Matematik B, HFE

1. juni 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) r isoleres i formlen $V = \frac{1}{3}\pi h r^2$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2 \Leftrightarrow 3V = \pi h r^2 \Leftrightarrow \frac{3V}{\pi h} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$$

Normal vil man skrive $\pm$, men radius er jo sådan set kun positiv, så dermed er symbolet ikke skrevet i resultatet, men formelt set skulle det være der, hvis r nu ikke var radius.

Opgave 2:

a) En passende model er en lineær sammenhæng, idet man har $b = 44376$ og $a = 1000$, så

$$f(x) = 1000x + 44376$$

Hvor $f(x)$ angiver antallet af danskere der er fyldt 90 år, til tidspunktet x, målt i antal år efter d. 1. januar år 2017.

Opgave 3:

a) Andengradsligningen løses. Diskriminanten bestemmes.

$$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 4 \cdot 21 = 16 + 84 = 100 = 10^2$$

Det betyder to løsninger.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{10^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-4+10}{2} = 3 \\ \frac{-4-10}{2} = -7 \end{cases}$$

Så $x = -7 \vee x = 3$ er løsningerne.

Opgave 4:

a) Forholdet mellem trekanterne bestemmes.

$$k = \frac{|AB| + |AA_1|}{|AB|} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

Så kan $|AC|$ bestemmes.

$$|AC| = \frac{|A_1C_1|}{k} = \frac{8}{4/3} = \frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Opgave 5:

a) De samtlige stamfunktioner bestemmes, og kan generaliseres ved blot at bruge k, for $k \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^4 + 7\right) dx = \ln(x) + \frac{1}{5}x^5 + 7x + k, \qquad x > 0$$

Som er det ønskede svar.

Opgave 6:

a) Arealet af et rektangel er

$$A = x \cdot y$$

Så først findes arealet, når $x = 2$ og $y = 12$, dvs. $A = 2 \cdot 12 = 24$.

Sæt $y = 8$, og $A = 24$, så findes x.

$$24 = x \cdot 8 \Leftrightarrow x = \frac{24}{8} = 3$$

Sæt $x = 6$, og $A = 24$, så findes y.

$$24 = 6 \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{24}{6} = 4$$

Tabellen er

x	2	3	6
y	12	8	4

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7: Via Maple

a) Der foretages eksponentiel regression via Maple.

År 1975 svarer til $x = 0$.

$E1 := [0, 10, 20, 30, 40]$:

$E2 := [1.6, 3.3, 6.8, 13.5, 29.3]$:

$f(x) := ExpReg(E1, E2, x)$:

$evalf[5](f(x))$

$$1.5959\ 1.0749^x$$

Tallet $b = 1.5959$ og $a = 1.0749$.

b) Omregn fremskrivningsfaktoren til vækstraten.

$$r = a - 1 = 1.0749 - 1 = 0.0749 = 7.49\%$$

Tallet fortæller, at for hvert år der går i perioden 1975-2015, vokser udviklingen af havtang med 7.49% ifølge modellen.

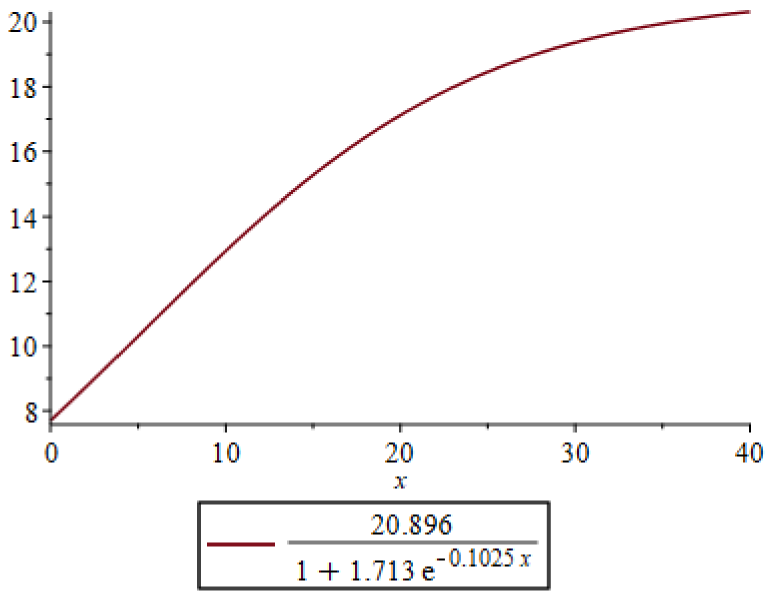
Opgave 8: Via Maple

a) Grafen tegnes i Maple.

$$f(x) := \frac{20.896}{1 + 1.713 \cdot \exp(-0.1025 \cdot x)}$$

$$f := x \mapsto \frac{20.896}{1 + 1.713\, e^{-0.1025\, x}}$$

$plot(f(x), x = 0..40, legend = f(x))$



b) År 2010 svarer til $x = 35$, så

$f(35)$

$$19.95046225$$

Dvs. ifølge modellen var vinsalget i år 2010 på $\mathbf{19.95}$ mio. liter ren alkohol.

c) Væksthastigheden betyder f', så $x = 35$ dvs. år 2010 giver en væksthastighed på

$f(35)$

$$0.09253212593$$

Dvs. ifølge modellen blev vinsalget øget hvert år efter år 2010 med $\mathbf{0.0925}$ mio. liter ifølge modellen.

