Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 10, Mar. 2018
Published on Web 01/3/2018
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد العاشر، مارس 2018م

تأثير الدوال المستمرة على المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة

أ. سعاد نوح زقوط

Abstract:
The main goal of this research paper is to study the most important characteristics of continuous functions and it is impact on all of the compact and connected sets by clarification the meaning of persistent functions Euclidean space explaining this in several examples, followed by the definition compact sets through definition and speculations described in some examples, then comes explain the concept of connected sets accompanied by examples and speculations. The effect of continuous functions on both compact and connected sets is studied in last part of this research paper through some of the best theorems and examples.

الملخص:
تهدف هذه الورقة البحثية إلى دراسة أهم خواص الدوال المستمرة ألا وهي تأثيرها على كل من المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة من خلال توضيح معنى الدوال المستمرة الحقيقية والدوال المستمرة على الفضاء الإقليدي موضحًا ذلك بعدة أمثلة، يليه التعريف بالمجموعات المتراصة من خلال التعريف والمبرهنات الموضحة ببعض الأمثلة،
يأتي بعد ذلك توضيح مفهوم المجموعات المترابطة مصحوباً بالأمثلة و المبرهنات .
ويتم دراسة تأثير الدوال المستمرة على كل من المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة في الجزء الأخير من هذه الورقة البحثية من خلال بعض المبرهنات و الأمثلة الموضحة كلما أمكن.

المقدمة

تعتبر الدوال المستمرة من المواضيع المهمة في دراسة علوم الرياضيات و خاصة علم التفاضل و التكامل وعلوم الهندسة والتحليل الحقيقي، حيث تمكن دراستها من معرفة سلوك الدالة لتحقيق أهداف معينة وكذلك تمكننا دراسة المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة من معرفة طبيعة العلاقة بين عناصر المجموعة المدروسة والعلاقة بين المجموعات المختلفة في الفضاء الحقيقي والفضاء الاقليدي.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 10, Mar. 2018

Published on Web 01/3/2018

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد العاشر، مارس 2018م

1–الدوال المستمرة Continuous functions

نوضح فيما يلي تعريف الدالة المستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية IR ثم تعميمه على الفضاء الإقليدى IR^n ، حيث تعرف الدالة الحقيقية بأنها مستمرة عند نقطة كالتالي

تعريف 1.1

لتكن $f : A \to IR$ نقول أن f دالة مستمرة عند النقطة $a \in A$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

1) $f(a)$ عددًا حقيقيًا، أي الدالة معرفة عند a.

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة.

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

و تكون f مستمرة على نطاقها إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط نطاقها.

مثال 1

بين ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x + 5$ مستمرة أم لا عند النقطة x = 4.

الحل باختبار الشروط الثلاث نجد أن :

1) $f(4) = 2(4) + 5$

2) $\lim\limits_{x \to 4} 2x+5 = 2(4) + 5 = 13$

3) من 1) و 2) نجد أن الشرط الثالث متحقق .

أما على IR^n فتعرف الدالة المستمرة كما يلي :

تعريف 2.1

لتكن $A \subseteq IR^n$ ، $f : A \to IR^n$ نقول: إن f دالة مستمرة عند النقطة $x_0 \in A$ إذا و فقط إذا كان:

i) x_0 نقطة غير تراكمية للمجموعة A.

ii) $x_0 \in A'$ و لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon, x_0)$ بحيث كلما كانت $|x - x_0| < \delta$ تكون $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

مثال 2

لتكن $f: IN \to IR^n$ دالة معرفة على الصورة $f(x) = x^2 - 8$ ، ناقش استمرارية الدالة على IN .

الحل بما أن $IN' = \phi$ إذن الدالة ليست مستمرة على IN .

ملاحظة

لا توجد دالة مستمرة على IN بأي تعريف.

مثال 3

بين ما إذا كانت الدالة $f: [a, \infty) \to IR$ حيث $a > 0$

المعرفة بالصورة $f(x) = \frac{1}{x}$, مستمرة أم لا.

