INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-B.htm
Pdf filen består af: 25. maj 2012, 31. maj 2012, 15. august 2012

Matematik B STX 25. maj 2012
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Ligningen løses.
$2(3x-1)=4x+8 \Leftrightarrow 6x-2=4x+8 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$
Overbevis dig om at det passer.

Opgave 2

Koefficienten a fortæller: For hvert år der går, fra drengens 5 års alder, vokser drengen med 5.5cm pr. år.
Konstanten b fortæller: Drengen vil være 110cm, når han er 5 år.

Alt sammen postuleres på baggrund af modellen $y=5.5x+110$.

Opgave 3

Andengradsligningen løses.
$x^2+x-12=0$
Hvilke to tal lagt sammen giver 1 (b-værdien) men ganget sammen giver -12? (c-værdien):
Her er $4-3=1$ og $4\cdot(-3)=-12$, så løsningerne er (fortegnsskift):
$x=-4 \vee x=3$.

Overbevis dig om at det passer.

Opgave 4

Funktionen $f(x)=x^3+4x^2-2x-1$. Denne differentieres.
$f'(x)=3x^2+8x-2$, punktet $P(2,f(2))$ anvendes, hvor $x_0=2$, så
$f(2)=2^3+4\cdot 2^2-2\cdot 2-1=8+16-4-1=19$
$f'(2)=3\cdot 2^2+8\cdot 2-2=12+16-2=26$
Tangenten i punktet P er så
$y=26\cdot(x-2)+19 \Rightarrow y=26x-33$.

Overbevis dig om at det passer.

Opgave 5

Grafen for B angiver $h(x)$, da denne er symmetrisk om y-aksen og $h(x)$ har en b-værdi på 0.
Grafen for C angiver $f(x)$, da $f(x)$ er en voksende eksponentiel funktion, med $a > 1$.
Grafen for A angiver $g(x)$, da $g(x)$ kan omskrives til $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1^x}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, her er $0 < a < 1$, så denne er aftagende.

Opgave 6

Punktet noteres.
$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (5x^4 + e^x)\,dx = 5 \cdot \frac{1}{4+1} \cdot x^{4+1} + \frac{e^x}{\ln(e)} + C = x^5 + e^x + C.$
Dernæst bestemmes C, sådan der fås en partikulær funktion.
$10 = 0^5 + e^0 + C \Leftrightarrow 10 = 0 + 1 + C \Leftrightarrow 9 = C.$
Så forskriften er
$F(x) = x^5 + e^x + 9.$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Lad $1999 = 0$, så er $2009 = 10$, og dermed defineres oplysningerne:
$E1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:$
$E2 := [1.44, 1.56, 1.64, 1.82, 2.04, 2.17, 2.43, 2.62, 2.85, 3.30, 3.49]:$
Der laves eksponentiel regression.
$f(x) := ExpReg(E1, E2, x):$
$evalf[5](f(x))$

$$1.4050\ 1.0950^x \tag{7.1.1}$$

her er $a := 1.0950$: og $b := 1.4050$: bestemt.

Spgm. b

Fordoblingstiden bestemmes, da $a > 1$.
$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T_2 = 7.6378$
Så udgifterne fordobles ca. hvert 7-8 år.

Spgm. c

Man bestemmer $x = 11$, så
$f(11)$

$$3.81334781687266 \tag{7.3.1}$$

Så er

$$\frac{3.81334781687266 - 2.61}{2.61}$$

$$0.4610528035 \tag{7.3.2}$$

Så modellens værdi er 46.10% større end hvad der er virkelighed. Et ret godt tegn på modellen ikke passer.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :
Oplysningerne defineres.
$B := 113$:; $AB := 6.19$:; $BC := 10.30$:

Spgm. a

Længden AC bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$AC := \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot Cos(B)}$$

$$AC := 13.93663478 \tag{8.1.1}$$

Sinusrelationerne anvendes for at finde A.

$$\frac{Sin(A)}{BC} = \frac{Sin(B)}{AC}$$

$$0.09708737864 \sin(0.01745329252\ A) = 0.06604929153 \tag{8.1.2}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for A}}$$

$$[[A = 42.86769270]] \tag{8.1.3}$$

$A := 42.86769270$

$$A := 42.86769270 \tag{8.1.4}$$

Som er den ønskede vinkel.

