqrt{343} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{63}{4}}$

58 Ordena las siguientes potencias:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ $3^{\frac{2}{3}}$ $3^{\frac{2}{4}}$

b) $5^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{3}$ $4^{\frac{2}{3}}$

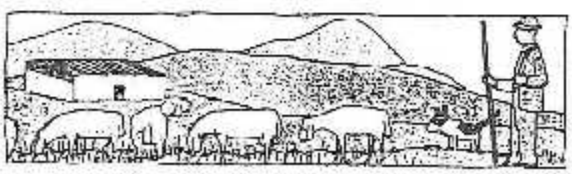
c) $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt{5^2}$ $7^{\frac{3}{4}}$

d) $\sqrt[3]{3}$ $\sqrt{5^3}$ $7^{\frac{3}{6}}$

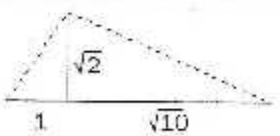
PARA APLICAR

59 ¿Cuánto suman las diagonales de un cuadrado de lado 1 cm?

60 Un pastor quiere hacer un aprisco de planta cuadrada en un monte. Pide presupuesto para cercarlo. Viendo que es aceptable el presupuesto, decide duplicar los lados de la planta. ¿Será el doble el presupuesto? ¿Por qué? ¿Será beneficiosa su decisión?



61 ¿Cuánto mide la línea discontinua de la figura?



62 Dibuja en tu cuaderno dos cuadrículas, una de 3 × 3 y otra de 4 × 4. ¿La suma del número de cuadraditos formados será igual a los de otra cuadrícula de 7 × 7? ¿Es cierta la relación entre potencias $3^2 + 4^2 = (3 + 4)^2$?

63 Se han hecho dos depósitos de agua en forma cúbica. Uno de ellos tiene la arista el doble que el otro. ¿Cuántas veces mayor que el cubo pequeño es el cubo grande?

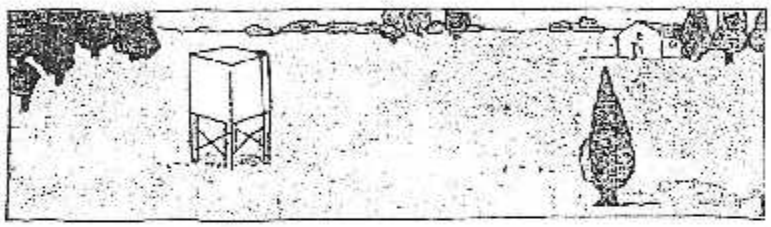
TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Para aproximar raíces de números

- Busca un número mayor y otro menor.
- Encuentra un valor intermedio entre ambos y averigua en qué intervalo se encuentra el número.
- Repite el proceso hasta la aproximación deseada.

Problema

Una finca tiene un depósito de 90 m^3 de agua. Halla las primeras aproximaciones del lado si se sabe que es un cubo.



Solución

Busca un número mayor y otro menor

¿Es 4? Su cubo es 64, que es menor que 90.

¿Es 5? Su cubo es 125, que es mayor que 90.

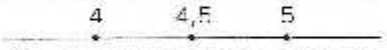


Con esto ya se sabe que la medida de la arista del depósito está entre los valores 4 y 5.

Encuentra un valor intermedio entre ambos y averigua en qué intervalo se encuentra el número

El valor medio entre 4 y 5 es 4,5: el número buscado estará en el intervalo de 4 a 4,5 o de 4,5 a 5.

¿Es 4,5? Su cubo es 91,125, que es mayor que 90.

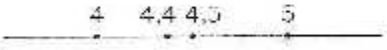


Ahora se puede afirmar que la medida de la arista está entre 4 y 4,5, pero muy próximo a 4,5, ya que 91,125 es buena aproximación por exceso de 90.

Repite el proceso hasta la aproximación deseada

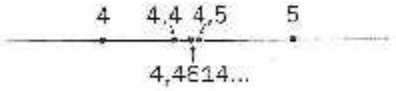
¿Es 4,4? Su cubo: 85,31, es menor que 90.

La medida de la arista está entre 4,4 y 4,5.



El error que se comete es 90 − 85,31 = 0,03 m^3, que con relación a los 91 m^3 no parece excesivo.

Este proceso se puede repetir indefinidamente hasta obtener la aproximación deseada. Al hacerlo con una calculadora se obtiene 4,4814047...



PARA PRACTICAR

64 Un depósito de agua tiene 500 m^3. Si el depósito es un cubo, averigua, sin calculadora, cuáles son las dimensiones aproximadas que tiene.

65 Calcula un número entero tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle el número buscado da 132. Empieza por un par de números tal que para el menor el resultado sea inferior de 132, y para el mayor, superior a 132.

LO MÁS IMPORTANTE

Notación científica

Un número en **notación científica** $N = a,bcd... \cdot 10^n$ consta de:

- un número decimal comprendido entre 1 y 10 multiplicado por
- una potencia de base 10 y exponente entero.

Potencias y raíces

Potencias

a^n — n: exponente; a: base; potencia: a^n

Números naturales	$a^1 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ $a^1 = a$ $a^0 = 1$
Números enteros	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Números fraccionarios	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Raíces

$\sqrt[n]{a} = r$ — índice: n; radicando: a; raíz: r; expresión radical: $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a} = r$ si se verifica que $r^n = a$, siendo $n > 1$ un número natural.

Número de raíces

- Dos si el índice es par y el radicando positivo. La raíz positiva se escribe $\sqrt{25} = 5$, y la negativa, $-\sqrt{25} = -5$.
- Una si el índice es impar o, también, si el radicando es 0.
- Ninguna si el índice es par y el radicando negativo.

Operaciones con potencias y raíces

Producto de potencias con el mismo exponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	Producto de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
Cociente de potencias con el mismo exponente $a^n : b^n = (a : b)^n$	Cociente de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

Producto de potencias con la misma base $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias con la misma base $a^n : a^m = a^{n-m}$

Potencia de una potencia $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Potencia de una raíz $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
	Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

ACTIVIDADES

DE SÍNTESIS

PARA PRACTICAR

66 ¿Cuál es el cociente de dividir la cuarta potencia de 97 835 entre el cubo de 97 835? ¿Por qué?

67 Se sabe que $4^2 = 2^4$. ¿Tienen las potencias la propiedad conmutativa? Si no es así, pon un ejemplo.

68 Escribe en notación científica y realiza los cálculos siguientes:

a) $(0{,}004 \cdot 10^5) \cdot 3\,000$ c) $128\,000 : (32 \cdot 10^5)$

b) $0{,}0004 \cdot (0{,}02 \cdot 10^{-3})$ d) $27 \cdot 10^{-5} : 0{,}03 \cdot 10^6$

69 Di si los siguientes números son iguales o no:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{25}$ c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt{9}$ y $\sqrt[5]{243}$ d) $\sqrt{8}$ y $2\sqrt{2}$

70 Escribe como potencia única las siguientes expresiones:

a) $7^5 \cdot 7^{-3} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} : 12^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} : 3^2$

71 Calcula k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{525} = k$ b) $\sqrt[5]{k} = 2$ c) $\sqrt[k]{125} = 3$

72 Realiza las siguientes operaciones reduciendo previamente a índice común:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[6]{2}$ d) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{6} : \sqrt[10]{2}$

73 Calcula y expresa el resultado en forma de raíz:

a) $\sqrt[3]{7} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ b) $\sqrt[3]{5^2} : 10^{\frac{1}{6}}$ c) $2^{\frac{6}{3}} : (\sqrt[3]{2})^2$

74 Realiza las siguientes operaciones y extrae los factores posibles del resultado:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^3}$ b) $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^4}$ c) $\sqrt[3]{3^2} : \sqrt{3^5}$

75 Ordena las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, $2^{\frac{5}{2}}$ y $5^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$

b) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^2 : 5^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt[6]{5}$

76 Suma los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{108} - 5\sqrt[3]{32}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{8}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{49}{18}}$

77 Calcula:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{7^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{7^3}}$ c) $\left(\dfrac{2^4}{5^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

PARA APLICAR

78 El radio del universo conocido, por ahora, es aproximadamente la longitud que recorre la luz en 15 000 millones de años.

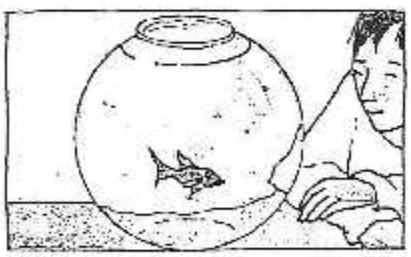
a) Expresa en notación científica el valor del radio del universo.

b) Suponiendo que el universo es esférico, calcula la circunferencia del ecuador de esa esfera.

