[5] كون المتتاليات الهندسية إذا علم منها ما يأتي:

أ) $ح_1 = \sqrt{3}$ ، $ر = \sqrt{2}$

الحل:

أ) $ح_1 = \sqrt{3}$ ، $ح_2 = ح_1 ر = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

$ح_3 = ح_2 \times ر = \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$

$\therefore <\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots>$

ب) $ح_1 = 12.8$ $ح_{10} = 0.025$

الحل:

$ح_ن = ح_1 (ر)^{ن-1}$

$ح_{10} = 12.8 (ر)^9 \Leftarrow 12.8 ر^9 = 0.025$

$ر^9 = \frac{0.025}{12.8} = \frac{25}{12800} = \frac{1}{252} = \frac{1}{2^9} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \leftarrow ر = \frac{1}{2}$

$<12.8 ، 6.4 ، 3.2، \ldots\ldots>$

جـ(مجموع ثلاث حدود متتالية منها يساوي (14) وحاصل ضربها يساوي(64).

الحل:

$ح_1 + ح_1 ر + ح_1 ر^2 = 14 \Leftarrow ح_1 (1 + ر + ر^2) = 14 \rightarrow (1)$

$ح_1 \times ح_1 ر \times ح_1 ر^2 = 64 \Leftarrow ح_1^3 ر^3 = (4)^3 \Leftarrow ح_1 ر = 4 \Leftarrow ح_1 = \frac{4}{ر} \rightarrow (2)$

عوض في (1) $\frac{4}{ر}(1 + ر + ر^2) = \frac{14}{1}$ أضرب بـ ر

$4(1 + ر + ر^2) = 14ر$

$4 + 4ر + 4ر^2 = 14ر \Leftarrow 4ر^2 - 10ر + 4 = 0$ قسم على 2

$2ر^2 - 5ر + 2 = 0$

$(ر - 2)(2ر - 1) = 0$

أما $ر - 2 = 0 \Leftarrow ر = 2$ عوض في (2) $ح_1 = \frac{4}{2} = 2$

<2، 4، 8، 16،.....>

$8=\frac{4}{\frac{1}{2}}=ح_1 \Leftarrow \boxed{ر=\frac{1}{2}} \Leftarrow ر=1 \Leftarrow 2ر-1=0$ أو

<8، 4، 2، 1، $\frac{1}{2}$،.....>

د) مجموع حديها الثاني والخامس 588 ومجموع حديها الثاني والثالث 84.

الحل: $ح_2+ح_5=588 \Leftarrow ح_1ر+ح_1ر^4=588$

$\Leftarrow \boxed{ح_1ر(1+ر^3)=588} \leftarrow (1)$

$ح_2+ح_3=84 \Leftarrow ح_1ر+ح_1ر^2=84$

$\boxed{ح_1ر(1+ر)=84} \leftarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1ر(1+ر^3)}{ح_1ر(1+ر)}=\frac{588}{84}$

$\Leftarrow \frac{1+ر^3}{1+ر}=7 \Leftarrow \frac{(1+ر)(1-ر+ر^2)}{(1+ر)}=7$

$\Leftarrow 1-ر+ر^2=7 \Leftarrow ر^2-ر-6=0$

$(ر+2)(ر-3)=0 \Leftarrow$ أما $ر+2=0 \Leftarrow \boxed{ر=-2}$

عوض في (2) $\Leftarrow -2ح_1(-2-1)=84 \Leftarrow 2ح_1=84 \Leftarrow \boxed{ح_1=42}$

∴ المتتالية (42، −84، + 168،.....)

أو $ر-3=0 \Leftarrow \boxed{ر=3} \Leftarrow 3ح_1(1+3)=84$

$12ح_1=84 \Leftarrow ح_1=\frac{84}{12}=7$

∴ المتتالية ⟨7، 21، 63،.....⟩

[6] أي من حدود المتتالية:

أ) ⟨2، $2\sqrt{3}$ ، 6،.....⟩ يساوي 54

الحل: $ح_1=2$ ، $ر=\frac{ح_2}{ح_1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ، $ح_ن=54$، ن=؟

$ح_ن=ح_1 ر^{ن-1}$ ⇐ $54=2(\sqrt{3})^{ن-1}$ قسمة على 2

$27=(3)^{\frac{1}{2}ن-1}$

$3^3=3^{\frac{ن-1}{2}}$ ⇐ $\frac{3}{1}=\frac{ن-1}{2}$ ⇐ ن−1=6 ⇐ ن=7 ⇐ الحد السابع