ليكن $x., x_0 > a$ و عليه $\frac{1}{x}, \frac{1}{x_0} < \frac{1}{a}$

ليكن $\varepsilon > 0$ أي عدد حقيقي موجب، نجد أن

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{1}{a^2}|x - x_0|$$

يكفي وضع $\delta = a^2\varepsilon$ ، لتكن f دالة مستمرة على $[a, \infty)$

مبرهنة 1.1

لتكن $f: A \to IR^n$ دالة ما، فإن الصيغ التالية متكافئة :

i) f دالة مستمرة على A.

ii) إذا كانت $(x_k) \subseteq A$ متتالية، بحيث أن $x_k \to x \in A$ ، فان $f(x_k) \to f(x)$.

iii) الصورة العكسية لمجموعة مغلقة في IR^n تكون مغلقة بالنسبة للمجموعة A.

iv) الصورة العكسية لمجموعة مفتوحة في IR^n تكون مفتوحة بالنسبة للمجموعة A.

2.المجموعات المتراصة Compact sets

تعريف 1.2

إذا كانت $A \subseteq IR^n$ ، نقول إن العائلة: $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ حيث $G_\alpha \subseteq IR^n$ لكل $\alpha \in I$ ، تشكل غطاءً للمجموعة A إذا وإذا كان فقط $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ ، وإذا كانت المجموعات G_α مفتوحة، نقول إن: العائلة تشكل غطاءً مفتوحًا Open cover.

مثال 4

نوضح فيما يلي بعض الأغطية لبعض المجموعات و هي كما يلي :

1) $(0,1)\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{k}\right)$.

2) $IR^n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} D(0,k)$ حيث $D(0,k)$ تعني القرص المفتوح الذي مركزه نقطة الأصل ونصف قطره k.

3) $IR \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(-k,k)$

ملاحظة : معنى الغطاء هو أنه يحصر جميع عناصر المجموعة بداخله.

تعريف2.2

لتكن $A\subseteq IR^n$ ، نقول إن A مجموعة متراصة Compact إذا وفقط إذا كان كل غطاء مفتوح يحتوى على غطاء جزئي منته، أي أنه يوجد N : $A\subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{N} G_\alpha$.

مثال 5

وضح ما إذا كانت المجموعات التالية متراصة أم لا:

1) IR ليست متراصة، لأن الغطاء المفتوح $\bigcup_{k=1}^{\infty}(-k,k)$ لا يمتلك غطاء جزئياً منته لـ IR .

2) IR^n ليس مجموعة متراصة، لأن الغطاء المفتوح $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(0,k)$ لا يوجد غطاء جزئي منته منه لـ IR^n .

ويلاحظ ما يلي:

1) كل مجموعة منتهية في IR^n تكون متراصة.

2) قد تكون المجموعة غير منتهية و متراصة .

3) إذا كانت $B\subseteq C$ ، C مجموعة متراصة، فإنه ليس من الضروري أن تكون B متراصة.

4) إذا كانت A , B مجموعتين متراصتين، فإن $A\cap B$ مجموعة متراصة و $A\cup B$ مجموعة متراصة.

مبرهنة 1.2 (بوريل Borel)

كل فترة مغلقة و محدودة $[a,b]$ تكون متراصة,

البرهان

نفرض أن $(G_k)_{k\succ 1}$ غطاء مفتوح لـ $[a,b]$،

نضع المجموعة $A=\{x : x \in [a,x] : [a,x]$ يمكن تغطيتها بغطاء جزئي منته $\}$

إذن يوجد k_0 بحيث $a \in G_{k_0}$ لأن $[a,x] \subseteq A$ و عليه فان $A \neq \phi$

و A مجموعة محدودة لأن $x \leq b$ لكل $x \in A$ مما يعنى أن $\sup A$ لها وجود و لتكن $\alpha = \sup A$

نتوقع أن $\alpha = b$، إن لم يكن ذلك :

الفترة $[a,x]$ مغطاة بغطاء جزئي منته $[a,x] \subseteq \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} G_k$

إذن يوجد عنصر $\alpha \langle y \langle b$ و بالتالي $[a,y] \subseteq \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} G_k \right) \cup (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

وهذا يعنى أن $y \in A$ (تناقض)

إذن $\alpha = b$ أي يتحقق المطلوب.

