Vejledende eksamensopgaver i matematik

Følgende pdf indeholder:
- STX Matematik B ny reform opgavesæt 1 (s. 2-6)
- STX Matematik B ny reform opgavesæt 2 (s. 7-10)
- STX Matematik A ny reform opgavesæt 1 (s. 11-16)

Opgaverne er skrevet som de opgaver, som vil kunne komme til eksamen på STX B og A. Enkelte opgaver er endvidere lånt fra EMU.dk. Bemærk, at STX B opgaverne også 'kan' bruges af HF B studerende.

Venligst bemærk, at opgaverne ikke har fået angivet hvor mange point de enkelte delopgaver giver. Tanken med sættet her er, at man får trænet i at løse opgaver, så formålet er ikke at anvende disse opgaver til prøver etc (det udelukker dog ikke muligheden). Læreren skal bare selv være kreativ med pointfordelingen.

Hentet fra: Matematik Universet

Matematik B, STX
Vejledende opgavesæt

OBS: Niveauet er STX/HF matematik B. Der er i alt 25 spørgsmål fordelt på 14 opgaver, hvor 7 af dem er i delprøve 1. Varighed:

- Delprøve 1: 1½ time kun med den centralt udmeldte formelsamling.
- Delprøve 2: 2½ time med alle hjælpemidler.

Delprøve 1

Opgave 1.

a) Reducer udtrykket

$$3a(a+b)-a(3b+a)$$

b) Løs ligningen

$$2x+5=8+x$$

Opgave 2. En andengradsligning er givet ved

$$x^2-7x+10=0$$

a) Bestem diskriminanten d, og beskriv, hvad værdien af d fortæller om antallet af løsninger til ligningen.

Opgave 3. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=x+2 \qquad\qquad g(x)=\sqrt{x}$$

a) Bestem $g(f(2))$.

Opgave 4. To vektorer $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ er givet ved

$$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}t\\6\end{pmatrix}$$

Hvor t er et tal.

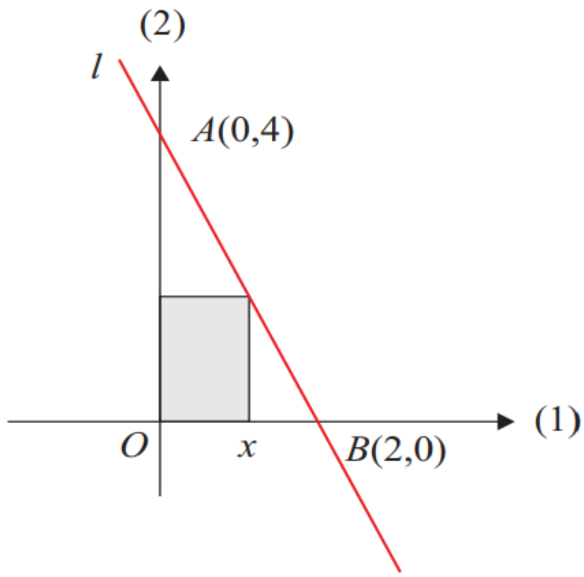
a) Bestem t, så $det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=30$.

Opgave 5. For en binomialfordelt stokastisk variabel X er sandsynligheden for $X = 5$ givet ved

$$P(X = 5) = K(12, 5) \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^7$$

a) Angiv sandsynlighedsparameteren og antalsparameteren for X.

Opgave 6. På figuren ses en ret linje l gennem punkterne A og B. Desuden er et rektangel indskrevet i trekant OAB som vist på figuren.



a) Bestem arealet af rektanglet som funktion af x.

b) Bestem den værdi af x, der gør arealet af rektanglet størst mulig.