79 Se tiene que construir un cubo de cartón de volumen 4 m³. ¿Cuánta superficie de cartón se necesita? Expresa el resultado en forma radical.

80 Una plaza cuadrada se quiere embaldosar con losetas de cerámica de 20 cm de lado. El número de losetas empleadas es 10 000. ¿Cuáles son las dimensiones de la plaza? ¿Cuánto vale su área? ¿Y su perímetro?

81 Una pecera de forma esférica tiene una capacidad de 14,13 litros de agua. Tomando el valor de $\pi = 3{,}14$, ¿cuánto mide el radio de la pecera?



82 Hemos multiplicado el índice de un radical por 2 y hemos dividido por 2 el exponente del radicando. ¿A qué equivale todo este proceso? ¿A qué operación corresponde?

DE REFUERZO

Potencias de exponente entero. Notación científica

83 Escribe como potencia positiva las negativas, y viceversa.

a) 3^{-7} b) 2^4 c) $\frac{1}{5^3}$ d) $\frac{1}{7^{-5}}$

84 Un alumno escribe la fracción $\frac{3}{4}$ de la forma $3 \cdot 4^{-1}$. ¿Es correcto? ¿Por qué?

85 ¿Qué significado tiene una potencia de exponente entero negativo?

a) Pon un ejemplo.

b) Escribe en forma decimal el número $93 \cdot 10^{-4}$.

86 La edad estimada del Sol es 4 600 000 000, es decir, cuatro mil seiscientos millones de años. Escribe este número en notación científica.

Raíz de un número. Número de raíces. Radicales equivalentes

87 Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números dados en forma potencial:

a) 7^6 b) 10^{10} c) 25^{10} d) 12^{12}

88 ¿Son equivalentes los siguientes radicales?

a) $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[4]{49}$ c) $\sqrt[6]{27}$ y $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2^2}$ d) $\sqrt[3]{4^2}$ y $\sqrt[4]{4}$

89 Simplifica los radicales:

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[6]{5^4}$ d) $\sqrt[5]{1\,024}$

90 Calcula las raíces exactas de 7^{12} y expresalas en forma potencial.

91 Si se divide el exponente de una potencia por 2, ¿qué operación se ha hecho? ¿Y si se divide por 3? Pon ejemplos.

92 Reduce los siguientes radicales a común índice:

a) $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt{5}$ $\sqrt[5]{3}$ $\sqrt[10]{7}$

c) $\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[6]{2}$ $\sqrt[3]{3}$

Potencias de exponente fraccionario. Propiedades de las potencias

93 Escribe como potencias de exponente fraccionario los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[6]{7^{12}}$ c) $\sqrt[3]{9^{-2}}$ d) $\sqrt[10]{15^5}$

94 Escribe en forma radical los siguientes números y calcula el resultado si la raíz es exacta:

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $2^{\frac{3}{5}}$ c) $25^{\frac{5}{12}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$

95 Calcula y expresa el resultado en forma de raíz:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ d) $6^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{3}$

96 Expresa como potencia única las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ c) $2^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{15} : \sqrt{3}$ d) $2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

97 ¿Qué significa la potencia $7^{\frac{1}{2}}$? ¿Cuánto valdrá su producto por la raíz de 2? ¿Puedes hacerlo por dos métodos? Recuerda la relación entre potencias y raíces.

Operaciones con radicales y potencias. Ordenación

98 Extrae los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3^5}$ b) $\sqrt[4]{5^{10}}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt{300}$

99 Expresa con un radical único las expresiones:

a) $\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{32}$

c) $\sqrt{5} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

100 Ordena de forma creciente las siguientes potencias:

a) $2^{\frac{1}{2}}$ $2^{\frac{3}{5}}$ $2^{\frac{1}{4}}$

b) $3^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{7}$ $2^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt{5}$ $2^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{3}$

ACTIVIDADES

DE AMPLIACIÓN

101 Carolina tiene un cubo lleno de canicas de distintos colores pero de igual tamaño; las cuenta y observa que hay 10. Decide comprar otro cubo cuyas dimensiones son el doble. ¿Cuántas canicas del mismo tamaño necesitará para llenarlo?



102 Con las letras ABC, ¿cuántas siglas de 3 letras, repetidas o no, se pueden formar? ¿Y cuántas de 4 letras? Escribe los resultados en forma de potencia.

103 Dos radicales del mismo índice son iguales cuando tienen el mismo radicando. ¿Se puede decir entonces que $\sqrt{6}$ es el doble de $\sqrt{3}$? Razona tu respuesta.

104 Se tiene el número $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^3$. ¿Cuál es el menor número por el que ha de multiplicarse para que su raíz cuadrada sea exacta? Calcula esa raíz cuadrada.

105 Escribe en metros cuadrados, con potencias de 10, las siguientes unidades de superficie:

a) Kilómetro cuadrado.
b) Hectómetro cuadrado.
c) Centímetro cuadrado.
d) Milímetro cuadrado.

106 Al contar una colección de canicas diferentes se observa que su número viene dado por 6^x. Sin necesidad de conocer x, ¿en cuántas veces aumenta el número de canicas si aumenta el exponente una unidad? ¿Cuántas veces menos tenía cuando el exponente era una unidad menos?

107 Andrés ve con extrañeza que, al extraer raíces cuadradas, cúbicas, cuartas..., con una calculadora, algunos números tienen raíces mayores que los números que introduce. ¿Es posible? Si la respuesta es afirmativa, indica qué números son.

108 ¿Cuál es el menor número por el que ha de multiplicarse 270 000 para que su raíz cúbica sea exacta? Calcula la raíz del nuevo número.

AUTOEVALUACIÓN

1 La masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, y la masa de la Luna, $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg. ¿Cuántas Lunas se podrían formar con la masa de la Tierra?

2 Calcula las raíces cúbicas de los siguientes números dados en forma potencial:

a) 7^6 b) 25^{18} c) 10^{21} d) 12^{12}

3 De las siguientes igualdades indica las que sean falsas y sustitúyelas por las verdaderas:

a) $\sqrt[3]{-27} = 3$ b) $\sqrt[4]{-16} = -2$

4 Indica si son verdaderas o falsas.

a) $7^{-2} = -\dfrac{1}{7^2}$ c) $3^{\frac{6}{3}} = \sqrt[6]{3^6}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ d) $\sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}$

5 Calcula el valor de:

a) $343^{\frac{1}{3}}$ b) $(97^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}$

6 ¿Cuál de los números $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$ es mayor?

7 Indica si son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{49} - \sqrt{49 - 45} = \sqrt{1} = 1$

b) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{7}} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{8}$

8 Calcula la arista de un cubo si su volumen total es 729 m^3.

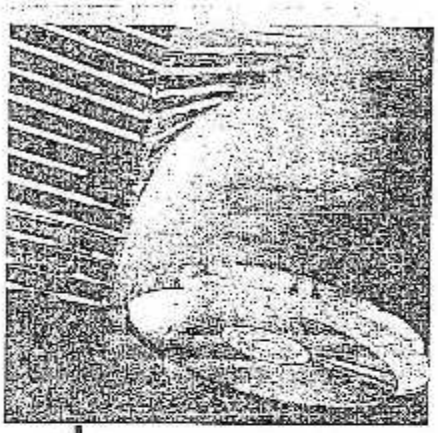
9 Calcula:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{3}{4}} : \sqrt{3}$

10 Expresa como un radical único la expresión:

$$\sqrt{32} + 3\sqrt{200} - 5\sqrt{18}$$

Viaje matemático



¡¡¡Este disco es "exabueno"!!!

Desde hace unos años se ha puesto de moda usar el prefijo "mega" para designar algo muy grande. Algunas tiendas, a las que ya no les basta con llamarse "supermercados" o "hipermercados" se hacen llamar "megastores". Y habrás oído a más de un compañero o compañera decir que tal o cual disco es "megabueno".

Pues aunque no lo sepan están hablando en un lenguaje muy científico. "Mega" significa una magnitud un millón de veces mayor que la unidad (10^6).

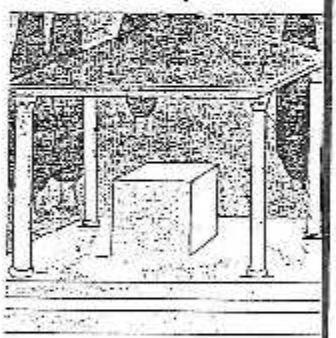
Pero si el disco del que te hablaba tu amigo es realmente, pero realmente bueno, quizá podríais decir que es "gigabueno" (10^9), "terabueno" (10^{12}) o "petabueno" (10^{15}). Y si de verdad es la bomba, será "exabueno" (10^{18}).

