Matematik B niveau

Matematik Universet
Skriftlig eksamen i matematik B HF
ny version (benyt formelsamlingen og indstiksarket).

7. december 2018

Delprøve 1

Opgave 1.

(a) Udtrykket reduceres.

$$\begin{aligned} 3a-2(a+b)+b &= 3a-2a-2b+b \\ &= a-b \end{aligned}$$

(b) Udtrykket reduceres.

$$\frac{24x^5}{8x^3} = \frac{3x^5}{x^3} = 3x^{5-3} = 3x^2$$

Opgave 2.

(a) Lad $a=2$, $b=-3$ og $c=-5$, så er

$$d = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 49, \qquad d > 0$$

Løsningsformlen anvendes, så man får løsningerne

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{3-7}{4} = -1 \end{cases}$$

Dvs. løsningerne er

$$x = -1 \vee x = \frac{5}{2}$$

Opgave 3.

(a) At finde $f(-1)$ svarer til at finde $x=-1$ og gå op af y-aksen til man rammer funktionen. Det ses, at $f(-1)=2$

(b) At finde $f'(-1)$ svarer til at bestemme hældningen for tangenten i $x=-1$. Det ses, at når x vokser med 2, så vokser tangenthældningen med 3, svarende til, at hvis x vokser med 1, så vokser tangenthældningen med $\frac{3}{2}=1.5$. Dvs. $f'(-1)=1.5$

Opgave 4.

(a) Den eksponentielle aftagende funktion har halveringskonstanten 3. Da $x = 0$ giver $f(0) = 48$, så må $x = 3$ give $f(3) = 24$. Hvis man halverer 24 fire gange fås 6, svarende til en x-værdi på 9. Dvs. hvis $x = 9$ fås $f(9) = 6$.

Opgave 5.

(a) Den ene person har alderen x og følger formlen $P(x)$. Den anden person har alderen $x + 10$, og følger formlen $P(x + 10)$. Forskellen mellem disse er

$$P(x) - P(x + 10) = 7$$

Så forskellen mellem deres maksimalpuls ifølge formlen er $P = 7$, målt i slag pr. minut.

Opgave 6.

(a) Middelværdien μ bestemmes.

$$\mu = E(X) = 5 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.3 = 7$$

Opgave 7. I denne opgave er funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} + 1 & 0 < x < 4 \\ \frac{1}{2}x + 3 & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

Så er den afledede

$$f'(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & 0 < x < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

(a) Funktionen er splejset, hvis $f_1(4) = f_2(4)$. Der undersøges.

$$f_1(4) = 2 \cdot \sqrt{4} + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5 = 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = f_2(4)$$

$\implies f(x)$ er splejset i $x = 4$.

(b) Funktionen er glat, hvis $f_1'(4) = f_2'(4)$. Der undersøges.

$$f_1'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = f_2'(4)$$

$\implies f(x)$ er glat i $x = 4$.

Delprøve 2

Opgave 8.

(a) Funktionen f differentieres.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \qquad x > 0$$

Dernæst bestemmes $f(2)$ og $f'(2)$, så

$$f(2) = \ln(2) + 2 + 3 = \ln(2) + 5$$
$$f'(2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Den ønskede tangentligning er

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{3}{2}(x-2) + \ln(2) + 5 = \frac{3}{2}x + 2 + \ln(2)$$

Eller approksimeret $y \approx 1.5x + 2.6932$

Opgave 9.

(a) Dist formlen benyttes til at bestemme afstanden mellem P og l. Linjen omskrives til $3x - 4y + 8 = 0$ og afstanden er

$$dist(P,l) = \frac{|3 \cdot 7 + (-4) \cdot 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

(b) Da afstanden før var 5, så er det svarende til radius $r = 5$. Ligningen for cirklen med centrum i P er

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

(c) $y = 0.75x + 2$ benyttes. Hvis en anden linje m står vinkelret på l skal følgende ligning gælde

$$a \cdot c = -1$$

Her er $a = 0.75 = 3/4$, så

$$3/4 \cdot c = -1 \iff c = -4/3$$

Dermed er hældningskoefficienten for m fundet.

Opgave 10.

(a) Der opstilles en ligning med $x = 5$ og $V = 1000$ og h som ubekendt.

$$1000 = 1.047 \cdot 5^2 \cdot h \iff h = \frac{1000}{1.047 \cdot 5^2} = 38.20439351$$

Så højden er ca. 38.2cm.