Spgm. b

Trekanten ABE skal have arealet på 5. Dermed er

$$5 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \cdot Sin(A)$$

$$5 = 2.105552340\ AE \tag{8.2.1}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for AE}}$$

$$[[AE = 2.374673811]] \tag{8.2.2}$$

Længden AE skal være 2.374673811 for at arealet er 5.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Der opstilles to ligninger.
$3 = b \cdot 2^a$ og $7 = b \cdot 4^a$
Ligningssystemet løses for a og b.
$solve(\{3 = b \cdot 2^a, 7 = b \cdot 4^a\})$

$$\left\{a = \frac{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{\ln(2)}, b = \frac{9}{7}\right\} \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Dermed er forskriften

$f(x) := \frac{9}{7} \cdot x^{\frac{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{\ln(2)}}$

$$f := x \mapsto \frac{9\,x^{\frac{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{\ln(2)}}}{7} \quad \textbf{(9.1.2)}$$

$evalf[5](f(x))$

$$1.2857\,x^{1.2224} \quad \textbf{(9.1.3)}$$

Som så er svaret.

Opgave 10

$restart$:; $with(Gym)$:

Spgm. a

Funktionen defineres.

$f(x) := x^4 + 8\,x^3 + 18\,x^2 + 16\,x + 5$

$$f := x \mapsto x^4 + 8\,x^3 + 18\,x^2 + 16\,x + 5 \quad \textbf{(10.1.1)}$$

Ligningen $f(x) = 0$ løses.

$f(x) = 0$

$$x^4 + 8\,x^3 + 18\,x^2 + 16\,x + 5 = 0 \quad \textbf{(10.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -5], [x = -1], [x = -1], [x = -1]] \quad \textbf{(10.1.3)}$$

Dermed er der fundet de to løsninger, da -1 optræder tre gange. Så $x = -5 \vee x = -1$.

Spgm. b

Den afledede bestemmes, og den sættes lig 0.

$f'(x) = 0$

$$4\,x^3 + 24\,x^2 + 36\,x + 16 = 0 \quad \textbf{(10.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -4], [x = -1], [x = -1]] \quad \textbf{(10.2.2)}$$

Der laves monotoniforhold over $f(x)$. Her vælges -5, -3 og 0, så

$f'(-5); f'(-3); f'(0)$

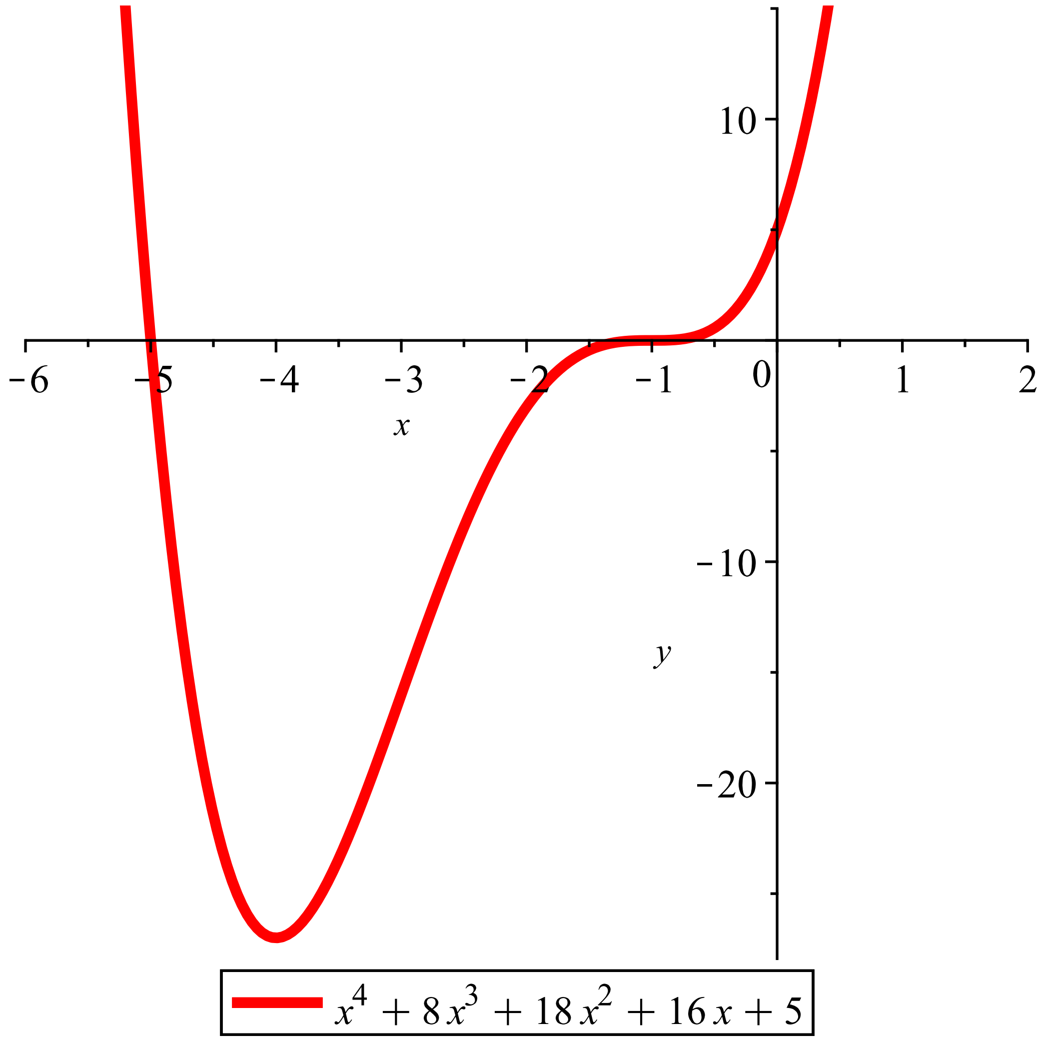
$$-64$$
$$16$$
$$16 \quad \textbf{(10.2.3)}$$