DALE AL COCO

¡Vaya números!

- ¿Cuál es el par de números naturales diferentes a y b, que cumplen la condición $a^b = b^a$?
- ¿Sabrías decir en qué cifra termina 7^{77}?
- ¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con tres 9?

El gran altar y la metedura de pata



El arquitecto e ingeniero Vitrubio (s. I a.C.) cuenta una curiosa historia sobre el problema de la duplicación de un cubo.

Una vez, a causa de una gran epidemia que los griegos atribuían a la ira de los dioses contra su pueblo, se consultó al oráculo de Delos (una especie de asesor de lo que querían y dejaban de querer los caprichosos dioses) sobre cómo detener la enfermedad.

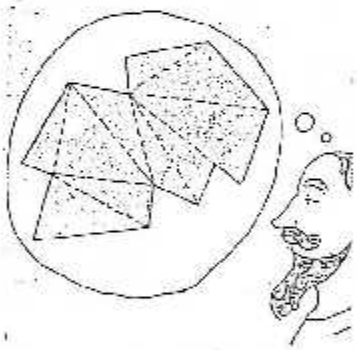
El oráculo contestó que los dioses no estaban satisfechos con el tamaño del altar sobre el que se celebraban sus sacrificios y exigían uno que fuera el doble de grande.

Un poeta joven y desconocido conmemoró el suceso con un poema en el que describió cómo se había edificado el nuevo altar cuyas dimensiones eran el doble de las del anterior, y se quedó tan contento.

Y es que al doblar las dimensiones el altar no resultaría dos veces mayor, sino ocho.

La maravillosa fórmula de Herón

Herón de Alejandría (*ca.* 75 d.C.) expone toda una teoría geométrica para calcular el área de un triángulo del que se conoce la longitud de los lados.



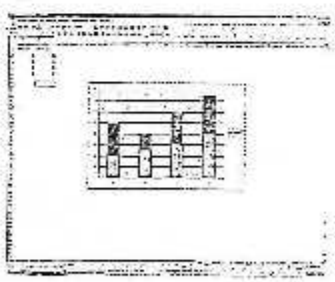
La fórmula de Herón es:

$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde a, b, y c son las longitudes de los lados y p es la mitad del perímetro.

Esta fórmula permite de una manera sencilla calcular las áreas de un terreno por triangulación, es decir, descomponiendo el terreno en triángulos cualesquiera.

EN EL ORDENADOR

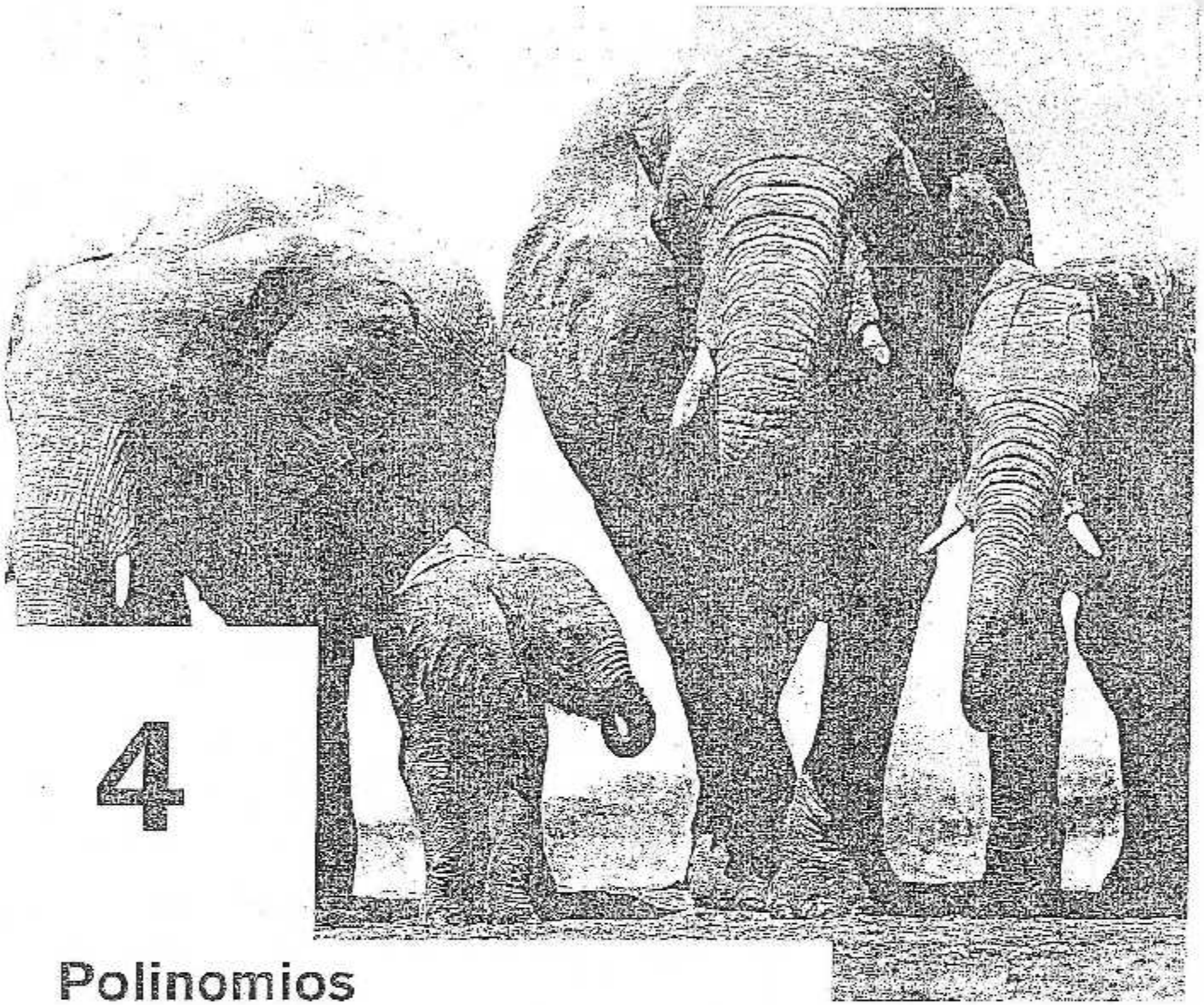


Muchos cálculos en poco tiempo

Una hoja de cálculo es un programa informático que permite hacer operaciones matemáticas a mucha velocidad. Está ordenada en filas y columnas formando unas celdas en las que se pueden introducir textos, valores numéricos y fórmulas matemáticas.

Es de gran utilidad ya que si se cambian los datos, el ordenador hace todas las cuentas.

La hoja de cálculo Excel también dibuja gráficas, como diagramas de barras y sectores, mediante el botón "asistente para gráficos".



4

Polinomios

El tamaño corporal de los animales está relacionado con el alimento necesario al día.

Si las crías de elefante necesitan una cantidad *x* kilos, de alimento al día, es posible que los elefantes adultos necesiten el doble de esa cantidad, es decir, $2x$ kilos de alimento al día.

Para alimentar una familia de tres elefantes adultos y una cría, sería necesaria una cantidad de $8x$ kilos de alimento al día.

En esta unidad aprenderás

- A utilizar letras para plantear y resolver problemas.
- Qué son las expresiones algebraicas, monomios y polinomios.
- A sumar, restar y multiplicar polinomios.
- A identificar y manejar algunos productos de polinomios que aparecen a menudo.
- A transformar relaciones entre cantidades de la vida real en expresiones algebraicas.

RESUELVE

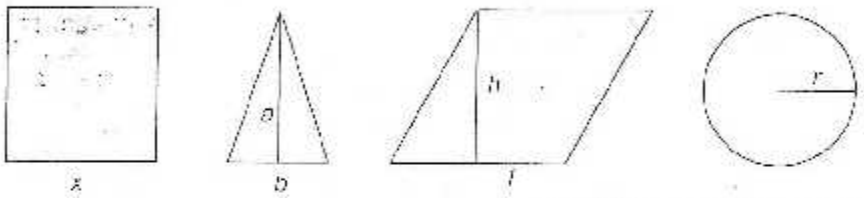
1 Relaciona las siguientes frases con sus fórmulas correspondientes. En cada fórmula indica qué representa cada letra:

a) Área de un triángulo — 1) πr^2

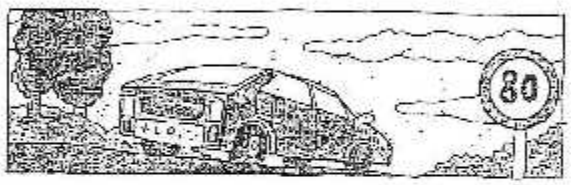
b) Velocidad de un móvil — 2) $\frac{pq}{2}$

c) Área del círculo — 3) $\frac{x}{y}$

2 Observa las figuras y trata de expresar el área de cada una de ellas en función de los datos que se indican.



3 Un coche se mueve a una velocidad de 30 km/h. Calcula la distancia recorrida en 1, 2 y 3 horas. ¿Cuál será la expresión de la distancia recorrida si el tiempo fuera de t horas?



