Matematik A, STX digital
24. maj 2019

Gammel reform

www.matematikhfsvar.page.tl
matematikuniverset@hotmail.com

Maj 2019

NB: Løsningerne er ikke garanteret fejlfrie. Løsningerne skal bruges til indlæring, så det handler om ikke at skrive af.

Delprøve 1

Opgave 1
a)
En passende forskrift er $f(x) = 29x + 696$, hvor $f(x)$ angiver antallet af kvinder der er over 100 år, og x angiver antal år i perioden $2009 - 2018$.

Opgave 2
a)
Længden $|AB|$ halveres, sådan så man kan anvende Pythagoras til at finde højde.

$h = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$, dvs. højden er 8dm.

b)
Forholdet bestemmess. Dermed er

$k = \frac{AC}{CD} = \frac{10}{7}$.

Da $AB = 12$, så er $DE = \frac{12}{\frac{10}{7}} = \frac{12 \cdot 7}{10} = \frac{42}{5}$

Men der lægges $2 \cdot 2$ dm til, så

$Vandrethylde = 4 + \frac{42}{5} = \frac{62}{5} = 12.4$

Dvs. længden er 12.4dm

Opgave 3
a)
Normalvektorerne er

$\vec{n_l} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{n_m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, så er skalarproduktet

$\vec{n_l} \cdot \vec{n_m} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ l og m er ikke ortogonale.

b)
Ligningssystemet løses.

$2x + y = 5$ [1]

$x + 2y = 4$ [2]

Man trækker $2 \cdot [2]$ fra [1], så

$2x + y - (x + 2y) = 5 - 4 \Leftrightarrow -3y = -3 \Leftrightarrow y = 1$.

Heraf er det nemt at finde x. Her bruges [2].

$x + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2 = 2$.

Dvs. $x = 2$ og $y = 1$ og koordinatsættet er $P(2, 1)$.

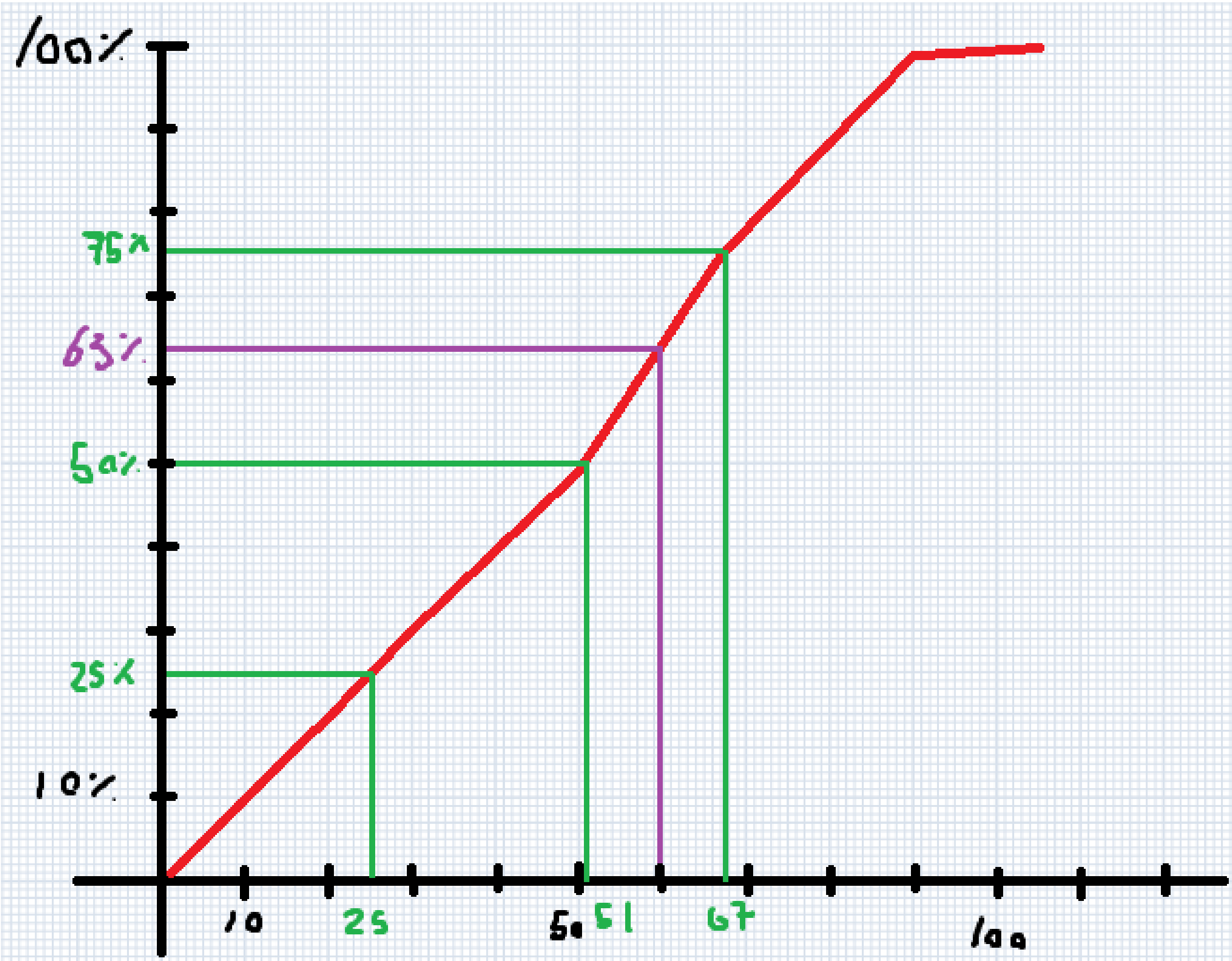
Opgave 4
a)