مبرهنة2.2

إذا كانت $A \subseteq IR^n$ ، مغلقة و محدودة، فإن A يجب إن تكون متراصة.

المبرهنة التالية تعمم المبرهنة السابقة:

مبرهنة هاين – بوريل (Hein – Borel)

المجموعة $A \subset IR^n$ مغلقة و محدودة إذا و فقط إذا كانت مجموعة متراصة .

3. المجموعات المترابطة Connected sets

تعريف 1.3

لتكن $A \subset IR^n$ نقول إن A: مجموعة غير مترابطة (disconnected) في IR^n إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان $\{U,V\}$ بحيث إن $A \cap U \neq \phi$ ، $A \cap V \neq \phi$ ، $A \cap U \cap V = \phi$ ، و يقال عندها إن $\{U,V\}$ تشكل انفصالاً لـA، و إذا لم يوجد هذا الانفصال نقول إن A مجموعة مترابطة .

مثال 6

المجموعات التالية تمثل مجموعات مترابطة : IR ، IN ، (a,b)

مثال 7

المجموعة $\{1,2,3,4\}$ ليست مترابطة.

مبرهنة 1.3

أي مجموعة مترابطة في IR يجب أن تكون على صورة فترة .

البرهان

لتكن A مجموعة مترابطة في IR توجد حالتان :

1) محدودة : لاحظ أنه إذا كانت α و $\beta \in A$ ، $\alpha < x < \beta$ فان $x \in A$ وبالتالي فإن A يجب إن تكون على الصورة $[a,b]$ ،$(a,b]$ ،$[a,b)$ ،(a,b) أي إن A فترة.

2) A غير محدودة :

i) ليست محدودة من أعلى نلاحظ أنه إذا كانت $\alpha \in A$ ، $\alpha \le x$ فإن $x \in A$ ، إذن A يجب أن تكون على الصورة $[a,\infty)$ أو (a,∞).

ii) ليست محدودة من أسفل نجد أنه إذا كانت $\alpha \in A$ ، $x \le \alpha$ فإن $x \in A$ ، إذن A يجب أن تكون على الصورة $(-\infty,a)$, أو $(-\infty,a]$.

iii) ليست محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى : فان $A = (-\infty,\infty) = IR$

إذن A على صورة فترة

مبرهنة 2.3: IR^n مجموعة مترابطة.

4. تأثير الدوال المستمرة على المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة

ندرس هذا التأثير من خلال بعض المبرهنات ثم نوضحها ببعض الأمثلة.

المبرهنة التالية تبين أن صورة المجموعة المتراصة تحت تأثير الدالة المستمرة تكون مجموعة متراصة :

مبرهنة 4.1

إذا كانت $f : A \to IR^n$ دالة مستمرة و كانت A مجموعة متراصة، فإن $f(A)$ مجموعة متراصة

.

البرهان : نفرض أن $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ غطاءً مفتوحاً للمجموعة $f(A)$ ،

بما أن f دالة مستمرة، إذن $f^{-1}(Q_\alpha)$ تكون مفتوحة (صورة العكسية).

و بما أن $(f(Q_\alpha))_{\alpha \in I}$ تشكل غطاءً مفتوحًا للمجموعة A،

إذن يوجد غطاء جزئي منته لـ A أي $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(Q_i)$ و بالتالي $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (Q_i)$

إذن $f(A)$ لها غطاء جزئي منته و عليه تكون $f(A)$ مجموعة متراصة .

مثال 8

بينما إذا كانت الدوال التالية مستمرة أم لا :

أ) الدالة $g:[0,1] \to [0,1]$ المعرفة بالصورة $g(x) = x$

الحل

الدالة $g(x)$ دالة مستمرة لأن صورة المجموعة المتراصة $[0,1]$ هي مجموعة متراصة وفق المعطى.