RECUERDA

El signo «por»

El producto 2×7 se suele escribir $2 \cdot 7$.

El producto $3 \times a$ se suele escribir $3a$.

El producto $a \times b$ se suele escribir $a \cdot b$ o ab.

El producto $5 \times (y + 4)$ se suele escribir $5(y + 4)$.

Propiedades de la suma y el producto

En las operaciones algebraicas las letras representan números. Las propiedades de las operaciones con números siguen siendo válidas:

	Suma	Producto
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Propiedades de las potencias

El producto de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base y por exponente la suma de los exponentes.	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
El producto de potencias del mismo exponente es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
La potencia de una potencia es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes.	$(a^n)^q = a^{n \cdot q}$

1 Expresiones algebraicas: monomios y polinomios

Definición y valor numérico

Las fórmulas que dan la longitud, área o volumen de figuras geométricas son expresiones en las que intervienen números y letras relacionadas con las operaciones aritméticas.



Perímetro: $2a + 2b$

Si a y b son las medidas de los lados, el perímetro del rectángulo es $2a + 2b$.

Si x es la medida de la arista, el área de un cubo es $6x^2$.

Si r es el radio de la esfera, el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Las expresiones similares a las anteriores se llaman expresiones algebraicas.

*Una **expresión algebraica** es toda combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.*

El área de un cuadrado es x^2. Para hallar el área de un cuadrado de lado 5 cm, basta con sustituir la letra x por 5; el resultado es 25 cm^2.

El número 25 es el **valor numérico** de la expresión algebraica x^2 para $x = 5$.

Una expresión algebraica puede tomar infinidad de valores numéricos, dependiendo de los valores que se den a las letras.

***Valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números dados y hacer las operaciones indicadas en la expresión.*

Monomios y polinomios

En una expresión algebraica hay que distinguir:

- Los factores numéricos, llamados **coeficientes**.
- Las letras con sus exponentes, que es la **parte literal**.

coeficiente — parte literal

$$4\pi r^2$$

expresión algebraica

Las expresiones del tipo $4\pi r^2$, x^4, $6x^5$, $3x^2h$, ... se llaman **monomios**.

*Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que afectan a las letras son la multiplicación y potenciación de exponente natural.*

El grado de un monomio respecto de una letra es su exponente. Por ejemplo, el grado de $8x^2y^5$ respecto de x es 2 y respecto de y es 5.

El grado de un monomio es la suma de sus exponentes. El grado de $8x^2y^5$ es 7.

Las expresiones algebraicas:

$$3x^2 + 4xy - 3t + 7xyz \qquad 3xy^2 - 2z \qquad 2x^4 - 3xt + t^2$$

formadas por varios monomios se llaman **polinomios**. Si el polinomio tiene dos monomios, se llama también **binomio**, y si son tres, **trinomio**.

*Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de monomios.*

El grado de un polinomio es el grado mayor de sus monomios.

Cada monomio del polinomio se llama también término del polinomio.

La expresión $x^5 - 5$ es un binomio con un término numérico, al ser $5 = 5x^0$. El 5 se llama **término independiente**.

NOTACIÓN

Los polinomios se suelen denotar por una letra mayúscula, seguida, entre paréntesis, de las letras que contiene.

$A(x)$, $Q(t)$, $F(y, z)$

ACTIVIDADES

Unidad 4

PARA PRACTICAR

1 Escribe las expresiones algebraicas que aparecen en las siguientes frases:

a) El doble de un número.
b) La mitad de un número más uno.
c) Cuatro veces un número menos uno.
d) El triple de un número menos su tercera parte.

2 Calcula el valor numérico para $x = 3$ y $x = -5$ de:

a) x^3
b) $-x^2$
c) $(-x)^2$
d) $-(-x)^2$
e) x^4
f) x^5
g) $(-x)^5$
h) $-(-x)^3$

3 Halla los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican:

a) $x^4 - 16$, para $x = -2$.
b) $(x - 2)^{24}$, para $x = 3$.
c) $7x^2 - 5y$, para $x = 1$, $y = 1$.
d) πr^2, para $r = 3$ y para $r = 7$.

4 Escribe las expresiones algebraicas que aparecen en las siguientes frases:

a) Un número par.
b) Un número impar.
c) Dos números pares consecutivos.
d) Dos números impares consecutivos.

5 Di cuáles de las siguientes expresiones son monomios y en ellos indica el coeficiente y la parte literal.

a) $3x^2y^3$
b) $\frac{z}{x^2}$
c) $3\sqrt{x}$
d) $\frac{(1 + x)}{x^3}$

6 Indica el grado de los monomios y polinomios:

a) x^2y^3
b) $x^4 + 4x + y^5$
c) $5y^5 + 2x^3 + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2$

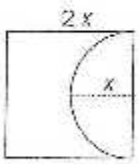
7 Indica el nombre y el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 + x + 1$
b) $x^5y + 4xy + 8$
c) $x^6 - x^5$
d) x^{42}

PARA APLICAR

Problema resuelto

8 Calcula el área y el perímetro de la figura coloreada.

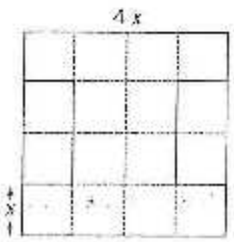


Área = A. cuadrado − A. semicírculo

$$\text{Área} = (2x)^2 - \frac{1}{2}\pi x^2 = 4x^2 - \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)x^2$$

$$\text{Perímetro} = 2x + 2x + 2x + \frac{1}{2}2\pi x = 6x + \pi x$$

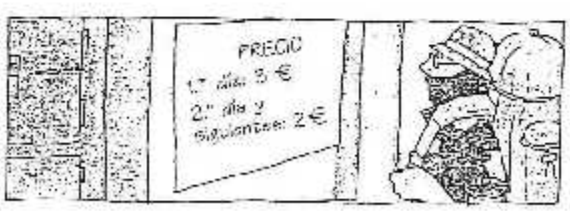
9 Calcula el área de la figura coloreada.



10 Un grupo de amigos decide comprar bocadillos y refrescos para merendar; un bocadillo vale un euro, y un refresco, 60 céntimos de euro. Escribe la expresión algebraica que da el coste de la compra.

11 Un viajero quiere dejar su equipaje en la consigna de una estación de trenes. En un letrero pone que el primer día se debe pagar 3 euros y, por cada día que pase sin que se recoja, 2 euros más.

a) Escribe la expresión algebraica que da el precio para n días.
b) Calcula el precio para $n = 3$, 5 y 10 días.



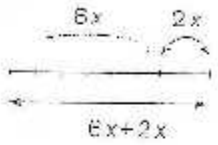
12 El valor numérico del polinomio $A(t) = 2\,500 - 5t^2$ es la altura a que se halla un objeto que cae, donde t son los segundos transcurridos. Calcula:

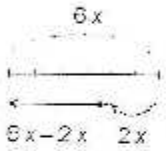
a) La altura para $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$.
b) El tiempo t que tarda en llegar al suelo.

2 Suma y diferencia de polinomios

Suma y diferencia de monomios

GEOMÉTRICAMENTE





Los monomios con la misma parte literal se llaman **semejantes.**

Los siguientes ejemplos muestran cómo se suma y resta con monomios semejantes.

$$6x + 3x = (6 + 3)x = 9x$$
$$12x^2y - 3x^2y + 6x^2y - (12 - 3 + 6)x^2y = 15x^2y$$

La suma o diferencia de varios ***monomios semejantes*** *es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.*

Reducir términos semejantes es sumarlos o restarlos, ya que en este caso la suma o diferencia da un único monomio.

Si los monomios no son semejantes, como por ejemplo $5x^2$ y $7xz$, no se pueden reducir términos: su suma es $5x^2 + 7xz$, y su diferencia, $5x^2 - 7xz$.

La suma o diferencia de varios ***monomios no semejantes*** *es el polinomio formado por la suma o diferencia indicada de dichos monomios.*

Suma y diferencia de polinomios

¿Cómo se suman los polinomios $x^2 + 2x + 7z + 5$ y $3x^2 - 6x + 3z + 2y - 4$?