Et monotoniskema overlades til læseren. Funktionen har vandret vendetangent i $x = -1$.

Funktionen er:

Aftagende i intervallet $(-\infty; -4]$ og voksende i intervallet $[-4; \infty)$.

$plot(f(x), x=-6..2, y=-28..15, color = ["Red"], legend = [f(x)], thickness = 4)$



$\exp(0.1518)$

$$1.163927428 \tag{10.2.4}$$

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Funktionerne defineres.

$f(x) := \text{sqrt}(x); g(x) := 0.5 \cdot x$

$$f := x \mapsto \sqrt{x}$$
$$g := x \mapsto 0.5\, x \tag{11.1.1}$$

Her er $x \geq 0$ for $f(x)$.

Ligningen $f(x) = g(x)$ løses, så

$f(x) = g(x)$

$$\sqrt{x} = 0.5\, x \tag{11.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0.], [x=4.]] \quad \textbf{(11.1.3)}$$

Begge løsninger virker, da $f(x) \geq 0$.

Spgm. b

Da $f(x)$ er kvadratrodsfunktionen og $g(x)$ er en voksende lineære funktion, dvs. når x vokser med 1 vokser a med $\frac{1}{2}$, det betyder, at $f(x)$ ligger over $g(x)$. Man har arealet af M:

$M = \int_0^4 (f(x) - g(x))\, dx$

$$M = 1.333333333 \quad \textbf{(11.2.1)}$$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

De forventede værdier udregnes.

$A\ positiv = \frac{37}{100} \cdot 950 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} A\ positiv = 351.50$

$\mathrm{O}\ positiv = \frac{35}{100} \cdot 950 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \mathrm{O}\ positiv = 332.50$

$B\ positiv = \frac{8}{100} \cdot 950 \overset{\text{simplify}}{=} B\ positiv = 76$

$AB\ positiv = \frac{4}{100} \cdot 950 \overset{\text{simplify}}{=} AB\ positiv = 38$

$A\ negativ = \frac{7}{100} \cdot 950 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} A\ negativ = 66.500$

$\mathrm{O}\ negativ = \frac{6}{100} \cdot 950 \overset{\text{simplify}}{=} \mathrm{O}\ negativ = 57$

$B\ negativ = \frac{2}{100} \cdot 950 \overset{\text{simplify}}{=} B\ negativ = 19$

$AB\ negativ = \frac{1}{100} \cdot 950 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} AB\ negativ = 9.5000$