∴ $ح_7=2(\sqrt{3})^6=2\times27=54$

ب) ⟨324، 54، 9،.....⟩ يساوي $\frac{1}{144}$ الحل ر = $\frac{9}{54}=\frac{1}{6}$

$ح_ن=ح_1 ر^{ن-1}$ ⇐ $\frac{1}{144}=\left(\frac{1}{6}\right)^{ن-1}\times324$

∴ $\left(\frac{1}{6}\right)^{ن-1}=\frac{1}{324\times144}=\frac{1}{3\times2^6}=\frac{1}{(3\times2)^6}=\left(\frac{1}{6}\right)^6$

∴ ن−1= 6 ⇐ ن = 7 ∴ الحد السابع

جـ) ⟨8، 4، 2،...⟩ يساوي $\frac{1}{4}$

الحل

$ح_1=8$ ، $ح_2=7=\frac{ح_2}{ح_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

$ح_ن=ح_1 ر^{ن-1}$ ⇐ $\frac{1}{4}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

$\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$ ⇐ $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

∴ ن−1= 5 ⇐ ن=6

∴ الحد السادس.

[7] أوجد المتتالية الهندسية التي فيها:

أ) $ح_{10}= 320$ ، $ح_6=20$

الحل: القانون: $\boxed{ح_ن=ح_1\times ر^{ن-1}}$

بما أن $ح_{10}= 320 \Leftarrow \boxed{ح_1\times ر^9=320 = ح} \leftarrow (1)$

بما أن $ح_6=20 \Leftarrow \boxed{ح_1 ر^5=20= ح} \leftarrow (2)$

قسم (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1 ر^9}{ح_1 ر^5}=\frac{320}{20} \Leftarrow ر^4=16$

$ر= \pm 2 \Leftarrow 2^4=4$

لما $ر=2 \Leftarrow$ عوض في (2) $20= ح_1\times 32 \Leftarrow ح_1=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

وتكون المتتالية $\langle \frac{5}{8}، \frac{5}{4}، \frac{5}{2}، ... \rangle$

إذا كان $ر=-2 \Leftarrow 20= ح_1(-2)^5 \Leftarrow \frac{20}{-32}=\frac{-5}{8}$.

وتكون المتتالية $\langle -\frac{5}{8}، +\frac{5}{4}، -\frac{5}{2}، ..... \rangle$

جـ) أوجد المتتالية الهندسية التي فيها:

$ح_2=2س$، $ح_{11}= 1024 س^{10}$

الحل: $ح_2=ح_1 ر \Leftarrow \boxed{2س = ح_1 ر} \leftarrow (1)$

$ح_{11}=ح_1 ر^{10} \Leftarrow ح_{11}=ح_1 ر\times ر^9 \Leftarrow ح_{11}=2س\ ر^9$ عوض عن $ح_{11}$

$\therefore 1024 س^{10}=2س\ ر^9 \Leftarrow 512 س^9=ر^9$

$\therefore (2س)^9=ر^9 \Leftarrow \boxed{ر = 2س}$ عوض في (1) $2س=2س\ ح_1$

$\Leftarrow ح_1=\frac{2س}{2س}=1 \ \therefore \ ح_1=1$

$\langle 1، 2س، 4س^2، 8س^3، ..... \rangle$

ب) معطياتها ناقصة:

[8] أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثالث يزيد على حدها الثاني بمقدار (12)

وحدها السادس يزيد على حدها الخامس بمقدار (324)

الحل:

- $ح_3 - ح_2 = 12 \Leftarrow ح_1 ر^2 - ح_1 ر = 12 \Leftarrow \boxed{ح_1 (ر - 1)(ر - 1) = 12} \rightarrow (1)$
- $ح_6 - ح_5 = ح_1 ر^5 - ح_1 ر^4 = 324 \Leftarrow \boxed{ح_1 ر^4 (ر - 1) = 324} \rightarrow (2)$

نقسم (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1 ر (ر-1)}{ح_1 ر^4 (ر-1)} = \frac{12}{324}$

$\frac{1}{ر^3} = \frac{1}{27} \Leftarrow ر^3 = 27 \Leftarrow ر = \sqrt[3]{27} = 3 \therefore \boxed{ر = 3}$

عوض في(1) $3ح_1(3-1) = 12 \Leftarrow 6ح_1 = 12 \Leftarrow \boxed{ح_1 = 2}$

$\langle 2، 6، 18، 54، \ldots \rangle$

[9] أوجد قيمة كل من س، ص في المتتالية الهندسية $\langle 5، س، ص، 135 \rangle$

الحل: $ح_1 = 5$ ، $ح_4 = 135$، $ن = 4$

$ر = \frac{ح_2}{ح_1} \Leftarrow \boxed{ر = \frac{س}{5}}$ وكذلك $ر = \frac{ح_4}{ح_3} \Leftarrow \boxed{ر = \frac{135}{ص}}$