Se opera así:

$$(x^2 + 2x + 7z + 5) - (3x^2 - 6x + 3z + 2y - 4) =$$
$$= (x^2 + 3x^2) + (2x - 6x) + (7z + 3z) + 2y + (5 - 4) =$$
$$= 4x^2 - 4x + 10z + 2y + 1$$

Se suman los términos semejantes de cada uno de los polinomios y se añaden los términos no semejantes.

Si los polinomios tienen muchos términos y, sobre todo, si son varios polinomios, se utiliza la misma disposición que la utilizada con los números: se colocan uno debajo del otro y luego se suman.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 7z + 5 \\ 3x^2 - 6x + 3z + 2y - 4 \\ \hline 4x^2 - 4x + 10z + 2y + 1 \end{array}$$

La diferencia de estos mismos polinomios se hace cambiando el signo de todos los términos del sustraendo. Así se transforma la resta en suma.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 7z + 5 \\ -3x^2 + 6x - 3z - 2y + 4 \\ \hline -2x^2 + 8x + 4z - 2y + 9 \end{array}$$

La suma o diferencia de dos polinomios es otro polinomio formado:

- *por la suma o diferencia de los términos semejantes de ambos, y*
- *por los términos no semejantes de ambos.*

La suma y diferencia de monomios y polinomios cumplen las mismas propiedades que las operaciones con números.

PARA PRACTICAR

13 Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones:

a) $4x + 2x - 3x$ c) $x^3 - 6x^3 - 4x^3$

b) $6x^2 - x^2 - 4x^2$ d) $5x^4 + x^4 - 3x^4$

14 ¿Verdadero o falso? Si es falso, escribe el resultado verdadero:

a) $x + x = 2x$ c) $x^3 = 3x$

b) $(x^2)^4 = x^6$ d) $x^2 + x^4 = x^5$

15 La suma de dos monomios es $8x^5$. Di si los monomios pueden ser:

a) $8x^3$ y $8x^2$ c) $3x^5$ y $5x^5$

b) $3x^4$ y $5x$ d) $8x^5$ y $8x^5$

16 Halla el valor numérico, para $x = 2$, de la expresión $3x^4 - 5x^3 + 3x - x^4 + 6x^2 - 1$. Hazlo de las dos siguientes formas:

a) Sustituyendo directamente.

b) Sustituyendo en la expresión reducida.

¿Cuál es más conveniente?

17 Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 119$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

18 Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7$ y $Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 9$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Ejercicio resuelto

19 Dados los polinomios:

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^4 - 5x^3 + x - 1$ y $R(x) = 7x^4 + x^3 + x^2 + x$,

calcula $P(x) + Q(x) - R(x)$.

$P(x) + Q(x) - R(x) =$

$= (x^3 + 2x^2 - 5x + 6) + (x^4 - 5x^3 + x - 1) - (7x^4 + x^2 + x^3 + x) = (x^4 - 7x^4) - (x^3 - 5x^3 - x^3) + (2x^2 - x^2) + (-5x + x - x) + (6 - 1) =$

$= -6x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 5$

20 Dados los polinomios $P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 5x + 1$, $Q(x) = 2x^3 - 3x + 5$ y $R(x) = x^2 - 1$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $R(x) - P(x) + Q(x)$

c) $Q(x) + R(x) - Q(x)$

21 Busca un polinomio de manera que sumado a $P(x) = 3x^2 - 5x + 6$, dé el polinomio $R(x)$. ¿Qué polinomio es? ¿Cómo son sus coeficientes?

22 Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 5$, escribe el polinomio que sumado con él da el polinomio cero, es decir, aquel cuyos coeficientes son todos 0.

23 «Si dos polinomios tienen igual grado, su suma tiene igual grado que los sumandos.» ¿Es cierto? En caso negativo, pon un ejemplo.

PARA APLICAR

24 El área de la base de un cilindro es πr^2, y el área lateral, $2\pi rh$. Expresa el área total del cilindro como un polinomio.

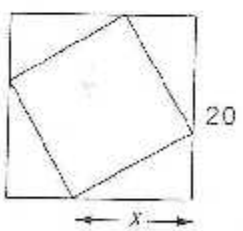
25 Cuentan que en la tumba del matemático Diofanto se encontró la siguiente inscripción:

> *«¡Caminante! Aquí reposan los restos de Diofanto, y los números demostrarán cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su infancia; su juventud, la doceava parte; la séptima parte, su matrimonio estéril; cuando pasaron cinco años más, tuvo su primer hijo; este murió a la mitad de la edad total del padre; cuatro años después sobrevino la muerte de Diofanto.»*

a) Escribe el polinomio que expresa el transcurrir de la vida de Diofanto, tomando como duración de la misma x años.

b) Comprueba que para $x = 84$ el valor numérico del polinomio vale 84.

26 Se tiene un cuadrado de cartón de 20 cm de lado. Se corta en cada esquina un triángulo tal como se indica en la figura. Se pide la expresión algebraica del área del cuadrilátero que queda, si uno de los catetos del triángulo rectángulo que se corta mide x cm.

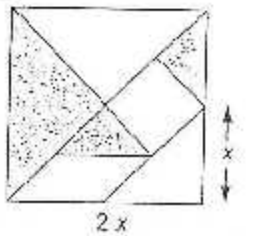


27 En la figura se tiene un tangram de lado 2x.

a) Calcula el área de las 7 piezas de mayor a menor.

b) Suma estas áreas.

c) Comprueba que obtienes el mismo resultado que calculando el área del cuadrado de lado 2x.



3 Producto de polinomios

Producto de monomios

REGLAS DE LOS SIGNOS

+	· +	=	+
+	· −	=	−
−	· +	=	−
−	· −	=	+

Observa las siguientes operaciones; en ellas, primero se multiplican los números y luego las letras:

$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$

$5x^4 \cdot 7x^4 = 5 \cdot 7 \cdot x^4 \cdot x^4 = 35x^8$

$-2xy^2 \cdot 5x^2y^3 \cdot 3xt = (-2 \cdot 5 \cdot 3)(x \cdot x^2 \cdot x)(y^2 \cdot y^3)t = -30x^4y^5t$

El producto de monomios es otro monomio que tiene:

- *como coeficiente, el producto de los coeficientes; y,*
- *como parte literal, las letras que aparecen en los monomios con exponente igual a la suma de los exponentes con que figuran en los factores.*

Producto de un polinomio por un monomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la propiedad distributiva, como en los siguientes ejemplos:

$3x^2 \cdot (7x^3 + 5xy) = (3x^2 \cdot 7x^3) + (3x^2 \cdot 5xy) = 21x^5 + 15x^3y$

$2xy^2 \cdot (3x - 2y + 4) = (2xy^2 \cdot 3x) + (2xy^2 \cdot (-2y)) + (2xy^2 \cdot 4) =$
$= 6x^2y^2 - 4xy^3 + 8xy^2$

El producto de un polinomio por un monomio es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando el monomio por cada término del polinomio.

Cuando el monomio es un número, se procede de la misma forma:

$2 \cdot (3x^2 + 5x - 3) = 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 5x + 2 \cdot (-3) = 6x^2 + 10x - 6$

El proceso contrario a la propiedad distributiva se llama **sacar factor común**; en el ejemplo siguiente, xy es común a todos los factores:

$3x^3y + 2xy - 5x^2y^4 = 3x^2 \cdot \boxed{xy} + 2 \cdot \boxed{xy} - 5xy^3 \cdot \boxed{xy} = (3x^2 + 2 - 5xy^3)xy$

Producto de polinomios

La multiplicación de polinomios se basa en el producto de un monomio por un polinomio y en la propiedad distributiva, de la siguiente forma:

$(2xy - 3x^2) \cdot (2x + 5y) = 2xy \cdot (2x + 5y) + (-3x^2) \cdot (2x + 5y) =$
$= (4x^2y + 10xy^2) + (-6x^3 - 15x^2y) = -11x^2y + 10xy^2 - 6x^3$

Si los polinomios tienen muchos términos, se colocan los monomios del mismo grado uno debajo de otro y luego se multiplican término a término. Si falta el monomio de algún grado se puede llenar el hueco con el monomio de ese grado y coeficiente 0.

$$\begin{array}{r} -7x^3 + 3x^2 - 0x + 2 \\ 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline -7x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 \\ -21x^4 + 9x^3 - 0x^2 + 6x \\ -14x^5 + 6x^4 - 0x^3 + 4x^2 \\ \hline -14x^5 - 15x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x - 2 \end{array}$$

El producto de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y sumando luego los términos semejantes.

