Экзамен по дисциплине «Алгебра и теория чисел»
для направления подготовки
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем,
1 курс, 2 семестр

Экзаменационный билет содержит 4 вопроса:
1-ый – теоретический вопрос на тему «Абстрактная алгебра» (вопросы 5-24)
2-ой – теоретический вопрос на тему «Бинарные отношения» или на тему «Комплексные числа и многочлены» (вопросы 1-4, 25-40)
3-ий – задача на любую из тем «Абстрактная алгебра», «Бинарные отношения», Комплексные числа и многочлены»,
4-ый – задача на повторение по теме «Линейная алгебра»
Первые 3 задания оцениваются в 10 баллов, 4-ое задание оценивается в 6 баллов.

Вопросы к экзамену

1. Понятие бинарного отношения
   1.1. Понятие декартова произведения множеств. Пример.
   1.2. Определение бинарного отношения между элементами двух множеств. Область отправления, область прибытия, область определения и область значения отношения. Пример.
2. Виды бинарных отношений
   2.1. Понятие бинарного отношения, заданного на некотором множестве.
   2.2. Определения видов бинарных отношений. Примеры.
3. Понятие функционального отношения
   3.1. Понятие отображения (функции). Образ, прообраз элемента при заданном отображении.
   3.2. Область отправления, область прибытия, область определения и область значения функционального отношения.
4. Виды функциональных отношений
   4.1. Понятие инъекции.
   4.2. Понятие сюрьекции.
   4.3. Понятие биекции. Примеры.
5. Группоид
   5.1. Понятия бинарной алгебраической операции и группоида.
   5.2. Примеры группоида и не группоида.
6. Полугруппа
   6.1. Понятия бинарной алгебраической операции. Ассоциативность операции.
   6.2. Понятие полугруппы.
   6.3. Доказательство обобщенного закона ассоциативности.
7. Группа
   7.1. Аксиомы группы.
   7.2. Примеры групп.
8. Нейтральный элемент
   8.1. Понятия нейтрального элемента.
   8.2. Доказательство свойства о единственности нейтрального элемента в группоиде в случае его существования.
   8.3. Следствие о единственности нейтрального элемента в группе.
9. Элемент, симметричный данному
   9.1. Понятия элемента, симметричного данному.
   9.2. Доказательство свойства о единственности элемента, симметричного данному, в полугруппе в случае его существования.
   9.3. Следствие о единственности элемента, симметричного данному, в группе.
10. Свойства групп
    10.1. Понятие группы.

10.2. Перечень свойств группы.
10.3. Доказательство свойства об элементе, симметричном композиции данных элементов, в группе.

11. Подгруппа
    11.1. Понятие подгруппы.
    11.2. Формулировка и доказательство критериев о подгруппе.
12. Кольцо
    12.1. Определение кольца.
    12.2. Пример кольца.
13. Свойства колец
    13.1. Перечень свойств колец.
    13.2. Доказательство свойства о дистрибутивности умножения относительно разности. Свойство об обобщенном законе дистрибутивности
14. Свойства колец
    14.1. Перечень свойств колец.
    14.2. Доказательство свойства о сократимости умножения
15. Свойства колец
    15.1. Перечень свойств колец.
    15.2. Доказательство свойства о произведении любого элемента на нулевой элемент
16. Подкольцо
    16.1. Понятие подкольца.
    16.2. Доказательство критерия подкольца.
17. Поле
    17.1. Определение поля.
    17.2. Пример поля.
18. Свойства полей
    18.1. Перечень свойств полей.
    18.2. Доказательство свойства об отсутствии в поле делителей нуля.
19. Свойства полей
    19.1. Перечень свойств полей.
    19.2. Доказательство свойств операции деления в поле.
20. Подполе
    20.1. Понятие подполя.
    20.2. Доказательство критерия подполя.
21. Изоморфизм алгебраических структур с одной бинарной алгебраической операцией
    21.1. Понятия изоморфизма, изоморфных структур с одной бинарной алгебраической операцией.
    21.2. Пример изоморфных алгебраических структур.
22. Свойства изоморфных структур с одной бинарной алгебраической операцией
    22.1. Понятие изоморфных структур с одной бинарной алгебраической операцией
    22.2. Теорема об изоморфных группоидах, полугруппах и группах.
23. Свойства изоморфизма
    23.1. Понятие изоморфизма. Тождественное отображение.
    23.2. Доказательство теоремы о рефлексивности, симметричности и транзитивности изоморфизма.
24. Изоморфизм колец и полей
    24.1. Определения изоморфных колец и полей. Пример.
    24.2. Теорема об изоморфных кольцах и полях.
25. Поле комплексных чисел
    25.1. Множество $C = \{\alpha | \alpha = (a,b), a,b \in R\}$ и операции на нем.
    25.2. Доказательство того, что $(C,+,\cdot)$ является полем.
26. Построение поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел с точностью до изоморфизма
    26.1. Множество $K = \{\alpha | \alpha = (a,0), a \in R\}$ как подполе поля комплексных чисел.

26.2. Доказательство того, что $(K,+,\cdot)$ изоморфно $(R,+,\cdot)$.