$\therefore \frac{س}{5} = \frac{135}{ص} \Leftarrow \boxed{س ص = 135 \times 5} \rightarrow (1)$

$ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_4 = 5 \times (\frac{س}{5})^3 = \frac{س^3}{5^3} = \frac{س^3}{25}$

$\therefore$ عوض عن $ح_4 = 135 \Leftarrow \frac{س^3}{25} = \frac{135}{1} \Leftarrow س^3 = 135 \times 25$

$= 25 \times 5 \times 27 = 5^3 \times 3^3 \Leftarrow \boxed{س = 5 \times 3 = 15}$

عوض في (1) $15ص = 5 \times 135 \Leftarrow ص = \frac{135 \times 5}{15} = \frac{135}{3}$

$\therefore \boxed{ص = 45}$

[11] أوجد ما يلي:

أ) وسطين هندسيين بين 8، 64

الحل 8، ☐ ☐ ، ☐ ☐ ☐ ، 64

معك $ح_1 = 8$، $ح_4 = 64$ بما أن $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}$

$\therefore ح_4 = 8 \times ر^{4-1} = 8 ر^3 \Leftarrow 64 = 8 ر^3 \Leftarrow ر^3 = \frac{64}{8} = 8$

$\Leftarrow ر = 2$

$\therefore$ 8، 16، 32، 64

د) أدخل ست أوساط هندسية بين 640، 5

الحل: 640، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ☐ ، ☐ ☐ ، 5، ☐

معك $ح_1 = 640$، $ح_8 = 5$

القانون $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_8 = 640 \times ر^7 \therefore 640 ر^7 = 5$

$\Leftarrow ر^7 = \frac{5}{640} \Leftarrow ر^7 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = (\frac{1}{2})^7$

$\Leftarrow ر = \frac{1}{2}$

$\therefore$ المتتالية 640، 320 ، 160 ، 80 ، 40 ، 20 ، 10 ، 5

[12] عددان وسطهما الحسابي (75) ووسطهما الهندسي (60) أوجد هذين العددين:

الحل: نفرض العددين س،ص

أولاً: $\frac{س + ص}{2} = \frac{75}{1} \Leftarrow س + ص = 150 \Leftarrow س = 150 - ص \leftarrow (1)$

الوسط الهندسي $= \sqrt{\text{ضرب العددين}} \Leftarrow$

$60 = \sqrt{س \times ص} \Leftarrow 3600 = س ص$ عوض عن س بقيمتها

3600 = (150− ص)ص ⇐ 3600= 150ص− ص^2 صفِّرها.

ص^2−150س + 3600 = 0

(ص−120) (ص−30) = 0

أما ص − 120 = 0 ⇐ ص = 120

أو ص − 30 = 0 ⇐ ص = 30

لما ص = 120 ⇐ س= 150− ص= 150− 120=30 ⇐ س=30

لما ص = 30 ⇐ س=150− ص= 150− 30 = 120 ⇐ س=120

[14] أوجد ما يأتي:

أ) الوسط الهندسي للكميتين (م−ب) ، (م^2− ب^2) (م+ب)

الحل: الوسط الهندسي=$\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثاني}}$ = (م−ب) (م^2−ب^2) (م+ب)

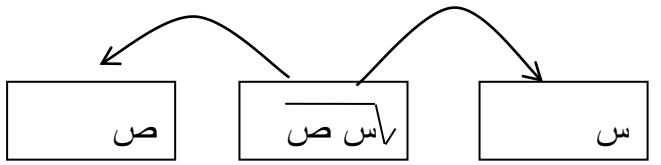
=$\sqrt{\text{(م−ب) (م−ب) (م+ب)(م+ب)}}$=$\sqrt{\text{(م−ب)}^2\ \text{(م+ب)}^2}$ #

=$\sqrt{\text{(م−ب) (م+ب)}}$= م^2 − ب^2

ب) عددان وسطهما الهندسي يزيد على أحدهما بمقدار (8) ويقل عن الآخر بمقدار (24).

الحل:

نفرض العددين س،ص



$\sqrt{\text{س ص}}$ − س = 8 ← (1)

ص−$\sqrt{\text{س ص}}$= 24 ← (2) ⇐ ص= 32 +س ← (3)

بالجمع ص − س = 32

عوض في (1) س$\sqrt{\text{(32+س)}}$ − س + 8

$\Leftarrow$ ربع الطرفين س(32+س) = (س+8)^2.