PARA PRACTICAR

28 Escribe como monomio las siguientes potencias:

a) $x^2 \cdot x^3$ c) $((-a)^2)^4$

b) $(x^2)^3$ d) $(a^2 \cdot b^2)^7$

29 Escribe como monomio los siguientes productos:

a) $3x^2 \cdot 3xy^2 \cdot 5xy^3$ c) $3a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$

b) $2xy \cdot 6x^2y^2 \cdot 3x^3y^3$ d) $2uv \cdot (-3v^2) \cdot u^2v^2$

30 Calcula:

a) $x^2 \cdot (2x + 7)$

b) $x^4 \cdot (3x - 6)$

c) $x^2 \cdot (4x^3 + 6x + 1)$

31 El producto de dos monomios es $24x^3$. Uno de ellos tiene grado 5, y el otro tiene como coeficiente -4.

¿Cuáles son los dos monomios?

32 Calcula:

a) $(x^3 + 1)(4x + 3)$

b) $(x^4 - x^2)(2x - 4)$

c) $(x^3 + x^2)(2x^3 + 4x - 2)$

33 Calcula:

a) $2x^3(1 - 4x)(3x^2 + x)$

b) $(x^3 - 2x + 1)(5x + 6) \cdot 4x^3$

c) $(6x^2 + 5x + 7) \cdot 4x(3 - x^2)$

PARA APLICAR

37 «¿Cuál es tu edad? ¡Ah!, no me lo digas. La voy a adivinar.

— Multiplícala por 3.
— Suma al resultado 18.
— Divídelo por 3.
— Súmale 4.

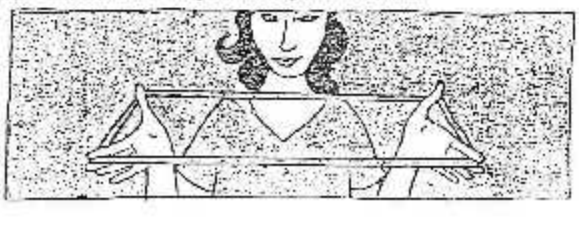
¿Qué número has obtenido? La respuesta es...» ¿Cuál es la respuesta? ¿Por qué?

38 Se tiene un cuadrado de lado $2x$. Aumentamos la altura en dos unidades y reducimos la anchura a la mitad. Expresa el área de la figura resultante.

39 Se tiene una cuerda de 60 cm unida por los extremos. Con ella podemos hacer una infinidad de rectángulos fijando el largo x. Expresa el área de los rectángulos de la siguiente forma:

a) Como producto indicado de dos términos.

b) Como una expresión polinómica.



Ejercicio resuelto

34 Saca factor común en las expresiones siguientes:

a) $x^2 + xy$

b) $3x^2y^3 - xy^2 + 5x^3y^4$

c) $\frac{t^4s^5}{12} + \frac{2t^2s}{3} - \frac{5t^3s^3}{6}$

a) $x^2 + xy = xx + xy = x(x + y)$

b) $3x^2y^3 - xy^2 + 5x^3y^4 =$
$= xy^2 \cdot 3xy - xy^2 \cdot 1 + xy^2 \cdot 5x^2y^2 =$
$= xy^2(3xy - 1 + 5x^2y^2)$

c) $\frac{t^4s^5}{12} + \frac{2t^2s}{3} - \frac{5t^3s^3}{6} = \frac{t^2s}{3} \cdot \frac{t^2s^4}{4} + \frac{t^2s}{3} \cdot 2 -$
$- \frac{t^2s}{3} \cdot \frac{5ts^2}{2} = \frac{t^2s}{3}\left(\frac{t^2s^4}{4} + 2 - \frac{5ts^2}{2}\right)$

35 Saca factor común en las expresiones siguientes:

a) $2x^3y - 3xy^2 - x$

b) $x^2yz^3 + 3xy^3 - 5xy^2z$

c) $2u^2v^3z^5 \quad 6uv^3z^4 \quad 12u^3v^2z^3$

36 Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $\frac{6a^2}{25} + \frac{4ab}{5} - \frac{2a^2b}{15}$

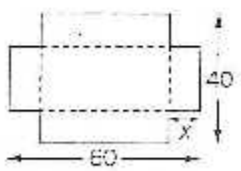
b) $\frac{5u^3v^2w^2}{2} - \frac{u^2v^2w}{4} + \frac{3u^5vw^2}{8}$

40 Un cartón tiene 60 cm de largo por 40 de ancho. Se corta en cada esquina un cuadradito de x cm. Doblando el cartón por la raya punteada, tal como indica la figura, se forma una caja.

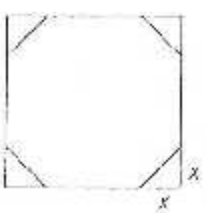
Expresa el volumen de la caja:

a) Como producto indicado de tres términos.

b) Como una expresión polinómica.



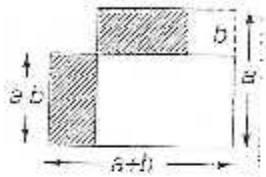
41 Ana tiene un cuadrado de cartón azul de 60 cm de lado. Su hermana Carolina ha cortado en cada esquina un triángulo isósceles. Halla la expresión algebraica del área del octógono que queda, si el cateto de un triángulo que se corta mide x cm.



4 Identidades notables

Las siguientes operaciones con binomios son simples multiplicaciones. Es recomendable aprenderlas de memoria por su constante utilidad. No obstante, si en algún momento no las recuerdas, haz las operaciones indicadas y reduce los términos semejantes.

Suma por diferencia de dos monomios



$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2 \qquad b^2 \end{array}$$

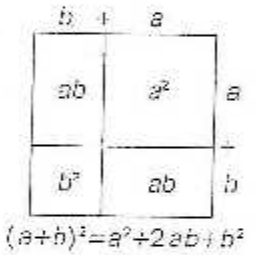
La suma por la diferencia de dos monomios es igual a:
- el cuadrado del primero,
- menos el cuadrado del segundo.

$(3x+y)(3x-y) = (3x)^2 - 3xy + 3xy - y^2 = 9x^2 - y^2$

$(-5x+2y)(-5x-2y) = (-5x)^2 + 10xy - 10xy - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado de un binomio



$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

El cuadrado de un binomio es igual a:
- el cuadrado del primero,
- más el doble del primero por el segundo,
- más el cuadrado del segundo.

$(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

Observa que si algún sumando es negativo, la operación se puede hacer del mismo modo; el resultado de calcular el doble del primero por el segundo, en este caso, es negativo:

$(5x-3t)^2 = [5x+(-3t)]^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3t) + (-3t)^2 = 25x^2 - 30xt + 9t^2$

$(-3x+2z)^2 = (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 2z + (2z)^2 = 9x^2 - 12xz + 4z^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Cubo de un binomio

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^2b+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

El cubo de un binomio es igual a:
- el cubo del primero,
- más el triple del cuadrado del primero por el segundo,
- más el triple del primero por el cuadrado del segundo,
- más el cubo del segundo.

$(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

Si algún sumando es negativo, la operación se puede realizar de la misma forma:

$(x-3h^2)^3 = [x+(-3h^2)]^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-3h^2) + 3 \cdot x \cdot (-3h^2)^2 + (-3h^2)^3 =$
$= x^3 - 9x^2h^2 + 27xh^4 - 27h^6$

Observa que en el resultado aparecen signos menos alternados.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

PARA PRACTICAR

42 Calcula los siguientes productos:
a) $(a + 3)(a - 3)$
b) $(3x + 2)(3x - 2)$
c) $(5x + 2y)(5x - 2y)$
d) $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$

43 Desarrolla los cuadrados de los binomios y reduce los términos semejantes:
a) $(3x + a)^2$
b) $(-5x + y)^2$
c) $(7x - 2t)^2$
d) $(-5y - 4z)^2$

44 Escribe como producto de dos binomios las siguientes expresiones:
a) $x^2 - 49$
b) $4x^2 - 25$
c) $64 - 4x^2$
d) $x^4 - y^2$

45 Escribe como cuadrado de un binomio las siguientes expresiones:
a) $x^2 + 2x + 1$
b) $4x^2 - 4x + 1$
c) $9x^4 + 6xt + t^2$
d) $x^4 + 2x^2y^2 + y^2$

46 Completa las siguientes expresiones sabiendo que son desarrollos de un binomio al cuadrado:
a) $x^2 + \ldots + y^2 = \ldots$
b) $x^2 - 4xa + \ldots = \ldots$
c) $a^2 - \ldots + 36 = \ldots$
d) $4x^2 + \ldots + y^2 = \ldots$

Ejercicio resuelto

47 Calcula las siguientes potencias:
a) $(2x + 3y)^3$
b) $(x^2 - 2y)^3$
a) $(2x + 3y)^3 =$
$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 =$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
b) $(x^2 - 2y)^3 =$
$= (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \cdot (-2y) + 3x^2 \cdot (-2y)^2 + (-2y)^3 =$
$= x^6 - 6x^4y + 12x^2y^2 - 8y^3$

