Matematik B

Løsningsforslag

December 2010

February 10, 2018

Delprøve 1 - uden hjælpemidler

Opgave 1 Ligningen løses mht. x.

$$\begin{aligned}
&7x+2=5x+10 \Leftrightarrow\\
&7x+2-5x-2=5x+10-5x-2 \Leftrightarrow\\
&2x=8 \Leftrightarrow\\
&\frac{2x}{2}=\frac{8}{2} \Leftrightarrow\\
&x=4
\end{aligned} \tag{1}$$

Løsningen kan nemt verificeres ved indsættelse af værdien $x = 4$ i ligningen.

Opgave 2 Givet funktionen $f(x) = x^2 + 5x + 1$. Vi bestemmer $f(3)$.

$$f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 9 + 15 + 1 = 25 \tag{2}$$

Så ved en x-værdi på 3 er funktionsværdien 25.

Opgave 3 Der ses tydeligt, at der er tale om en lineær funktion, her er $a = 18.5$ og $b = 388$. En passende forskrift er

$$F(t) = 18.5t + 388 \tag{3}$$

Hvor $F(t)$ angiver det årlige offentlige forbrug, målt i mia. kr. til tidspunktet t, målt i år fra 2004 til 2008.

Opgave 4 Ved hjælp af Pythagoras kan man finde $|AB|$. Her er $|AC| = 4$ og $|BC| = 3$, dermed er

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \tag{4}$$

Forholdet mellem trekanterne er

$$k = \frac{9}{3} = 3 \tag{5}$$

Det betyder, at $|A_1B_1|$ kan bestemmes.

$$|A_1B_1| = |AB| \cdot k = 5 \cdot 3 = 15 \tag{6}$$

Som er det ønskede.

Opgave 5 Der er tre angivende grafer.

(a) $f(x) = 3 \cdot 1.15^x$ hører til A, da denne funktion har en voksende a-værdi, men også den funktion med b-værdi med 3.

(b) $g(x) = 3 \cdot 0.88^x$ hører til C, da det er den eneste aftagende funktion, hvor $0 < a < 1$, og her er $0 < 0.88 < 1$ sand.

(c) $h(x) = 6 \cdot 1.06^x$ hører til B. Det skyldes b-værdien er 6 hvoraf for de andre er det 3.

Opgave 6 Funktionen differentieres.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \tag{7}$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$.

$$d = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16 \tag{8}$$

Dernæst bestemmes x-værdierne.

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{9}$$

Vi vælger tre værdier sådan så der kan fortages fortegnsvariation. Der vælges 0, 1 og 3.

$$\begin{aligned} f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 4 = 4 \\ f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4 = -1 \\ f'(3) &= 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 4 = 7 \end{aligned} \tag{10}$$

Der er tale om "*plus-minus-plus*" tilfælde, monotoniskemaet overlades til læseren.
Dermed kan der konkluderes, at
- $f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; 2/3] \cup [2; \infty)$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[2/3; 2]$

Alternativt kunne man bruge anden afledede.

$$f''(x) = 6x - 8 \tag{11}$$

Med løsningerne fra $f'(x) = 0$ er

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{2}{3}\right) &= 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 \qquad \text{lok maks} \\ f''(2) &= 6 \cdot 2 - 8 = 5 \qquad \text{lok min} \end{aligned} \tag{12}$$

Og så kan man konkludere på $f(x)$ ligesom før.

Delprøve 2 - med hjælpemidler

Opgave 7 Trigonometri

(a) Længden af $|AB|$ kan bestemmes vha. sinusrelationerne, men det forudsætter man kender vinkel $\angle B$.

$$\angle B = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 33^o - 72^o = 75^o \tag{13}$$

Dernæst anvendes sinusrelationerne. Her kendes $\angle B$ og $\angle C$. Tallene indsættes i sinusrelationerne og man får

$$\frac{\sin(75^o)}{20} = \frac{\sin(72^o)}{|AB|} \Leftrightarrow |AB| = \frac{20 \cdot \sin(72^o)}{\sin(75^o)} = 19.69212315 \tag{14}$$

Så længden er ca. 19.692

(b) Længden $|AM| = |MC| = 10$ da M deler linjestykket i to dele. 1/2-appelsinformlen anvendes.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 19.69212315 \cdot \sin(33^o) = 53.62549475 \tag{15}$$

Så arealet er ca. 53.625

Opgave 8 Løsning af denne opgave bliver med Maple.