س(32+س) = (س+8)^2

2 3 س + س^2= س^2+ 16س + 64 $\Leftarrow$ 16س =64 $\Leftarrow$ س= $\frac{64}{16}$ =4

∴ س= 4 عوض في (3) $\Leftarrow$ ص= 32+ 4=36

∴ العددان 4 ، 36

[16] الوسط الهندسي بين س، ص هو (8).

والوسط الحسابي بين $\frac{1}{س}$ ، $\frac{1}{ص}$ هو $\frac{5}{32}$ أوجد كلاً من س، ص.

الحل: الوسط الهندسي = $\sqrt{س\ ص}$ = 8 $\Leftarrow$ س ص = 64 $\leftarrow$(1)

الوسط الحسابي: $\frac{\frac{1}{س}+\frac{1}{ص}}{2}=\frac{5}{32}$ $\Leftarrow$ أضرب بـ2

$\frac{1}{س}+\frac{1}{ص}=\frac{5\times2}{32}$ $\Leftarrow$ $\frac{س+ص}{س\ ص}=\frac{5}{16}$ عوض عن س ص =64

$\frac{س+ص}{64}=\frac{5}{16}$ $\Leftarrow$ 16 (س+ص)= 5×64

∴ س+ص = $\frac{64\times5}{16}$ $\Leftarrow$ س+ص=20 $\Leftarrow$ ص=20−س

عوض في (1) عن ص $\Leftarrow$ س(20−س)=64

20س−س^2=64 $\Leftarrow$ س^2−20س + 64=0

(س− 16) (س− 4)= 0 $\Leftarrow$ أما س−16= 0 $\Leftarrow$ س =16

$\Leftarrow$ ص= 20 − 16 = 4 ∴ ص= 4 أوس−4=0 $\Leftarrow$ س=4 $\Leftarrow$ ص=16

[17] إذا كانت 96، س،.....، ص، 1.5 كميات موجبة في تتالٍ هندسي وكانت س تزيد عن ص بمقدار 45 أوجد س،ص

الحل:

س= ص +45 $\Leftarrow$ ص= س− 45

من تعريف المتتالية الهندسية: $\frac{\text{س}}{96} = \frac{1.5}{\text{ص}} \Leftarrow$

س ص=96 × 1.5 $\Leftarrow$ س (س− 45) = 144

$\text{س}^2 - 45\text{س} - 144 = 0$

(س−48) (س+3)= 0

أما س+ 3 =0 $\Leftarrow$ س = −3 مرفوض

أو س − 48 = 0 $\Leftarrow$ س = 48 $\Leftarrow$ ص= س−45

= 48−45 $\Leftarrow$ ص = 3

[18] متتالية هندسية حدها الأول(2) وحدها الأخير (128) فإذا كان مجموع حدود هذه المتتالية يساوي (254) فأوجد عدد حدودها.

الحل: لدينا $ح_1$= 2 ، $ح_ن$=128، $مجـ_ن$=254 أوجد ن=؟

من القانون $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}$ $\Leftarrow$ 128= 2 $ر^{ن-1}$ $\Leftarrow$ $ر^{ن-1}$ =64 ←(1)

ولدينا: $مجـ_ن = \frac{ح_1 - ح_ن ر}{1 - ر}$ $\Leftarrow$ $\frac{254}{1} = \frac{2-128ر}{1-ر}$ $\Leftarrow$ 254−254ر=2− 128ر

254− 2 = 254ر− 128ر $\Leftarrow$ 252= 126ر

ر= $\frac{252}{126}$= 2 $\Leftarrow$ ر = 2

عوض في(1)64= $(2)^{ن-1}$ $\Leftarrow$ 2^6=$2^{ن-1}$ $\Leftarrow$ 6= ن−1 $\Leftarrow$ ن=7

[19] في المتتالية الهندسية 0.1، −0.4 ، 1.6،... كم عدد الحدود الأولى التي مجموعها (−81.9)

الحل: ر= $\frac{-0.4}{0.1} = \frac{-4}{1}$= −4 ∴ ر= −4

قانون المجموع $مج_ن = ح_1 \times \frac{1-ر^ن}{1-ر} \Leftarrow -81.9 = 0.1 \times \frac{1-(-4)^ن}{4+1}$ أضرب بـ10

$$-\frac{819}{1} = 1 \times \frac{1-(-4)^ن}{5} \Leftarrow -4095 = 1 - (-4)^ن$$

$$-4096 = -(-4)^ن \Leftarrow (-4)^ن = (4)^6 \Leftarrow (-4)^ن = (-4)^6 \Leftarrow ن = 6$$