Opgave 7. En funktion f er givet ved

$$f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1$$

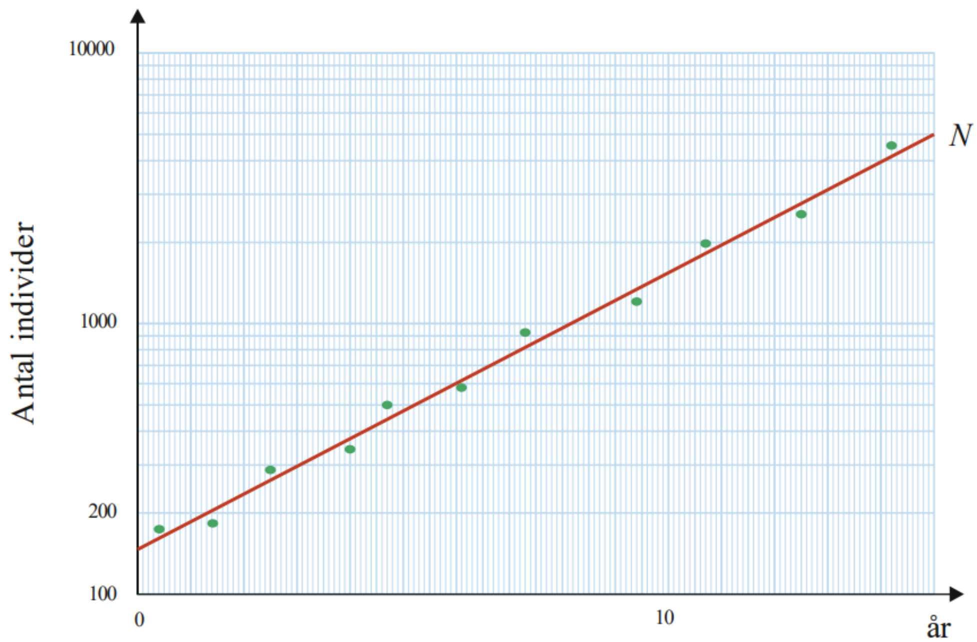
hvor a er en konstant.

a) Bestem $f'(x)$.

b) Bestem a, så $f'(1) = -3$

Delprøve 2

Opgave 8.



Over en periode har man observeret udviklingen i antallet af individer i en bestemt population af dyr. I en model kan udviklingen beskrives ved en funktion N, hvor $N(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i år). På figuren ses et enkeltlogaritmisk plot af observationerne sammen med grafen for N.

Det oplyses, at $N(3) = 300$ og $N(14) = 4000$.

a) Bestem en forskrift for N.

b) Benyt modellen til at bestemme fordoblingstiden for antallet af individer i populationen.

Opgave 9. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 6$$

a) Tegn grafen for f.

En vandret linje l med ligningen $y = b$ skærer grafen for f i enten et, to eller tre punkter.

b) Bestem de værdier af b, for hvilke linjen l skærer grafen for f i netop to punkter.

Opgave 10. En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$$

og en linje l er givet ved

$$4x - 3y + k = 0$$

hvor k er en konstant.

a) Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen l, når $k = 23$.

Der er to værdier af k, for hvilke linjen l er tangent til cirklen.

b) Bestem de to værdier af k.

Opgave 11. I nedenstående tabel er der givet en række data.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2.0	3.25	2.3	4.8	5.0	6.0	5.75	10.3	5.75	7.2	6.3

Datasættet kan beskrives vha. en lineær funktion

$$f(x) = ax + b$$

a) Bestem tallene a og b

b) Bestem residualspredningen s.

c) Bestem, hvor mange procent af residualerne, der ligger inden for intervallet $[-2s; 2s]$.

Opgave 12.

Figuren viser en sekssidet terning, hvor to af siderne er røde, to af siderne er blå og to af siderne er grønne. Terningen kastes en enkelt gang.

a) Bestem sandsynligheden for, at terningen lander på en blå side.

Terningen kastes 20 gange.

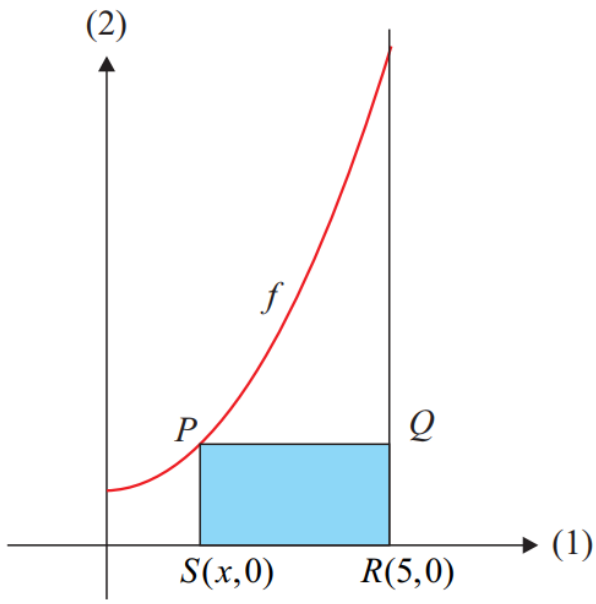
b) Bestem sandsynligheden for, at terningen netop 6 gange lander på en blå side.

c) Bestem sandsynligheden for, at terningen mindst 6 gange lander på en blå side.