$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1$, den afledede bestemmes.

$f'(x) = 2x^2 + 4x - 6$. Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$, dvs.
$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3) \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$.
Dernæst kan man lave fortegnsvariation og afgøre, hvornår funktionen er enten voksende, aftagende etc.
Vi anvender anden afledede test.
$f''(x) = 4x + 4$. Hvis rødderne fra ligningen $f'(x) = 0$ indsættes i $f''(x)$, og man får et resultat mindre end 0, så der maksimum. Hvis man får et resultat større end 0, så er det et minimum.
$f''(-3) = 4 \cdot (-3) + 4 = -12 + 4 = -8 < 0$
$f''(1) = 4 \cdot 1 + 4 = 4 + 4 = 8 > 0$

Dvs. der er lok. maks. i $x = -3$ og lok. min i $x = 1$, det medfører at $f(x)$ er:
- Voksende i intervallet $]-\infty; -3] \cup [1; \infty[$
- Aftagende i intervallet $[-3; 1]$

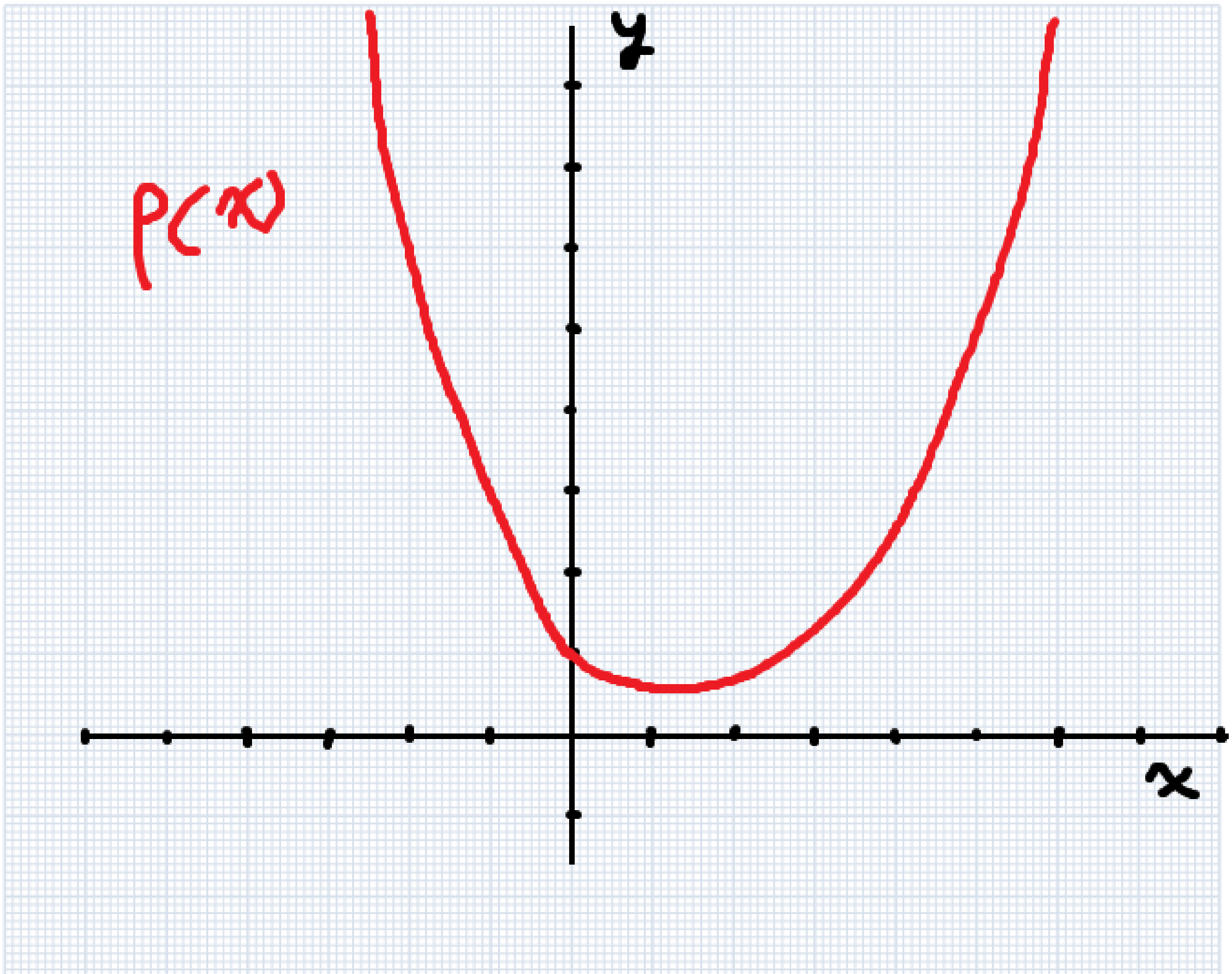
Opgave 5
a)
En cirka tegning :-)