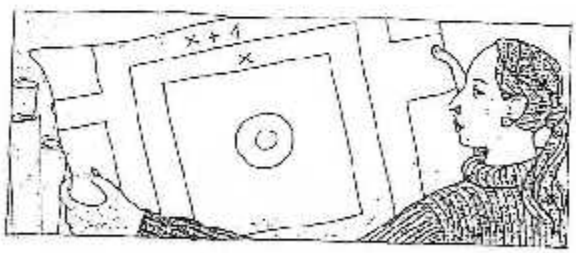
48 Calcula las siguientes potencias:
a) $(x + y)^3$
b) $(x - y)^3$
c) $(3x^2 - 2y)^3$
d) $(a + 2b^2)^3$
e) $(-5x + y^2)^3$
f) $(-x^4 - 2z)^3$

49 Expresa las siguientes sumas en forma de productos:
a) $9t^2 - 12t + 4$
b) $16 - 25y^2$
c) $a^3 - 27b^3 + 27ab^2 - 9a^2b$
d) $-1 + z^6$

50 Calcula las siguientes potencias:
a) $[(2a - b) \cdot (2a + b)]^2$
b) $[(x - y)^2 - 2xy]^3$
c) $[(2x - 1)^2 - (x - 2)^2]^3$

PARA APLICAR

51 Una plaza cuadrada está proyectada con x metros de lado. Si se aumenta el lado 1 m, ¿cuánto ha aumentado su área?



52 Marta dice a Sara:
— «Piensa un número.»
— «Multiplica el anterior por el posterior.»
— «Súmale 1 y dime cuánto te ha dado.»

Una vez que Sara dice el resultado, Marta sabe inmediatamente el número pensado por Sara. ¿Cómo lo ha averiguado Marta?

53 Realiza las siguientes operaciones sin efectuar las potencias; utiliza los productos notables:
a) $60^2 - 50^2$
b) $25^2 - 15^2$

54 Loreto le propone a Luis las siguientes igualdades y le pide que las demuestre sin hallar los cuadrados:
a) $99^2 + 20^2 = 101^2$
b) $9\,999^2 + 200^2 = 10\,001^2$

Demuestra la veracidad de estas relaciones utilizando los productos notables.

55 Javier observa que la terna de números consecutivos tiene una curiosa propiedad:
- De 3, 4, 5 obtiene que $4^2 = 3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1$
- De 4, 5, 6 obtiene que $5^2 = 4 \cdot 6 + 1 = 24 + 1$
- De 9, 10, 11 obtiene que $10^2 = 9 \cdot 11 + 1 = 99 + 1$

¿Será cierto que para cualquier terna de números consecutivos el cuadrado del número intermedio es igual al producto de los extremos más 1?

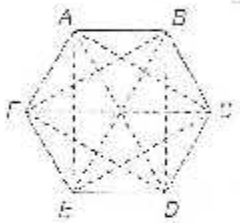
TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS
Para resolver un problema

- Prueba con otro más sencillo.
- Analiza el proceso.
- Vuelve al problema original.

Problema

¿Cuántas diagonales tiene un polinomio de 1 000 lados? Halla una expresión algebraica o fórmula que dé el número de diagonales de un polinomio convexo según el número de lados.

Solución



Prueba con otro más sencillo

Se puede empezar suponiendo que el polinomio tiene únicamente 6 lados. Uniendo vértices no consecutivos se obtienen nueve diagonales.

Analiza el proceso

De cada vértice del hexágono se han trazado 3 diagonales, que son los segmentos que unen ese vértice con los demás menos con él mismo y con los vértices de los lados contiguos. Cada diagonal está contada dos veces; por ejemplo, AC y CA es la misma.

Como hay seis vértices, el número de diagonales se podía haber calculado directamente haciendo la operación:

$$\frac{6 \text{ vértices} \cdot 3 \text{ diagonales}}{2}$$

Vuelve al problema original

Si el polígono tiene 1 000 lados, desde cada uno de los 1 000 vértices se pueden trazar $1\,000 - 3 = 997$ diagonales. El número total de diagonales es

$$\frac{1\,000 \cdot 997}{2} = 498\,500$$

Generalización.

Si el polígono tiene n lados:

Número de vértices: n
Diagonales desde cada vértice: $n-3$

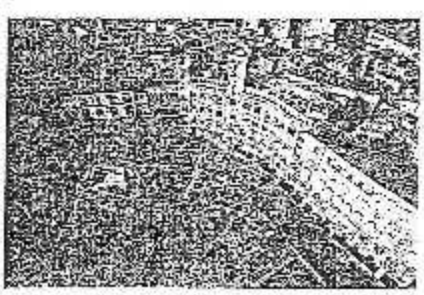
} Número de diagonales: $\frac{n(n-3)}{2}$

PARA PRACTICAR

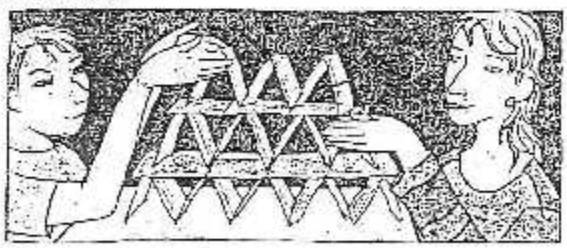
56 Los domingos, en un pueblo de 15 340 habitantes, cada uno de ellos saluda a los restantes.

a) ¿Cuántos saludos se han dado?

b) Escribe una fórmula que da el número de saludos.



57 Un grupo de alumnos se entretiene construyendo una torre de naipes como la que se ve en la ilustración:



a) Calcula las cartas que se emplean para construir una torre de 100 filas.

b) Halla la expresión algebraica que da el número de cartas para n filas.

LO MÁS IMPORTANTE

Expresiones algebraicas

Expresión algebraica

Es toda combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Valor numérico

Es el número que se obtiene al sustituir, en una expresión algebraica, las letras por números dados y hacer las operaciones indicadas.

Monomios y polinomios

Monomio

Es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que afectan a las letras son la multiplicación y potenciación de exponente natural.

$3x^2h$

Polinomio

Es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de monomios.

$2x^4 - 3xt + t^2$

Suma, diferencia y producto de polinomios

Suma o diferencia

De monomios semejantes

Es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.

$12x^2y - 3x^2y - 6x^2y = 15x^2y$

De monomios no semejantes

Es el polinomio formado por la suma o diferencia indicada de dichos monomios.

$5x^3 + 7xz - 5x^2 + 7xz$

De polinomios

Es otro polinomio formado por:

- la suma o diferencia de los términos semejantes de ambos, y
- los términos no semejantes de ambos.

$(x^2 + 2x) + (3x^2 + 2y) = 4x^2 + 2x + 2y$

Producto

De monomios

Es igual a otro monomio que tiene:

- como coeficiente, el producto de los coeficientes; y
- como parte literal, las letras que aparecen en los monomios con exponente igual a la suma de los exponentes con que figuran en los factores.

De un monomio por un polinomio

Es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando el monomio por cada término del polinomio.

De polinomios

Es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen:

- multiplicando cada término del primero por cada término del segundo,
- y sumando luego los términos semejantes.

Identidades notables

Suma por diferencia	*Cuadrado de un binomio*	*Cubo de un binomio*
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ACTIVIDADES

DE SÍNTESIS

PARA PRACTICAR

58 Halla el valor numérico de la expresión $x^2 - 5x + 8$ para:

a) $x = 2$ b) $x = 4$

59 Realiza las siguientes operaciones:

a) $(3x^3 - x + 5) + (x^2 + 4x - 2)$

b) $(7x^3 + 4x^2 - 5) - (3x^3 - 7x^2 - 8)$

60 Calcula los siguientes cuadrados:

a) $(2x + 1)^2$ c) $(7x + 3y)^2$

b) $(5x - 2)^2$ d) $(3x - 7y)^2$

61 Calcula los siguientes cubos:

a) $(2x - y)^3$ b) $(3x^2 + 2y)^3$

62 Sin hacer operaciones, ¿para qué valor de x la expresión $7x^3 - 53x + 200$ toma el valor numérico 200?

63 Dados los polinomios $A(x) = x^2 + 2x - 3$, $B(x) = x^3 - 2x$ y $C(x) = 2x^2 - 1$, calcula:

a) $2\,A(x) - 3\,B(x)$

b) $A(x) \cdot [2\,B(x) + C(x)]$

64 Si $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$, ¿para qué valores de x toma como valor numérico 0?

65 Se multiplican dos polinomios de grado 4 y 3, respectivamente. ¿Qué grado tiene el producto?

66 Expresa las siguientes sumas en forma de productos:

a) $4x^2 + 4x + 1$

b) $x^2 - 4xy + 4y^2$

PARA APLICAR

67 En un puesto de frutas; el kilo de manzanas vale 1 euro; el de peras, 1,20 euros, y el de naranjas, 80 céntimos de euro.

a) Escribe la expresión algebraica que da el coste de una compra y utilízala para contestar a los dos siguientes apartados.

b) María lleva 3 kg de manzanas, 5 de peras y 4 de naranjas, ¿cuánto tiene que pagar?

c) Crispín lleva 2 kg de manzanas, 5 kg de peras y 3 kg de naranjas; ¿cuánto tiene que pagar?