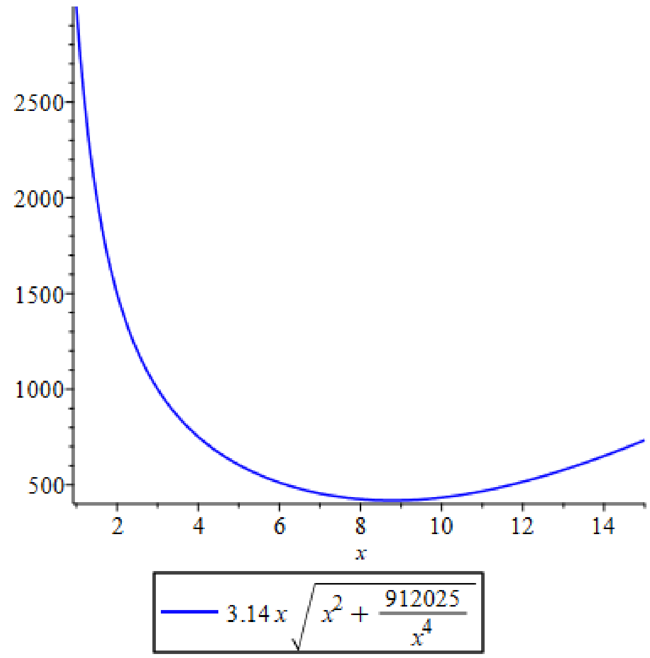
(b) Grafen $O(x)$ indtegnes i Maple.

restart :; *with*(*Gym*) :**local** O :

$$O(x) := 3.14 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{955}{x^2}\right)^2}$$

$$O := x \mapsto 3.14\, x \sqrt{x^2 + \frac{912025}{x^4}} \tag{18}$$

plot(O(x), x = 1 ..15, *legend* = [O(x)], *color* = "Blue")



(c) Her benyttes Maple til at finde $O'(x) = 0$.

fintervalsolve(O'(x) = 0, x = 1 ..15)

$$[8.773296184] \tag{19}$$

$$O''(8.773296184) > 0 \xrightarrow{\text{test relation}} \mathit{true}$$

Da den anden afledede er større end 0 i $x = 8.773296184$ så følger det, at grafen har et minimum i det punkt. Så hvis overfladearealet skal være mindst muligt, så skal $x = 8.77$cm i radius.

Opgave 11.

(a) $t = 200$ døgn svarer til at udregne

$$N(200) = \frac{13080}{1 + 74.19 \cdot 0.9775^{200}} = 7336.419287$$

Dvs. 200 døgn efter epidemiens start var der ca. 7336 personer der var blevet ramt af Ebola.

(b) Her løses ligningen $N(t) = 1200$. Dette gøres vha. Maple.

$N(t) = 1200$

$$\frac{13080}{1 + 74.19\,0.9775^t} = 1200 \tag{22}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 88.50444930]] \tag{23}$$

Så efter ca. 80.5 døgn var antallet af Ebola ramte ca. 1200 personer.

(c) I Maple bestemmes $N'(200)$.

$N'(200)$

$$73.31180162 \tag{24}$$

Tallet fortæller, at 200 døgn efter epidemiens start, stiger antallet af ramte med omkring 73 personer pr. døgn ifølge modellen.

Opgave 12.

(a) Her er $X \sim b(50, 0.7)$ så der er tale om en binomialfordeling. Her beregnes $P(X = 35)$ så vi får

$$P(X = 35) = K(50, 35) \cdot 0.7^{35} \cdot (1 - 0.7)^{50-35} = 0.1223468618$$

Så sandsynligheden for at person 35 der bruger briller eller kontaktlinser er 12.23%.

(b) Man har $p = 0.7$. Ved hjælp af Maple kan man beregne om nulhypotesen skal accepteres eller forkastes.

$$P(41 \le X \le 50) = \sum_{i=41}^{50} \left(\binom{50}{i} \cdot 0.7^i \cdot (1 - 0.7)^{50-i} \right)$$

$$P(41 \le X \le 50) = 0.04023163414$$

Eller

$$P(X \ge 41) = 1 - \sum_{i=0}^{40} \left(\binom{50}{i} \cdot 0.7^i \cdot (1 - 0.7)^{50-i} \right)$$

$$P(41 \le X) = 0.0402316341$$

Eller

$with(Gym)$:

$P(X \ge 41) = 1 - bincdf(50, 0.7, 40)$

$$P(41 \le X) = 0.0402316341$$

Da $4.02\% < 5\%$ så forkastes nulhypotesen.

Opgave 13.

(a) Ved hjælp af interpolation kan man bestemme polynomiet igennem A, B og C. I Maple fås

```
with(CurveFitting) :
PolynomialInterpolation([[−1.8, 0], [−0.8, 3], [0, 4]], x)
```

$$-0.9722222222\,x^2 + 0.472222222\,x + 4.000000000 \quad \textbf{(25)}$$

Eller skrevet pænere:

$$f_1(x) := -\frac{35}{36}\cdot x^2 + \frac{17}{36}\cdot x + 4$$

$$f_1 := x \mapsto -\frac{35}{36}x^2 + \frac{17}{36}x + 4 \quad \textbf{(26)}$$

Så den endelige funktionsforskrift er

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-35}{36}x^2 + \frac{17}{36}x + 4 & -1.8 \leq x \leq 0 \\ 4 \cdot 0.755^x & 0 < x \leq 9.2 \end{cases}$$

(b) Grafen for $f(x)$ tegnes i Maple.

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{35}{36}\cdot x^2 + \frac{17}{36}\cdot x + 4 & -1.8 \leq x \leq 0 \\ 4\cdot 0.755^x & 0 < x \leq 9.2 \end{cases} :$$

```
plot(f(x), x = −1.8 ..9.2, y = 0 ..5, color = ["Red"])
```