(a) I Maple bliver der lavet potens regression.

```
with(Gym) :
P1 := [0.9, 2.0, 6.0, 6.9, 9.9, 10.7, 14.0, 15.9] :
P2 := [1.1, 2.0, 4.1, 4.5, 5.5, 5.9, 6.7, 7.3] :
L(t) := PowReg(E1, E2, t) :
evalf[5](L(t))
                    1.2303 t^0.654793065449400                    (1)
```

(b) Man indsætter $t = 24$ i modellen og får

$$L(24) = 1.2303 \cdot 24^{0.6548} = 9.85 \tag{16}$$

Så efter 24 år er længden af skallen 9.85cm.

(c) Først differentieres funktionen.

$$L'(t) = 0.80557 \cdot t^{-0.34521} \tag{17}$$

Dernæst indsættes $t = 24$ på samme måde som i (a). Man får

$$L'(24) = 0.80557 \cdot 24^{-0.34521} = 0.269 \tag{18}$$

Når muslingen er 24 år, vokser dens længde hvert år med 0.269cm.

Opgave 9 Der er tale om en eksponentiel model.

(a) Tallet 3.7 fortæller, at i år 1999 var Kinas andel af verdensøkonomien 3.7% Fremskrivningsfaktoren er 1.081, og i procent er det 8.1%, da

$$r = (1.081 - 1) \cdot 100\% = 8.1\% \tag{19}$$

Tallet betyder, at for hvert år der går efter år 1999, vokser Kinas andel af verdensøkonomien med 8.1% pr. år.

(b) Man anvender formlen for fordoblingstiden.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.081)} = 8.8994 \tag{20}$$

Det betyder, at Kinas andel fordobles hvert 8.9 år.

Opgave 10

(a) To-punktsformlerne anvendes.

$$\begin{aligned} a &= \frac{76 - 19}{8.7 - 2.9} = 9.8276 \\ b &= 19 - 9.8276 \cdot 2.9 = -9.5 \end{aligned} \tag{21}$$

Forskriften er

$$f(x) = 9.8276x - 9.5 \tag{22}$$

(b) Man løser en ligning mht. x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 40 \\ 9.8276x - 9.5 &= 40 \\ 9.8276x &= 49.5 \\ x &= \frac{49.5}{9.8276} = 5.036835038 \end{aligned} \tag{23}$$

Så med en primærproduktion på 40g kulstof pr. kvadratmeter pr. år. er 5 måneder isfri periode.

Opgave 11

(a) Antallet af kunder er 143. Middelværdien (eller gennemsnittet) er

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 50 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 22 + 9 \cdot 11 + 10 \cdot 16 + 11 \cdot 5 + 12 \cdot 31}{143} = 8.5175 \tag{24}$$

Gennemsnittet er 8.5175. Det betyder, at man køber gennemsnitlig 9 æg pr. kunde.

Opgave 12

(a) Først differentieres f.

$$f'(x) = \frac{4}{x} - 2, \qquad x > 0 \tag{25}$$

Man indsætter $x = 1$ og får

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{1} - 2 = 2 \\ f(x) &= 4\ln(1) - 2 \cdot 1 + 8 = 6 \end{aligned} \tag{26}$$

Tangenten er

$$y = 2 \cdot (x - 1) + 6 = 2x + 4 \tag{27}$$

I punktet $P(1, f(1))$.