[20] بيّن نوع المتتالية التي حدها العام هو $ح_ن = 3(2)^ن$ ثم أوجد مجموع الخمسة الأولى منها:

الحل:

متتالية هندسية أساسها (ر =2) وحدها الأول 6

$ح_1 = 3(2)^1 = 6$

$ح_2 = 3(2)^2 = 12$

$ح_3 = 3(2)^3 = 24$

$$مج_ن = ح_1 \times \frac{1-ر^ن}{1-ر} \Leftarrow مج_5 = 6 \times \frac{1-(2)^5}{1-2}$$

$$= 6 \times \frac{32-1}{1-} = 6 \times \frac{31-}{1-}$$

$$= 6 \times 31 = 186$$

[21] إذا كان مجموع ن حداً من المتتالية يعطي بالعلامة:

$مج_5 = 8-6(\frac{3}{4})^{ن-1}$ أوجد المتتالية وبين نوعها.

الحل: $مج_1 = 8-6(\frac{3}{4})^5 = 8-6 = -2 \Leftarrow \therefore ح_1 = 2$

$$مج_2 = 8-6(\frac{3}{4})^1 = -8 \frac{18}{4} = \frac{18-32}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ الحد الثاني $مج_2 - مج_1 = -2 \frac{7}{2} = \frac{4-7}{2} = \frac{3}{2}$ $\therefore ح_2 = \frac{3}{2}$

$$\frac{37}{8}=\frac{27-64}{8}=\frac{9\times3}{8}-8\quad=\frac{9\times6}{16}-8=(\frac{3}{4})^2\ 6-8=\text{مجـ}_3$$

الحد الثالث= $\text{مجـ}_3-\text{مجـ}_2=\frac{37}{8}-\frac{7}{2}=\frac{28-37}{8}=\frac{9}{8}$ $\quad\therefore$ $\text{ح}_3=\frac{9}{8}$

$\therefore$ الحدود $2\ ،\frac{3}{2}\ ،\frac{9}{8}\ ،\ldots\ldots$

لبيان نوعها $\frac{3}{4}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}$

$$\frac{3}{4}=\frac{2\times9}{3\times8}=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{2}}=\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2}$$

وأضح أنها متتالية هندسية أساسها $\boxed{\text{ر}=\frac{3}{4}}$

[22] لتكن (س−2)، (س−1)، (3س−5) متتالية هندسية فما قيمة س

الحل: ح_1=س−2 ، $\boxed{\text{ر}=\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}=\frac{\text{س}-1}{\text{س}-2}}\leftarrow(1)$

$$\Leftarrow\boxed{\text{ر}=\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2}=\frac{3\text{س}-5}{\text{س}-1}}\leftarrow(2)$$

$$(1)=(2)\ \Leftarrow\ \frac{\text{س}-1}{\text{س}-2}=\frac{3\text{س}-5}{\text{س}-1}\ \Leftarrow$$

$$(\text{س}-1)^2=(\text{س}-2)\ (3\text{س}-5)$$

$\text{س}^2-2\text{س}+1=3\text{س}^2-5\text{س}-6\text{س}+10$ أنقل إلى الطرف الثاني وصفِّرها

$$2\text{س}^2-9\text{س}+9=0\ \Leftarrow\ (2\text{س}-3)\ (\text{س}-3)=0$$

أما $2\text{س}-3=0\ \Leftarrow\ 2\text{س}=3$

$$\Leftarrow\boxed{\text{س}=\frac{3}{2}}\ \text{أو}\ \text{س}-3=0\ \Leftarrow\ \boxed{\text{س}=3}$$

[23]إذا بادلنا بين الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية ذات ثلاث حدود نتجعن ذلك متتالية حسابية فإذا كانت الأساسات(متساوية)فأوجد الثلاث حدود.

الحل:الحدود أ ب $\frac{ب^2}{أ}$ ← هندسية.

ب أ $\frac{ب^2}{أ}$ ← حسابية.