Opgave 13. På figuren ses grafen for en funktion f, der er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 3, x > 0$$

Endvidere ses et rektangel $PQRS$, hvor R og S ligger på førsteaksen. Det oplyses, at punktet P ligger på grafen for f, og at punktet R har koordinaterne $(5, 0)$.



a) Gør rede for, at arealet af rektanglet $PQRS$ udtrykt ved x er givet ved

$$A(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 15$$

b) Bestem x, så arealet bliver størst muligt, idet $0 < x < 5$.

Opgave 14. En linje l er bestemt ved ligningen

$$y = 3x - 8$$

a) Bestem projektionen af punktet $P(2, 8)$ på linjen l.

Matematik B, STX
Vejledende opgavesæt 2

OBS: Niveauet er STX/HF matematik B. Der er i alt 25 spørgsmål fordelt på 16 opgaver, hvor 8 af dem er i delprøve 1. Varighed:

- Delprøve 1: 1½ time kun med den centralt udmeldte formelsamling.
- Delprøve 2: 2½ time med alle hjælpemidler.

Delprøve 1

Opgave 1.

a) Reducer udtrykket $(a+b)^2 + 2(b^2 - ab)$

b) Isoler h i ligningen

$$\frac{ph}{4} = 4M$$

Opgave 2.

a) Bestem tallet k, så andengradsligningen

$$2x^2 - 3x + k = 0$$

har netop en løsning.

Opgave 3. I et koordinatsystem i planen er tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -13 \\ 23 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

a) Undersøg, om $\vec{a} + \vec{b}$ kan skrives som $k \cdot \vec{c}$, hvor k er en konstant.

Opgave 4. En funktion $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & 0 \leq x < 4 \\ 0.5x + 14 & 4 \leq x \end{cases}$$

a) Undersøg om punktet $P(3, 8)$ ligger på grafen for $f(x)$

Opgave 5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(3x^2 + 3)$$

a) Bestem $f'(1)$.

Opgave 6. En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

Opgave 7. En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 20 og sandsynlighedsparameter $1/4$.

a) Bestem middelværdien for X

b) Afgør om spredningen for X er større end 4.

Opgave 8. En funktion f er bestemt ved $f(x) = e^x + 7x$

a) Gør rede for, at f er en voksende funktion.

Delprøve 2

Opgave 9. I 2001 fandt amerikanske og canadiske forskere, at sammenhængen mellem den oplevede temperatur og den aktuelle temperatur ved forskellige vindhastigheder, det såkaldte "windchill index", kan beskrives ved

$$w = 13.3 + 0.62 \cdot t - 13.95 \cdot v^{0.16} + 0.486 \cdot t \cdot v^{0.16}$$

hvor w er "windchill index" (målt i grader celsius), t er den aktuelle målte temperatur (målt i grader celsius), og v er hastigheden (målt i m/s).

a) Bestem "windchill index", når den aktuelle temperatur er -5^oC, og vindhastigehden er $20m/s$.

b) Bestem den vindhastighed, der ved en temperatur på -3^oC giver et "windchill index" på -10^oC

Kilde: www.dmi.dk

Opgave 10. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$$

a) Bestem nulpunkterne for $f(x)$.

b) Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

Linjen l med ligningen $y = x - 9$ er tangent til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$. En anden linje m er parallel med linjen l og tangerer grafen for f i punktet Q.

c) Bestem førstekoordinaten til punktet Q.

Opgave 11. I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(-3,7)$ og $B(5,-10)$ samt en vektor $\vec{a} = \binom{-7}{2}$

a) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$.

Opgave 12. En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 20 og sandsynlighedsparameter 0.24.

a) Bestem $P(X \leq 7)$
Bestem $P(7 \leq X \leq 10)$

Opgave 13. Tabellen viser antallet af Twitter-brugere for en række måneder fra 1. januar 2010 til 1. januar 2012.

Antal måneder efter 1. januar 2010	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Antal brugere (i mio.)	30	40	49	54	68	85	101	117	138

I en model antages det, at udviklingen i antallet af Twitter-brugere kan beskrives ved

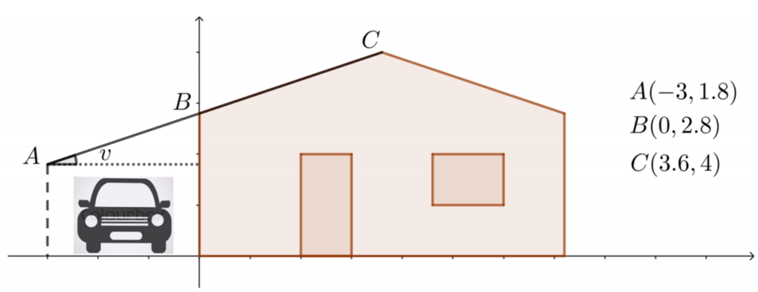
$$f(t) = b \cdot a^t$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af Twitter-brugere (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i måneder efter 1. januar 2010).