Hvis man vil eftertjekke om det er sandt, så kan man bruge statistik funktionen i WordMat, og deraf få tegnet en sumkurve. Der er den i øvrigt også mere præcis.
Befolkningen der er over 60 år i Lolland Kommune er $100\ \% - 63\ \% = 37\ \%$

b)
Kvartilsæt for figuren i spgm. a) er $[25, 51, 67]$ (bruger man den fra WordMat fås $[27.3, 50.6, 66.4]$ som er lidt mere præcis.).
Sammenligningen viser, at personer med en alder på 25år i Lolland kommune udgør 25%, hvor man i Københavns Kommune har samme procenttal, men en alder på 22år, så det viser sig at der er yngre folk i Københavns Kommune. Det følger ligeledes for medianen og øvre kvartil. Generelt kan der siges at alderen i Lolland Kommune er større end i Københavns Kommune.

Opgave 6
a)
Hvis toppunktet skal ligge i første kvadrant og $b = -1$, så skal $a > 0$. En mulig graf er:



Opgave 7
a)
$f(5) = 2$ og $f'(5) = -3$, så
$g(x) = f(x) \cdot x^2$, dvs.
$g(5) = f(5) \cdot 5^2 = 2 \cdot 5^2 = 50$

OBS: Pas på med afledede t funktion!
$(g(x))' = \left(f(x) \cdot x^2\right)' = f'(x) \cdot x^2 + f(x) \cdot 2x$

Deraf er
$g'(5) = f'(5) \cdot 5^2 + f(5) \cdot 2 \cdot 5 = -3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = -75 + 20 = -55$

Opgave 8
a)
Ligningen for tangenten til grafen for f bestemmes.

$\frac{dy}{dx} + 2x = y + 2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y + 2 - 2x$

Dernæst indsættes P, så man kan få $f'(2)$.

$\frac{dy}{dx} = 6 + 2 - 2 \cdot 2 = 4$

Den ønskede tangent i P er

$y = 4 \cdot (x - 2) + 6 = 4x - 2$

b)

Hvis g skal være en løsning til differentialligningen, så bestemmes g'.

$g'(x) = k + e^x$. Denne samt $g(x)$ indsættes i differentialligningen.

$k + e^x + 2x = k \cdot x + e^x + 2 \Leftrightarrow -(x-1)(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 2$

Dvs. for $k = 2$ er $g(x)$ en løsning til differentialligningen.