ب)الدالة $g(x): (0,1] \to [0,1]$

الحل

هذه الدالة ليست مستمرة بأي تعريف عندما تكون فوقية لأن الصورة العكسية $g^{-1}(x)$ ليست مجموعة متراصة.

المبرهنة التالية توضح أن الدالة المستمرة على مجموعة متراصة حقيقية القيمة تأخذ أكبر قيمة وأصغر قيمة على A .

مبرهنة 2.4

إذا كانت $f : A \to IR$ دالة مستمرة، A مجموعة متراصة، فإنه يوجد $x_0 ، x_1 \in A$ بحيث أن

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) \quad و \quad f(x_1) = \max_{x \in A} f(x) .$$

البرهان

بما أن A مجموعة متراصة، إذن $f(A)$ مجموعة متراصة و بالتالي $f(A)$ مغلقة ومحدودة في IR ، مما يعني أن $\alpha = \inf f(A)$ و $\beta = \sup f(A)$ لهما وجود.

و حيث أن $f(A)$ مغلقة فإن $\alpha \in f(A)$ و $\beta \in f(A)$ ،

إذن يوجد $x_0, x_1 \in A$ بحيث أن $\alpha = f(x_0)$ و $\beta = f(x_1)$.

صورة المجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة تحت تأثير الدالة المستمرة كما يتضح في المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.4

إذا كانت $f : A \to IR^n$ دالة مستمرة، A مجموعة مترابطة، فإن $f(A)$ تكون مترابطة .

البرهان

باستخدام التناقض، بفرض أن $f(A)$ مجموعة غير مترابطة،

إذن توجد U و V مجموعتان مفتوحتان في IR^n بحيث أن $\{\mathrm{U},\mathrm{V}\}$ يشكلان انفصالًا للمجموعة $f(A)$ ،

وعليه تكون $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ انفصالًا للمجموعة A ، و هذا يناقض كون A مجموعة مترابطة.

إذن $f(A)$ مجموعة مترابطة.

مثال 9

بين ما إذا كانت الدالة الفوقية $g(x):[0,1] \xrightarrow{onto} \{1,2\}$ ، مستمرة أم لا.

الجواب لا، الدالة g ليست مستمرة، لأن صورة المجموعة المترابطة يجب أن تكون مترابطة.

لكن صورة المجموعة المترابطة $[0,1]$ ليست مجموعة مترابطة.

مبرهنة القيمة الوسطى 4.4 (The mean value theorem)

إذا كانت $f : A \to IR$ دالة مستمرة، A مجموعة مترابطة، و ليكن $a,b \in f(A)$ بحيث إن $\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$، فإنه يوجد عنصر $x_0 \in A$ يحقق أن $f(x_0) = c$.

البرهان

نفرض أن $a,b \in f(A)$ وأن $\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$، لكن $c \notin f(A)$.

إذن المجموعتان $(-\infty, c)$ و (c, ∞) تشكلان انفصالا للمجموعة $f(A)$ ،

و بالتالي فان الصورة العكسية للمجموعتين تشكل انفصالا للمجموعة A ،

أي أن $f^{-1}(-\infty, c)$ و $f^{-1}(c, \infty)$ انفصالا للمجموعة A ، و هذا تناقض لأن A مترابطة .

إذن $c \in f(A)$.

الخاتمة:

تطرقنا في هذه الورقة البحثية لدراسة تأثير الدوال المستمرة على كل من المجموعات المتراصة و المجموعات المترابطة باستخدام المبرهنات و الأمثلة الموضحة كلما أمكن والله ولي التوفيق.

المراجع :

المراجع العربية

1. رمضان محمد جهيمة، التحليل الحقيقي (الطبعة الثانية)، كلية العلوم – جامعة الفاتح.
2. روبيرت .ج. بارتل، العناصر لتحليل حقيقي، (الطبعة الثانية)، جامعة ألينوى–أريانا – شامبير.

المراجع الأجنبية :

1. JERROLD E MARSDEN , Elementary Classical Analysis, university of California , Berkeley.