27. Мнимая единица
    27.1. Понятие мнимой единицы как упорядоченной пары.
    27.2. Возведение мнимой единицы в натуральную степень.
28. Алгебраическая форма записи комплексного числа
    28.1. Определение алгебраической формы записи комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа.
    28.2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Комплексно-сопряженные числа.
29. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
    29.1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними.
    29.2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
30. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме
    30.1. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.
    30.2. Возведение в натуральную степень. Формула Муавра.
    30.3. Извлечение корня из комплексных чисел.
31. Экспоненциальная форма записи комплексного числа
    31.1. Формула Эйлера. Определение экспоненциальной формы записи комплексного числа. Пример.
    31.2. Действия над комплексными числами, записанными в экспоненциальной форме.
32. Матричная форма записи комплексного числа
    32.1. Определение матричной формы записи комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в матричной форме.
    32.2. Мнимая единица в матричной форме записи.
33. Корни n-ой степени из единицы
    33.1. Общий вид корня n-ой степени из единицы
    33.2. Множество корней n-ой степени из единицы как коммутативная группа.
34. Корни n-ой степени из единицы
    34.1. Общий вид корня n-ой степени из единицы
    34.2. Теорема о связи корней n-ой степени из любого комплексного числа с корнями n-ой степени из единицы.
35. Первообразные корни из единицы
    35.1. Понятие первообразного корня из единицы. Пример.
    35.2. Теорема о множестве первообразных корней n-ой степени из единицы.
36. Корни многочленов
    36.1. Формулировка и доказательство теоремы Безу.
    36.2. Следствие теоремы Безу о корне многочлена.
37. Схема Горнера
    37.1. Равенство многочленов.
    37.2. Вывод схемы Горнера.
38. Основная теорема алгебры
    38.1. Формулировка основной теоремы алгебры.
    38.2. Доказательство следствия основной теоремы алгебры.
39. Формулы Виета
    39.1. Равенство многочленов.
    39.2. Вывод формул Виета для многочленов n-ой степени.
    39.3. Формулы Виета для многочленов 3-й степени.
40. Многочлены с действительными и целыми коэффициентами
    40.1. Теорема о разложении многочлена с действительными коэффициентами на множители.
    40.2. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами и следствия из нее.

Примерные задачи задания 3

1. Перечислить пары элементов, находящихся в отношении φ, заданном на множествах X и $У$. Найти область определения и область значения отношения φ. $X = \{-2,1,3\}$, $У = \{-6,-2,2,6\}$, $x\varphi y \Leftrightarrow x + y \le 0$.

2. Определить вид бинарного отношения φ, заданного на указанном множестве.
$x\varphi y \Leftrightarrow x, y$ – параллельны, M – множество прямых на плоскости.

3. Какую алгебраическую структуру образует множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Z$

а) относительно сложения, б) относительно умножения.

4. Выяснить, образует ли множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{3}$, где $a, b \in Z$, кольцо или поле относительно операций сложения и умножения.

5. Найти значение выражения $\frac{(1+2i)\cdot(3-i)}{2-i} - i(5+3i)$.

6. Найти действительные решения уравнения $(7-i)x + (-2+4i)y = 11 + x$.

7. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}(z+i) > 5$.

8. Представить комплексное число $z = -4 + 4i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах

9. Найти z^{12}, если $z = -4 + 4i$

10. Найти $\sqrt[3]{z^5}$, если $z = -4 + 4i$

11. Найти $z^6 \cdot z_2^7$, если $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -4 + 4i$

12. Найти все корни многочлена $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

13. Составить многочлен, корни и соответствующие их кратности которого в таблице:

корень	4	-3	$1+i$
кратность	1	2	1

14. Составить многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = -i$ и $x_2 = 4 - i$ – два из его корней.

Примерные задачи задания 4 по теме «Линейная алгебра»

1. Доказать, что векторы e_1 и e_2 образуют базис, если e_1 (1, 3) и e_2 (-2, 1) в базисе $< i, j >$.

Найти матрицу перехода от базиса $< i, j >$ к базису $< e_1, e_2 >$.

2. Известно, что e_1 (1, 3) и e_2 (-2, 1) в базисе $< i, j >$. Найти матрицу перехода от базиса $< e_1, e_2 >$ к базису $< i, j >$.

3. Найти координаты вектора a в базисе $< i, j >$, если в базисе $< e_1, e_2 >$ вектор $a = (4, -3)$ и векторы e_1 (1, 3) и e_2 (-2, 0) в базисе $< i, j >$.

4. Проверить, является ли базис $< e_1, e_2 >$, где векторы e_1 (1, 3) и e_2 (-2, 1) ортогональным? Если нет, то применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис.

5. Найти норму вектора $a = (2, -3, \sqrt{3})$.

6. Доказать, что система векторов e_1 (1, 3, 0), e_2 (2, 5, 3), e_1 (1, –2, 4) линейно независима.

7. Доказать, что система векторов e_1 (1, 3, 0), e_2 (2, 11, -4), e_1 (1, –2, 4) линейно зависима.

8. Записать матрицу квадратичной формы $x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 - 6x_3^2$.

9. Привести к каноническому виду следующие квадратичные формы:

а) $f=2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-8x_3^2$, б) $f=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ -x + 2y + z = 0, \\ 3x + y = 2. \end{cases}$

11. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.