$\boxed{ر = \frac{ب}{أ}}$ $\boxed{د = أ-ب}$

(1) $ر = د \Leftarrow \frac{ب}{أ} = أ-ب \Leftarrow \frac{ب}{أ} + ب = أ$

$ب\left(\frac{1}{أ} + 1\right) = أ \Leftarrow ب = \frac{أ}{1+\frac{1}{أ}} = \frac{أ^2}{1+أ} \Leftarrow \boxed{ب = \frac{أ^2}{1+أ}}$

من الحسابية الحد الثالث = الأوسط (أ)+ د

ولدينا: أ + أ − ب= $\frac{ب^2}{أ}$

$2أ - \frac{أ^2}{1+أ} = \frac{أ^4}{أ(1+أ)^2}$

$\frac{2أ+2أ^2-أ^2}{(1+أ)} = \frac{أ^3}{(1+أ)^2}$

$\frac{أ(2+أ)}{1+أ} = \frac{أ^3}{(1+أ)^2} \Leftarrow \frac{أ+2}{(1+أ)} = \frac{أ^2}{(1+أ)^2} \Leftarrow (2+أ)(1+أ) = أ^2$

$2 + 2أ + أ + أ^2 = أ^2 \Leftarrow 2+3أ = 0 \Leftarrow 3أ = -2$

$\Leftarrow أ = \frac{-2}{3} \Leftarrow ب = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{-2}{3}-1} = \frac{4}{(\frac{1}{3})9} = \frac{4}{3}$ ، $ر = \frac{ب}{أ} = \frac{4}{3} \div \frac{-2}{3}$

$\Leftarrow$ ر $= \frac{4}{3} \times \frac{-3}{2} = -2$

$\Leftarrow$ الحد الثالث ب $\times$ ر $= \frac{4}{3} \times -2 = \frac{-8}{3}$

$(\frac{-2}{3} \ ، \ \frac{4}{3} \ ، \ \frac{-8}{3})$

تمارين عامة على المتتاليات

[1] بين أياً من الدوال الآتية تمثل متتالية:

أ) ح(ن)= $(-1)^{2ن} ن^2$ ، ن $\ni$ ط* $\leftarrow$ الجواب تمثل لأن مجالها ط*

ب) د(ن) = $3ن^2 + 1$ ، ن $\ni$ ص لا تمثل المفروض ط*

جـ) هـ (ن)= $\frac{ن}{3ن^2 + 2ن + 1}$ ، ن $\ni$ ط لا تمثل المفروض ط*

د) ل(ن) = $\frac{1}{ن + 1}$ ، ن $\ni$ ح لا تمثل المفروض ط*

هـ) ك(ن)= جا π ن ، ن $\ni$ ط* (نعم تمثل)

و) ع(ن)= 3جا $\frac{\pi}{ن}$ ، ن $\ni$ {1، 2، 3، 4، 5}

نعم تمثل لأن مجموعة التعويض $\subset$ ط*

[2] أكتب الخمسة الحدود الأولى من المتتاليات التي حدها العام معطى ثم مثلها بيانياً:

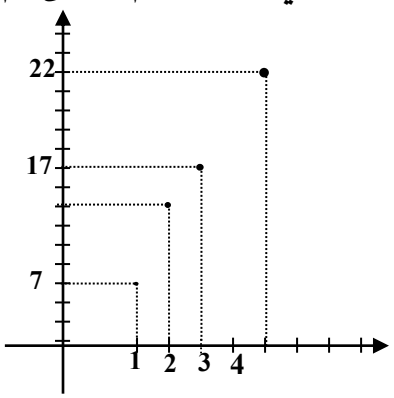
أ) $ح_ن = 5ن + 2$

$ح_1 = 5 \times 1 + 2 = 5 + 2 = 7$ (1، 7)

$ح_2 = 5 \times 2 + 2 = 12$ (2، 12)

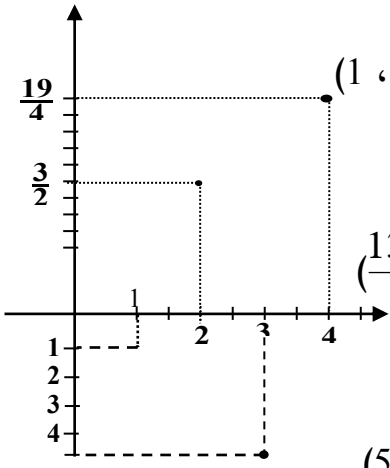
$ح_3 = 5 \times 3 + 2 = 17$ (3، 17)

$ح_4 = 5 \times 4 + 2 = 22$ (4، 22)



$ح_5 = 5\times5+2 = 27 = (5،\ 27)$

ب) $ح_ن = \dfrac{(-1)^ن(6ن-5)}{ن}$



$ح_1 = \dfrac{(-1)^1(6-5)}{1} = \dfrac{1\times1-}{1} = -1 \quad (1،\ 1)$

$ح_2 = \dfrac{(-1)^2(6\times2-5)}{2} = \dfrac{7\times1}{2} \quad (\dfrac{7}{2}،\ 2)$