Delprøve 2

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

$E1 := [0, 6, 12, 18, 24]$:

$E2 := [220435, 265913, 311586, 411937, 532467]$:

a)

Anvend eksponentiel regression.

$f(x) := ExpReg(E1, E2, x)$:

$f(x)$

$$213462.311684426\ 1.03737376023062^x \tag{1}$$

Heraf kan a og b aflæses til ca. $a = 1.0374$ og $b = 213462.3$

b)

$f(x) = 600000$

$$213462.311684426\ 1.03737376023062^x = 600000 \tag{2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 28.16584621]] \tag{3}$$

Dvs. 28 måneder efter 1.1.2016, dvs. maj 2018.

c)

$T_2 = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.03737376023062)}$

$$T_2 = 18.89081349 \tag{4}$$

Ca. hver 19 måned fordobles antallet af husstande med internet på over 100megabit.

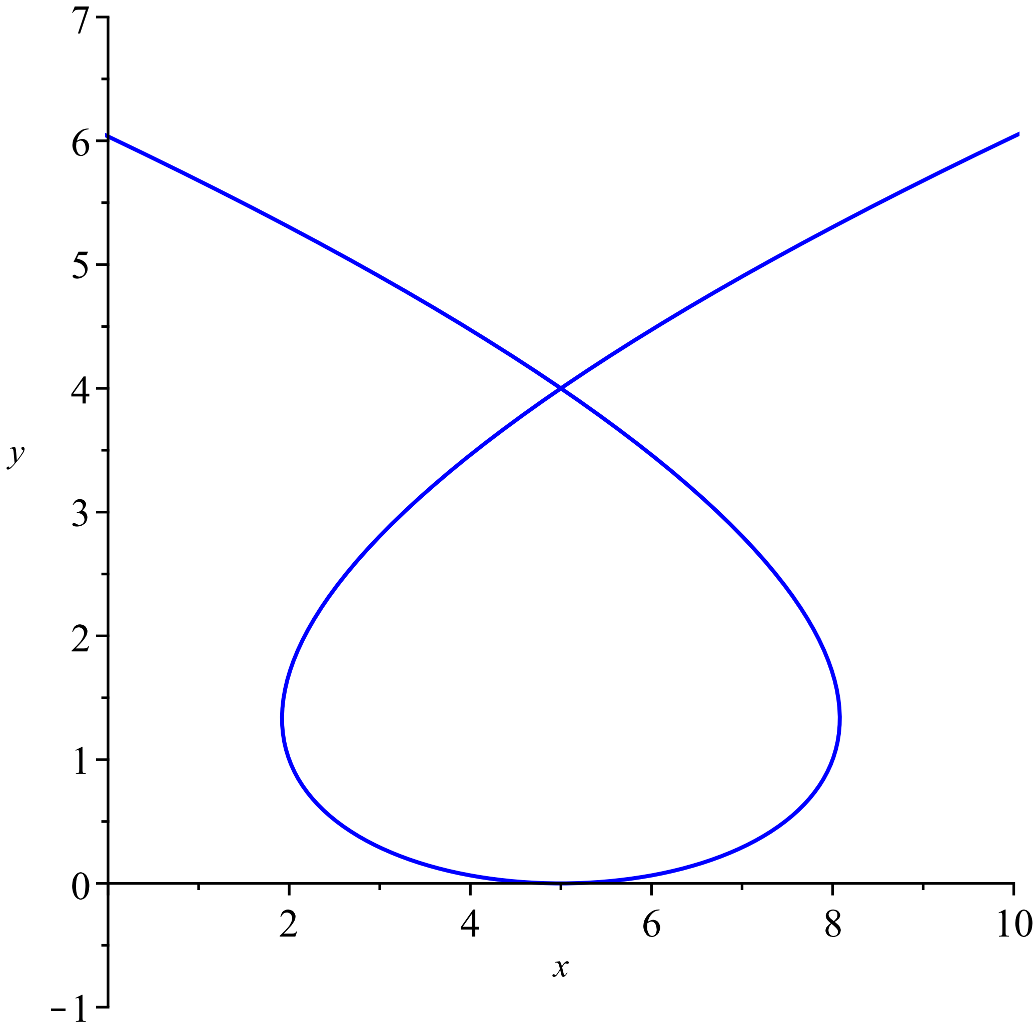
Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

$x(t) := t^3 - 4 \cdot t + 5$:; $y(t) := t^2$:

$\vec{s}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$:

a)
Tegningen af vektorfunktionen i intervallet $-3 \le t \le 3$ giver
$plot([x(t), y(t), t=-3..3], x=-0..10, y=-1..7, color=["Blue"])$



b)
Værdierne af t fås ved løsning af ligningssystemet.
$solve(\{x(t)=5, y(t)=4\}, t)$

$$\{t=2\}, \{t=-2\} \tag{5}$$

Resultatet betyder, at dobbeltpunktet fremkommer, når $t=-2$ eller $t=2$

c)
Længden bestemmes vha. integralet. Anvend sætning 1 s. 17 i forberedelsesmaterialet.

$$L = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$L = \frac{124\sqrt{5}}{27} + \frac{\sqrt{3}\left(\frac{80\sqrt{3}}{27} - \frac{80\sqrt{5}\sqrt{3}}{27}\right)}{6} + \frac{16\sqrt{3}\ \mathrm{EllipticK}\left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right)}{27} - \frac{8\sqrt{3}\ \mathrm{EllipticF}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right)}{27} + \frac{160\sqrt{3}\ \mathrm{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right)}{27} - \frac{80\sqrt{3}\ \mathrm{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right)}{27} - \frac{40}{27} \tag{6}$$

$evalf[5](\%)$

$$L = 15.694 \tag{7}$$

Dvs. længden er ca. 15.696.

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

a)

$A := [0, 0, 5] :; B := [12, 12, 0] :; C := [17, 0, 0] :$

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle :; \overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle :$

$T = \frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$

$$T = \frac{\sqrt{45841}}{2} \tag{8}$$

$evalf[5](\%)$

$$T = 107.06 \tag{9}$$

Dvs. arealet af det lærred, som parasollen består af, er ca. $107.06 dm^2$.

b) Planen for det lærred kaldes for α, og normalvektoren heraf er:

$\overrightarrow{n_\alpha} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\vec{n}_\alpha := \begin{bmatrix} -60 \\ -25 \\ -204 \end{bmatrix} \tag{10}$$

xy-planen har ligningen

$z = 0$. Dermed er det nok at bestemme vinklen mellem normalvektorerne.

$\overrightarrow{n_{xy}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$

$v = 180 - vinkel\left(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_{xy}}\right)$

$$v = 17.6733068 \tag{11}$$

Dvs. den spidse vinkel v er ca. 17.67^o.

Opgave 12
restart :; *with*(*Gym*) :
$x(t) := 19\cdot\cos(1.46\cdot t - 1.57)$:; $y(t) := 21 + 19\cdot\sin(1.46\cdot t - 1.57)$:

$$\vec{s}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}:$$

$s(t)$
a)
intervalsolve$(x'(t) = 0, t = 0..2)$

$$[1.075342466] \qquad \textbf{(12)}$$

Dvs. ved $t = 1.075342466$ fås en tangentvektor der er lodret.

b)
Fart=|hastighed|, dvs. $|\vec{v}(t)|$ er farten.
$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t)$

$$\vec{v}(t) := \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}:$$

len$(\vec{v}(3))$

$$27.74000000 \qquad \textbf{(13)}$$

Dvs. farten er efter 3 sekunder ca. 27.74m/s.

Opgave 13
restart :; *with*(*Gym*) :
a)
Tallet a bestemmes.

$$12 = \frac{\ln\left(\frac{1}{2.}\right)}{\ln(a)} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 0.9438743127]]$$

$r = (0.9438743127 - 1)\cdot 100$

$$r = -5.612568730 \qquad \textbf{(14)}$$

Dvs. temperaturforskellen falder pr. time med 5.61%.

b)
dsolve$(\{L'(t) = k\cdot(L(t) - 20), L(0) = 37\}, L(t))$

$$L(t) = 20 + 17\,e^{k\,t} \qquad \textbf{(15)}$$

Her er der tale om en eksponentiel funktion, hvor $b = 17$ og $a = e^k$, så
$0.9438743127 = e^k \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k = -0.05776226503]]$
Så konstanten er vist.

c)
Forskriften er
$L(t) := 20 + 17\,e^{-0.05776226503\cdot t}$:
$L(t) = 30$

$$20 + 17\,e^{-0.05776226503\,t} = 30 \tag{16}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t = 9.186416959]] \tag{17}$$

Der er gået ca. 9timer.

Slut på dokumentet.