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

b) Bestem $f'(30)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Opgave 14. På figuren ses en model af en husgavl med tilhørende carport indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Carportens tag BA er udført i forlængelse af husets tag CB.



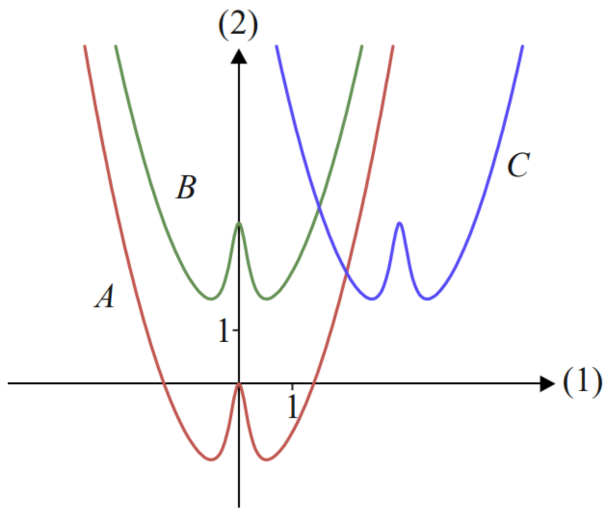
a) Gør rede for, at carportens og husets tag er en del af den samme rette linje.

b) Bestem hældningsvinklen v på carportens tag

Opgave 15. Ud fra en funktion f er funktionerne g og h bestemt ved

$$g(x) = f(x) - 3$$
$$h(x) = f(x - 3)$$

På figuren ses graferne for de tre funktioner f, g og h.



a) Angiv for hver af graferne A, B og C, hvilken af funktionerne f, g og h den hører til. Begrund svaret.

Opgave 16. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

a) Tegn grafen for $f(x)$.

b) Gør rede før, at $f(x) = 1$ har to løsninger.

Matematik A, STX
Vejledende opgavesæt

OBS: Niveauet er STX matematik A. Der er i alt 29 spørgsmål fordelt på 19 opgaver, hvor 11 af dem er angivet i delprøve 1. Varighed:

- Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.
- Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler.

Delprøve 1

Opgave 1.

a) Reducer udtrykket $(2a+3)(3a-5)+a$

b) Sæt tallet 3 uden for en parentes i udtrykket $15+3a$

Opgave 2. I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til P er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t^2 - 24t \\ t^2 - t - 6 \end{pmatrix}, \quad -5 \leq t \leq 7$$

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t=-3$.

Opgave 3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

a) Bestem $\int_0^1 f(x)dx$

Opgave 4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{x^2-2x}$$

a) Bestem $f'(1)$.

b) Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

Opgave 5. En matrix M er givet ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

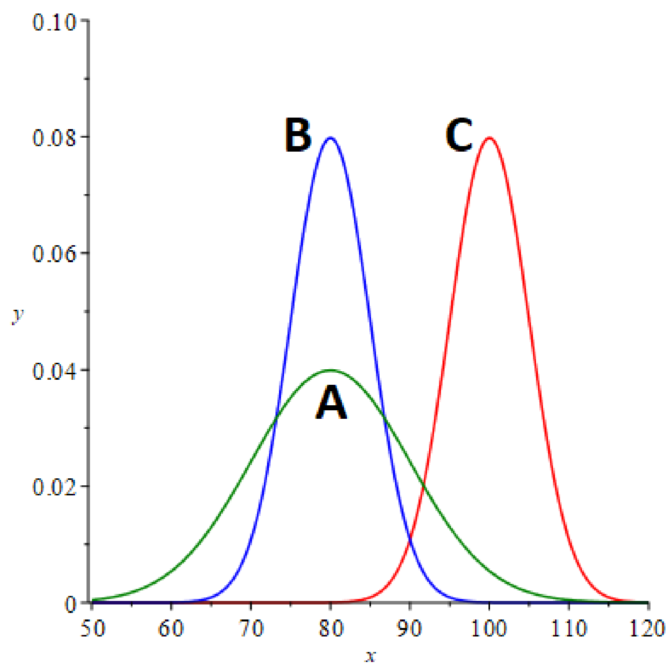
a) Bestem determinanten af M.