Opgave 9: Via Maple

a) Funktionen defineres og differentieres i Maple.

$f(x) := x^3 + 3x^2 + 1.5 \cdot x - 0.5$

$$f := x \mapsto x^3 + 3x^2 + 1.5x - 0.5$$

$f(x)$

$$3x^2 + 6x + 1.5$$

Som er den afledede. Dernæst bestemmes monotoniforhold, så man løser

$f(x) = 0$

$$3x^2 + 6x + 1.5 = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -0.2928932188], [x = -1.707106781]]$$

Der vælges tre tal, -2, -1 og 0.

$f(-2)$

$$1.5$$

$f(-1)$

$$-1.5$$

$f(0)$

$$1.5$$

Så kan man lave et monotoniskema, dette gøres i Word.

x		-1.707		-0.293	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Dermed er

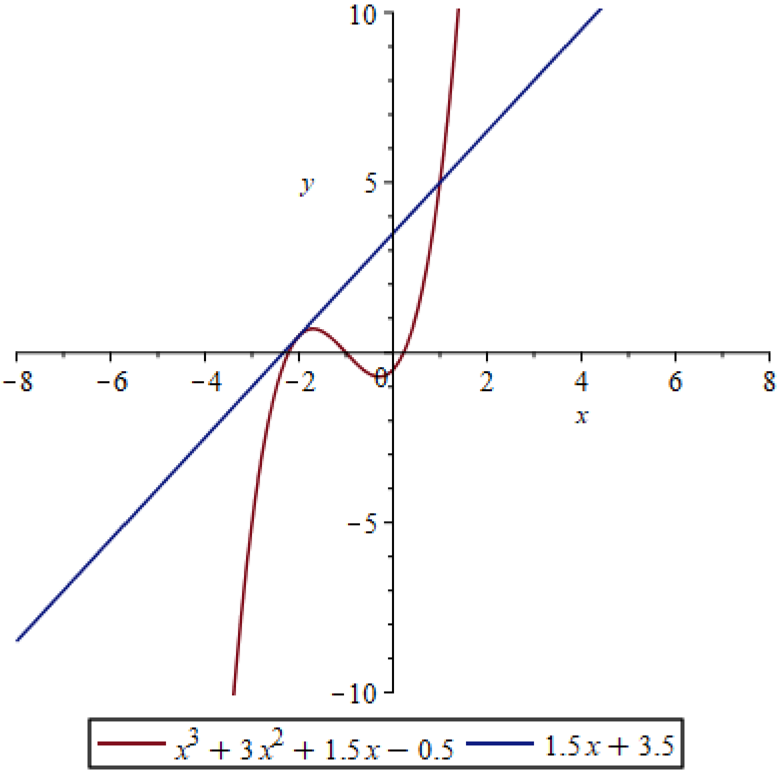
- $f(x)$ voksende i intervallet $]-\infty; -1.707]$ og intervallet $[-0.293; \infty[$
- $f(x)$ aftagende i intervallet $[-1.707; -0.293]$.

b) I Maple defineres g, og begge funktioner tegnes.

$g(x) := 1.5 \cdot x + 3.5$

$$g := x \mapsto 1.5\,x + 3.5$$

$plot([f(x), g(x)], x = -8..8, y = -10..10, legend = [f(x), g(x)])$



c) Ligningerne $f(x) = g(x)$ løses.

$f(x) = g(x)$

$$x^3 + 3x^2 + 1.5x - 0.5 = 1.5x + 3.5$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1.], [x = -2.], [x = -2.]]$$

Man kan undersøge det ved at sætte hældningstallet fra $g(x)$ lig med den afledede og se, om man får et svar som ligner det oppe over.

$f'(x) = 1.5$

$$3x^2 + 6x + 1.5 = 1.5$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -2.], [x = 0.]]$$

Det ses, at $x = -2$ går igen. Dermed er $g(x)$ tangent til $f(x)$ i $x = -2$.