68 Una agencia de viajes, al contratar una excursión, exige un depósito de 100 euros, que no se devuelve aunque no se haga la excursión. Además hay que entregar, también en depósito, una cantidad por cada alumno que es la vigésima parte del precio de la excursión por alumno.

a) Escribe la expresión algebraica que da el depósito.

b) Calcula el depósito si van 120 alumnos y paga cada uno 60 euros.

c) ¿Y si fueran 60 y el viaje por alumno es 120 euros?

69 Un cuadrado tiene de lado a cm. Se aumenta en x cm. Se pide:

a) La expresión del área del nuevo cuadrado.

b) El área del nuevo cuadrado para $a = 5$, $x = 2$.

c) El área para $a = 5$, $x = 3$.

70 Expresa en forma algebraica:

a) El cuadrado del triple de $x + 1$.

b) El doble de la suma de a y b.

c) El doble del cubo de x menos el cuadrado del doble de y.

d) La suma de x e y al cuadrado menos el cuadrado de su diferencia.

71 Dado $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 6x - 7$, escribe un polinomio $Q(x)$ que, sumado con $P(x)$, dé un polinomio:

a) De grado 3. c) De grado 2.

b) De grado 1. d) De grado 3.

72 Una piscina tiene 50 m de largo por 25 de ancho. Se hace alrededor de la piscina un pasillo rectangular de x m de ancho. Escribe la expresión del área del pasillo en función de su anchura x.

DE REFUERZO

Expresiones algebraicas: monomios y polinomios

73 Halla el valor numérico de la expresión $x^3 - 10x + 21$ para:

a) $x = 0$ c) $x = -7$

b) $x = 3$ d) $x = -2$

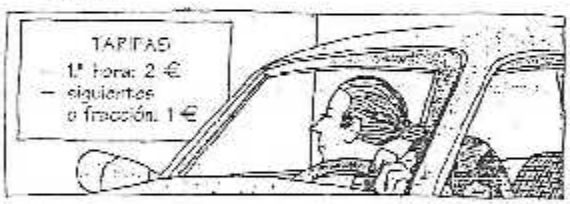
74 Di tres monomios que tengan el mismo grado y que no sean semejantes.

75 El perímetro de un rectángulo mide 40 cm. Escribe la expresión de la altura en función del lado de la base que mide x cm.

76 Una automovilista quiere dejar su coche en un aparcamiento. En el cuadro de tarifas de la entrada pone: «Precio de la primera hora o fracción: 2 euros. Por cada hora o fracción siguiente: 1 euro».

a) Escribe la expresión algebraica que da el coste por horas.

b) Calcula el precio para $t = 3, 5, 10, \ldots, 23$ horas.



Suma y diferencia de polinomios

77 Dados los polinomios $A(x) = 7x^2 - 3x + 5$ y $B(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 5$, calcula:

a) $A(x) + B(x)$

b) $B(x) - A(x)$

78 Dados los polinomios $A(x) = 2x^2 - x - 3$ y $B(x) = -2x^4 + 3x^3 - 6$, calcula:

a) $2\,A(x)$

b) $3\,B(x)$

c) $A(x) + B(x)$

d) $A(x) - B(x)$

79 ¿Es cierto que al sumar dos monomios semejantes de grado 4 se obtiene siempre otro monomio de grado 4? ¿Por qué? Pon ejemplos.

Producto de polinomios

80 Calcula:

a) $(3x^4)^2$ c) $(3x^2)^4$

b) $(-2x^2)^3$ d) $(3x^4)^3$

¿Dan el mismo resultado c y d?

81 Convierte los siguientes productos en sumas:

a) $x(x^2 - 5x + 6)$

b) $(-3x)(x^2 + 2x + 5)$

c) $(a + b)(c - d)$

d) $(5x + 1)(5x - 1)$

82 Dados los polinomios $A(x) = 2x^2 - x - 3$ y $B(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6$, calcula:

a) $A(x) \cdot A(x)$

b) $A(x) \cdot B(x)$

83 El producto de tres números es 360. Si cada uno de ellos se multiplica por 3, ¿cuál sería el nuevo producto? Razona la respuesta.

84 Encuentra el monomio que falta:

$$(2x^2 - 5x) \cdot \boxed{?} = 10x^5 - 25x^4$$

85 Convierte las siguientes sumas en productos:

a) $x^4 + 5x^3 - 5x^4$

b) $12x^4 - 16x^3 + 5x^3$

Identidades notables

86 Realiza las siguientes operaciones:

a) $(2x + y)^2$ c) $(a - b^2) \cdot (a + b^2)$

b) $(3x - y^2)^2$ d) $(x^3 - 3y)^3$

87 Convierte las siguientes sumas en potencias:

a) $x^2 - 2x + 1$

b) $a^2 + 6a + 9$

88 Expresa las siguientes diferencias como producto de dos factores:

a) $m^2 - n^6$ c) $x^4 - y^4$

b) $a^2 - 9a^2$ d) $a^6 - a^4$

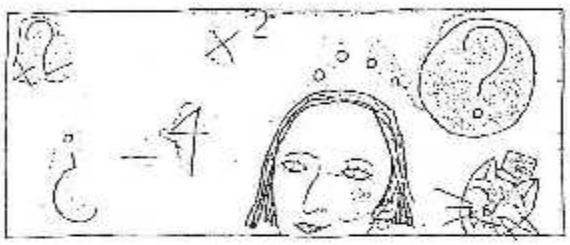
ACTIVIDADES

DE AMPLIACIÓN

89 Expresa como potencia de un binomio las multiplicaciones siguientes:

a) $(2x + 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

b) $(5a - 2b)(25a^2 - 20ab + 4b^2)$



90 ¿Cuál es tu número de la suerte (del 1 al 10)? ¡Ah!, no me lo digas; lo voy a adivinar.

— Súmale 2.

— Eleva al cuadrado el resultado.

— Réstale 4 veces el número inicial.

— ¿Qué número has obtenido?

— Tu número es... ¿Por qué?

91 El área de un triángulo que tiene por medidas de los lados a, b y c viene dada por la expresión algebraica o fórmula de Herón:

$$S(a, b, c) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Calcula el área, es decir, halla el valor numérico de S para:

a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$

b) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$

92 La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, ¿es par o impar?

93 La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos, ¿es par?

94 Si dos números se diferencian en 7 unidades, ¿la diferencia de sus cuadrados es igual a 7 veces la suma?

95 La diferencia de los cuadrados de dos números naturales es igual a su suma. ¿Cómo son esos dos números?

AUTOEVALUACIÓN

1 Simplifica las siguientes expresiones y calcula su valor para $x = 2$.

a) $8x + 6x - 3x + 12$

b) $4(7 + x) + (4x + 5)$

2 La expresión que da la suma de los n primeros números naturales es: $\frac{(n+1)n}{2}$

Compruébala para la suma de los:

a) Tres primeros números naturales.

b) Cinco primeros números naturales.

3 Reduce las expresiones:

a) $6x + 2x - 12x$

b) $x^2 - (3x^2 - 7x^2)$

4 Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x^2 + x + 1) + (x^3 - 5x + 6)$

b) $(3x^4 - 5x^2 + x) - (7x^4 - 4x + 8)$

5 Multiplica las expresiones:

a) $x^3(x^2 + x + 1)$

b) $3x^3(x^3 - 5x)$

6 Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(3x + 2)(x^2 + 5x + 3)$

b) $(4x - 7)(3x^2 - 4x + 6)$

7 Dados los polinomios $P(x) = x + 1$, $Q(x) = x^3 - 3x - 2$ y $R(x) = 2x^2 - 3x$, calcula:

a) $5P(x) - 3Q(x)$

b) $P(x)[Q(x) - R(x)]$

8 Escribe los resultados de las operaciones:

a) $(5x + 3)^2$

b) $(x^3 - y)^2$

9 Escribe los resultados de las operaciones:

a) $(2x - 3) \cdot (2x + 3)$

b) $(x - 3y)^2$

10 Escribe las expresiones algebraicas que aparecen en las siguientes frases:

a) El doble de un número menos su cuadrado.

b) La suma de dos números pares consecutivos.