$ح_3 = \dfrac{(-1)^3(6\times3-5)}{3} = \dfrac{13-}{3} \quad (\dfrac{13-}{3}،\ 3)$

$ح_4 = \dfrac{(-1)^4(6\times4-5)}{4} = \dfrac{19\times1}{4} \quad (\dfrac{19}{4}،\ 4)$

$ح_5 = \dfrac{(-1)^5(6\times5-5)}{5} = \dfrac{25-}{5} = -5 \quad (5-،5)$

[3] أوجد الحد المشار إليه أمام كل متتالية:

أ) $\langle\ 3^ن + 5\ ]$ أوجد $ح_9\rangle$

المتتالية $ح_ن = 3^ن + 5 \Leftarrow ح_9 = 3^9 + 5 = 19683 + 5 = 19688\#$

ب) $\langle 7-2ن\rangle$ ، $ح_{11}$

الحل: $ح_ن = 7-2ن \Leftarrow ح_{11} = 7-22 = -15$

جـ) $\langle\ \dfrac{1}{3ن}\ \rangle$ أوجد $ح_{27}$

$ح_ن = \dfrac{1}{3ن} \Leftarrow ح_{27} = \dfrac{1}{27\times3} = \dfrac{1}{81}\#$

[4] أكتب الستة الحدود الأولى للمتتالية المعطاه بالصيغ:

أ) $ح_1 = 4$ ، $ح_ن = 3ح_{ن-1} + 4$

الحل: $ح_2 = 3ح_1 + 4 = 3\times4 + 4 = 12 + 4 = 16$

$ح_3 = 3 ح_2 + 4 = 3 \times 16 + 4 = 48 + 4 = 52$

$ح_4 = 3 ح_3 + 4 = 3 \times 52 + 4 = 156 + 4 = 160$

د) $ح_1 = 0$ ، $ح_{ن+1} = \frac{1}{ح_1 + 1}$

الحل:

$ح_2 = \frac{1}{ح_1 + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$

$ح_3 = \frac{1}{0+1} = 1$ ، $ح_4 = 1$، $ح_5 = 1$ ، $ح_6 = 1$

هـ) $ح_1 = 1$ ، $ح_{ن+1} = (ن-1)$ ح ن

$ح_2 = (1-1) ح_1 = 0 \times 1 = 0$

$ح_3 = (2-1) ح_{1+2} = 1 \times 0 = 0$

$ح_4 = (3-1) ح_{1+3} = ح_3 = 0$

$ح_5 = 0$ ، $ح_6 = 0$

[5] أكتب الحد العام لكل من المتتاليات التالية:

أ) $\langle 2، -2، 2، -2، \ldots \rangle$ هندسية أساسها (ر $= -1$) $=$ { 2 إذا كان ن فردي ; -2 إذا كان ن زوجي }

$ح_ن = ح_1 (ر)^{ن-1} \Leftarrow ح_ن = 2 (-1)^{ن-1}$

ب) $\langle 1، 5، 9، 13، \ldots \rangle$

حسابية حدها العام $ح_ن = ح_1 + (ن-1)$ د حيث د $= 4$

$ح_ن = 1 + 4 (ن-1) = 4 ن - 3$

جـ) $\langle \frac{1}{3}، \frac{1}{4}، \frac{1}{5}، \ldots \rangle$ حدها العام $ح_ن = \frac{1}{ن}$

د) ⟨4، 4، 4،.....⟩ ⇐ $ح_ن$ =4 هندسة أساسها ر=1

هـ) (−1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1-}{3}$، $\frac{1}{4}$،...) ⇐ $ح_ن$= $(-1)^ن \times \frac{1}{ن}$

[6] أكتب المتتالية (ح ن) حيث:

$ح_ن$ = $\frac{ن-1}{ن+1}$ إذا كان ن عدد فردي ∃ 7

−1 إذا كان ن عدد زوجي ∃ 8

$ح_1 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

$ح_2 = 0$

$ح_3 = \frac{1-3}{1-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$ح_4 = -1$

$ح_5 = \frac{1-5}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$ح_6 = -1$

$ح_7 = \frac{1-7}{1+7} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$ح_8 = -1$ ∴ ⟨0، −1، $\frac{1}{2}$، −1، 0، $\frac{3}{4}$⟩

[7] حدِّد أياً من المتتاليات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.