Opgave 13

(a) Scenen består af en ligebenet trekant. Området hvor gæsterne skal være i bliver dækket af et 300m langt hegn. Omkredsen er

$$O = y + 2x + y = 2x + 2y \tag{28}$$

Man indsætter 300 på O og får en ligning. Her isoleres y.

$$300 = 2x + 2y \Leftrightarrow 150 = x + y \Leftrightarrow y = 150 - x \tag{29}$$

Arealet af området er

$$T_{rektangel} = y \cdot 2x \tag{30}$$

Arealet af den ligebenet trekant er

$$T_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2} \tag{31}$$

Men da der er to trekanter, multipliceres der med 2 i $T_{trekant}$ og man får $T_{scene} = 2 \cdot T_{trekant} = x^2$. Fratrækkes dette med arealet af rektanglet er

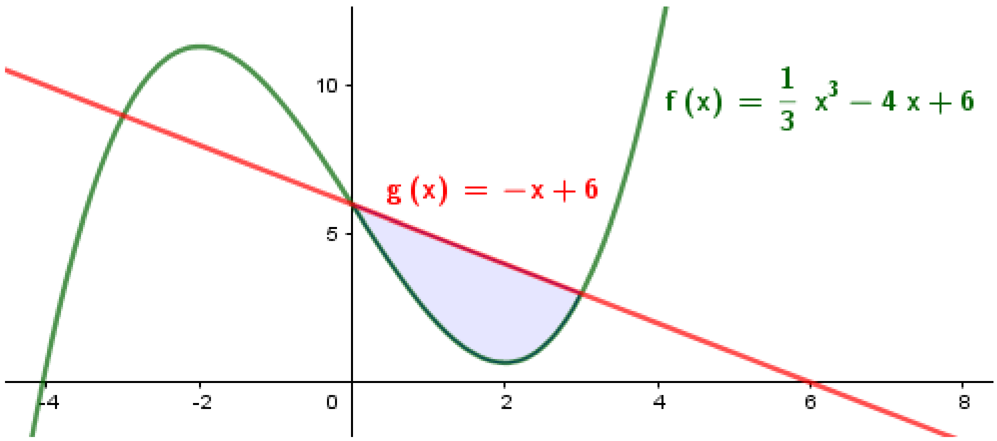
$$T_{publikum} = y \cdot 2x - x^2 \tag{32}$$

Indsættes $y = 150 - x$ fås

$$T_{publikum} = (150 - x) \cdot 2x - x^2 = -3x^2 + 300x = -3x(x - 100) \tag{33}$$

Opgave 14

(a) Grafen er lavet i GeoGebra.



Ligningen $f(x) = g(x)$ løses.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}x^3 - 4x + 6 = -x + 6 \Leftrightarrow \\
&3x - \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow \\
&9x - x^3 \Leftrightarrow \\
&x(9 - x^2) \Leftrightarrow \\
&x = 0 \vee 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3
\end{aligned} \tag{34}$$

Arealet bestemmes. Da det er i første kvadrant anvendes $x = 0$ og $x = 3$, integralet er

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^3 g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(-x + 6 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 6\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^3 \\
&= \frac{3}{2}3^3 - \frac{1}{12}3^4 - \left(\frac{3}{2}0^3 - \frac{1}{12}0^4\right) \\
&= \frac{27}{4} = 6.75
\end{aligned} \tag{35}$$

Som er arealet af M.

(b) Hvis linjen $y = b$ skal skære funktionen f i netop to punkter, og da f er et tredjegradspolynomium, kan dette ske i ekstremumspunkterne. Funktionen f differentieres.

$$f'(x) = x^2 - 4 \tag{36}$$

Det er entydigt at se, at $x = \pm 2$ er løsning. Dermed kan værdierne af b findes ved at indsætte $x = \pm 2$ i f, så

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 6 = \frac{34}{3} \\ f(2) &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 + 6 = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{37}$$

Dermed er b-værdierne hhv. $\frac{34}{3}$ og $\frac{2}{3}$, så

$$y = \frac{34}{3} \qquad y = \frac{2}{3} \tag{38}$$

Skrevet i LaTeXd. 10-02-2018