En vektor $\vec{v}$ er givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Bestem $M \cdot \vec{v}$

Opgave 6. Nedenstående figur viser graferne for tæthedsfunktionerne hørende til tre normalfordelte stokastiske variable.



a) Gør rede for, hvilken af graferne A, B eller C der hører til tæthedsfunktionen for den normalfordelte stokastiske variabel, der har middelværdi $\mu = 80$ og spredning $\sigma = 5$.

Opgave 7. En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim bin(5, \frac{1}{2})$

a) Vis, at $P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}$

Opgave 8. Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Grafen for f er en parabel.

a) Tegn en skitse af en mulig graf for f, når det oplyses, at $a < 0, b > 0$ og $c > 0$

Opgave 9. I en model for rygtespredning inden for en gruppe på 500 personer er antallet af personer y, der har hørt et bestemt rygte, en funktion af tiden t. Der gælder, at den hastighed, hvormed y vokser, er proportional med produktet af y og det antal personer, der ikke har hørt rygtet. Proportionalitetsfaktoren er 0.0014, når tiden t måles i døgn.

a) Opstil en differentialligning, som y må opfylde.

Opgave 10. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2e^{2x} - x^2$$

a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' + 2x = 2y + 2x^2$$

Opgave 11. Udviklingen i antallet af fugle på en ø kan beskrives ved

$$N(t) = \frac{1300}{1 + 12e^{-0.07t}}$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af fugle på øen til tiden t (målt i måneder)

a) Bestem $N(0)$, og fortolk resultatet.

Delprøve 2

Opgave 12. En vektorfunktion $\vec{r}(t)$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t^2 - 24t \\ t^2 - t - 6 \end{pmatrix}$$

a) Tegn banekurven for $\vec{r}$, når $-5 \leq t \leq 7$.

Opgave 13. Tabellen viser data fra en bestemt undersøgelse.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	1	1.5	2.1	2.5	3.1	3.5	4	4.5	5	5.4	6	6.5	7.3	7.5	8	8.4

I en model antages det, at udviklingen i data kan beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Hvor $f(x)$ er data og x er tid, målt i timer.

a) Bestem tallene a og b.

b) Benyt residualplottet til at vurdere modellen.

c) Bestem et 95%-konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen.

Opgave 14. I en model for udviklingen i antal insekter i en bestemt population er antal insekter som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0.01\sin(0.017t - 1.03)N, 0 \leq t \leq 365$$

hvor $N(t)$ betegner antal insekter (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i antal døgn). Det oplyses, at der til tidspunktet $t = 0$ er 100 mio. insekter i populationen.

a) Bestem en forskrift for N, og tegn grafen for N

b) Bestem det tidspunkt, hvor populationens væksthastighed er størst.

Opgave 15. En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

a) Tegn grafen for $f(x, y)$.

b) Bestem gradienten for $f(x, y)$.

c) Bestem tangentplanen til $f(x, y)$ i punktet $(1, 1, 0)$.

Opgave 16. Længden af kabler X som bliver produceret en hvilken som helst dag af et bestemt kabelfabrikant, antages at være en normaltfordelt stokastisk variabel med middelværdi 5000 og standardafvigelse 200.

a) På hvilken brøkdel af de dage, som virksomheden opererer, vil antallet af kabel, som produceres overstige 5500 meter?

Opgave 17. I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren til P givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

Punktet P passerer punktet $Q(1,0)$ til tidspunkterne t_1 og t_2.

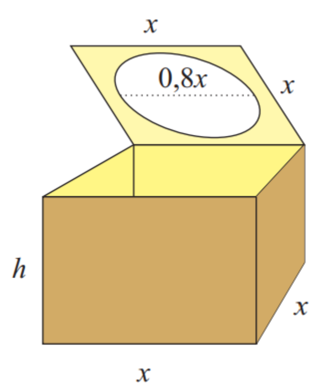
a) Bestem t_1 og t_2.

Mellem de to tidspunkter t_1 og t_2 afsnører banekurven i 1. og 4. kvadrant en punktmængde M, der har et areal T. Det oplyses, at

$$T = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}'(t) \cdot \hat{\vec{r}}(t) dt$$

b) Bestem arealet T af punktmængden M.

Opgave 18. En kasse har kvadratisk bund med sidelængden x, og højden af kassen er h. Kassen har et cirkulært hul i låget med en diameter på $0.8x$



a) Bestem kassens overfladeareal udtrykt ved x og h.

Det oplyses, at kassens rumfang er 10, og at $1 \leq x \leq 10$.

b) Bestem h udtrykt ved x. Bestem den værdi af x, der giver kassen det mindste overfladeareal.

Opgave 19. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 e^x \cos(x)$$

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion F til f, hvis graf går gennem punktet $P(1, 1)$.