أ) $<1+\frac{1}{\sqrt{ن}}>$

الحل: $ح_ن = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن}}$

$ح_{ن+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن+1}}$ $ح_{ن+1} - ح_ن = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن+1}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{ن}}$

$= \frac{1}{\sqrt{ن+1}} - \frac{1}{\sqrt{ن}} < 0$ + متناقصة

جـ) $\langle 10 + \frac{1}{2ن} \rangle$

الحل: $ح_ن = 10 + \frac{1}{2ن}$، $ح_{ن+1} = 10 + \frac{1}{2ن+2}$

$$ح_{ن+1} - ح_ن = 10 + \frac{1}{2+ن2} - 10 - \frac{1}{ن2} = \frac{1}{2+ن2} - \frac{1}{ن2} < 0$$

$\Leftarrow$ تناقصية أنتبه كلما كبر المقام قل الكسر

هـ) $(جا \frac{ن}{2} \pi)$

$ح_ن = جا \frac{ن \pi}{2}$ متغيرة

د) $\langle 3^{-ن} \rangle^1$

الحل: $ح_ن = 3^{-ن-1}$، $ح_{ن+1} = 3^{ن}$ واضح أن $3^{ن} > 3^{-ن-1}$ $\therefore ح_{ن+1} > ح_ن$

$\therefore$ تزايدية.

المتتاليـــة الحسابيـــة

[9] أيٌ من المتتاليات الآتية تكون متتالية حسابية:

أ) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = 3ن - 2$

الحل:

$ح_1 = 3 - 2 = 1$	لاحظ $ح_2 - ح_1 = 4 - 1 = 3$
$ح_2 = 6 - 2 = 4$	$ح_3 - ح_2 = 7 - 4 = 3$
$ح_3 = 9 - 2 = 7$	
$ح_4 = 12 - 2 = 10$	بما أن الفرق ثابت $\Leftarrow$ المتتالية حسابية

ب) $(هـ ن)$ حيث $هـ ن = 2 + \frac{3}{ن}$

الحل:

$هـ_1 = 2 + \frac{3}{1} = 5$	لا يوجد فرق ثابت بين الحدود المتتالية
$هـ_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$	$هـ_1 - هـ_2 = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$

$هـ_3 = 2 + \frac{3}{3} = 3$	$هـ_3 - هـ_2 = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$
$هـ_4 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{2}$	∴ ليست حسابية.

جـ) $(د_ن)$ حيث $د_ن = 5 - 2ن (-1)^ن$

$د_1 = 5 + 2 = 7$	$د_2 - د_1 = -3 - 7 = -10$
$د_2 = 5 - 8 = -3$	$د_3 - د_2 = 23 + 3 = 26$
$د_3 = 5 + 18 = 23$	الفرق غير ثابت والمتتالية ليست حسابية.

10] أوجد ما يأتي:

أ) عدد حدود المتتالية (11، 13، 15،...، 195)

الحل: $ح_1 = 11$ ، $د = 13 - 11 = 2$ ، $ح_ن = 195$ المطلوب ن=؟

القانون $ح_ن = ح + (ن-1) د \Leftarrow 195 = 11 + (ن-1) \times 2$

$195 = 11 + 2ن - 2 \Leftarrow 2ن = 186 \Leftarrow ن = \frac{186}{2} = 93$

ب) رتبة الحد الذي قيمته (6) في المتتالية (82، 78، 74،.....)

الحل: $ح_1 = 82$ ، $د = 78 - 82 = -4$، $ح_ن = 6$ المطلوب ن=؟

$\therefore ح_ن = ح_1 + (ن-1) د \Leftarrow 6 = 82 + (ن-1) \times -4$

$6 = 82 - 4ن + 4 \Leftarrow -80 = -4ن \Leftarrow ن = \frac{-80}{-4} = 20$

∴ الحد العشرون.

د) الستة الحدود الأولى للمتتالية $\langle (-1)^ر \times (ر)^{-1} \rangle$

الحل: $ح_ر = (-1)^ر \times (ر)^{-1} = \frac{(-1)^ر}{ر}$

$$\begin{array}{|l|l} ح_1 = \frac{-1}{1} = -1 & ح_4 = \frac{1}{4} \\ ح_2 = \frac{1}{2} & ح_5 = \frac{-1}{5} \\ ح_3 = \frac{-1}{3} & ح_6 = \frac{1}{6} \end{array}$$

و) الحد الخامس عشر من المتتالية $\langle 87 ، 80، 73، \ldots\ldots \rangle$

الحل: $ح_1 = 87$ ، $د = 87 - 80 = 7$ ، $ن = 15$

المطلوب $ح_{15}$

$$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\, د \Leftarrow ح_{15} = 87 + (15-1) \times 7$$

$$= 87 + 14 \times 7 = 87 + 98 = 185$$