Opgave 10:

a) Vinkel C bestemmes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(118)}{15.3} = \frac{\sin(C)}{6.5} \Leftrightarrow \sin(118) \cdot 6.5 = \sin(C) \cdot 15.3 \Leftrightarrow$$

$$\sin(C) = \frac{\sin(118) \cdot 6.5}{15.3} \Leftrightarrow C = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(118) \cdot 6.5}{15.3}\right) \approx 22.031^o$$

b) Først findes vinkel A.

$$A = 180^o - B - C = 180^o - 118^o - 22.031^o = 39.969^o$$

Længden $|DC|$ bestemmes. Her er vinkel $A_{ADC} = 39.969^o/2 = 19.9845^o$.Dernæst findes vinkel D.

$$D = 180^o - A_{ADC} - C = 180^o - 19.9845^o - 22.031^o = 137.9845^o$$

Så benyttes sinusrelationerne til at finde DC.

$$\frac{\sin(137.9845)}{15.3} = \frac{\sin(19.9845)}{|DC|} \Leftrightarrow$$

$$\sin(137.9845) \cdot |DC| = \sin(19.9845) \cdot 15.3 \Leftrightarrow$$

$$|DC| = \frac{\sin(19.9845) \cdot 15.3}{\sin(137.9845)} = 7.812$$

Som er længden $|DC|$.

Opgave 11:

a) Marken er $4000m^2$, og er delt ind i 4 felter, så hvert felt er $1000m^2$, dvs. det er arealet af et felt. Længden af et felt er x, bredden af et felt er h. Ifølge arealformlen har man

$$1000 = x \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{x}$$

Omkredsen af et felt er $O = 2x + 2h$. Dem er der fire af, så $4O = 4 \cdot (2x + 2h) = 8x + 8h$. Men pas på, et hegn må ikke overlappe hinanden. Derfor skal man trække $3h$ fra, dermed er $O_{\text{mark}} = O - 3h = 8x + 8h - 3h = 8x + 5h$

Men h blev bestemt før, så man erstatter h med resultatet ovenfor. Dermed er

$$f(x) = 8x + 5 \cdot \left(\frac{1000}{x}\right) = 8x + 5 \cdot \frac{1000}{x}$$

Som er den ønskede formel.

b) Man differentierer $f(x)$.

$$f'(x) = 8 - 5 \cdot \frac{1000}{x^2}$$

Man løser ligningen $f'(x) = 0$. Husk, at $10 < x < 50$.

$$8 - \frac{5000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 8 = \frac{5000}{x^2} \Leftrightarrow 8x^2 = 5000 \Leftrightarrow x^2 = 625 \Leftrightarrow x = 25$$

Den anden afledede benyttes.

$$f''(x) = \frac{10000}{x^3}$$

Så er $f''(25) = \frac{10000}{25^3} = 0.64$, og da $f''(25) > 0$ så er der minimum. Det betyder, at $x = 25$ meter giver den mindste længde af hegnet.

Opgave 12: Via Maple

a) I Maple udregnes arealet.

Lad $k = 4$, så er

$f(x) := 4 \cdot (-x^2 + 1)$

$$f := x \mapsto -4x^2 + 4$$

$A_{rødt} = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

$$A_{rødt} = \frac{16}{3}$$

Så arealet er $\frac{16}{3}$.

b) I Maple udregnes k.

restart :

Arealet af det røde område skal være 10.

$10 = \int_{-1}^{1} \left(k \cdot (-x^2 + 1)\right) dx$

$$10 = \frac{4k}{3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$\left[\left[k = \frac{15}{2}\right]\right]$$

Så $k = \frac{15}{2}$ giver et areal på 10.

Matematik B, HFE

15. august 2018

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Toppunktet

Opgave 2:

a) Toppunktet

Opgave 3:

a) Toppunktet

Opgave 4:

a) Toppunktet

Opgave 5:

a) Toppunktet

Opgave 6:

a) Toppunktet

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7:

a) T

b) T

c) T

Opgave 8:

a) T

b) T

c) T

Opgave 9:

a) T

b) T

c) T

Opgave 10:

a) T

b) T

c) T

Opgave 11:

a) T

b) T

c) T

Opgave 12:

a) T

b) T

c) T

Opgave 13:

a) T

b) T

c) T

Opgave 14:

a) T

b) T

c) T

Opgave 15:

a) T

b) T

c) T

Opgave 16:

a) T

b) T

c) T

Matematik B, HFE

07. december 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Toppunktet

Opgave 2:

a) Toppunktet

Opgave 3:

a) Toppunktet

Opgave 4:

a) Toppunktet

Opgave 5:

a) Toppunktet

Opgave 6:

a) Toppunktet

Løsningsforslag med hjælpemidler

Maple, GeoGebra, Excel & WordMat.

Opgave 7:

a) T

b) T

c) T

Opgave 8:

a) T

b) T

c) T

Opgave 9:

a) T

b) T

c) T

Opgave 10:

a) T

b) T

c) T

Opgave 11:

a) T

b) T

c) T

Opgave 12:

a) T

b) T

c) T

Opgave 13:

a) T

b) T

c) T

Opgave 14:

a) T

b) T

c) T

Opgave 15:

a) T

b) T

c) T

Opgave 16:

a) T

b) T

c) T