Spgm. b

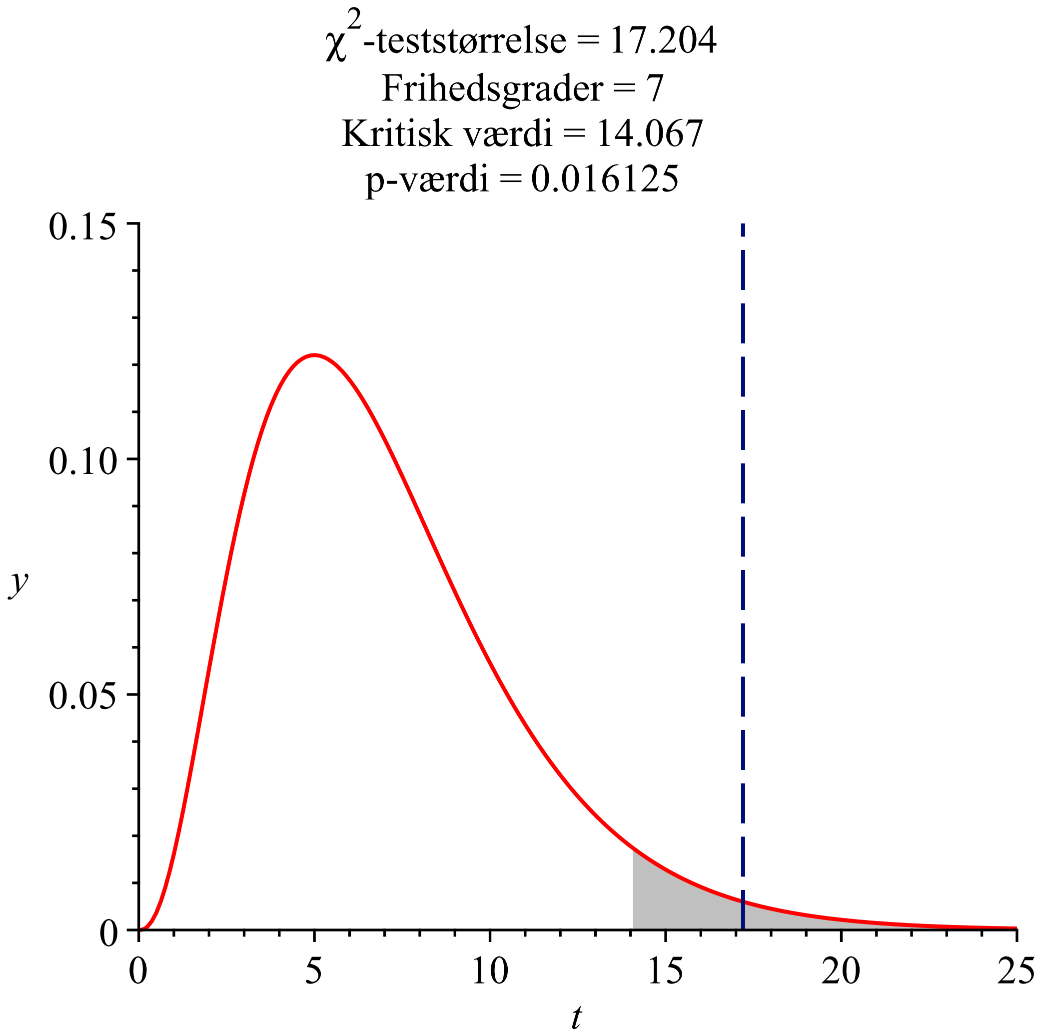
De observerende og forventede værdier defineres nedenfor:

$OBS := [350, 320, 80, 55, 56, 50, 30, 9]:$

$FORV := [351.5, 332.5, 76, 38, 66.5, 57, 19, 9.5]:$

Der anvendes en Goodness-of-Fit-test.

ChiKvadratGOFtest(*OBS*, *FORV*, *level* = 0.05)



Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, afvises nulhypotesen.
Det viser sig, at lægeklinikken ikke har samme blodtypefordeling som resten af den danske befolkning.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Arealet af *AEH* er:

$T_{AEH} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - 2x)$

$$T_{AEH} = \frac{x\,(4 - 2x)}{2} \quad \textbf{(13.1.1)}$$

Arealet af *BEF* er:

$T_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot (4 - x) \cdot 2x$

$$T_{BEF} = 2\left(2 - \frac{x}{2}\right)x \quad \textbf{(13.1.2)}$$

Dernæst bestemmes arealet af hele kvadratet, som så er 16, da

$T = 4 \cdot 4 = 16$. Dertil fratrækkes de retvinklede trekanters areal fra før. Man får:
$T(x) = 16 - (4 - x) \cdot 2x - x \cdot (4 - 2x) = 16 - 8x + 2x^2 + 2x^2 - 4x = 4x^2 - 12x + 16$.
Som var det ønskede.

Spgm. b

Den fundende funktion fra før defineres og differentieres.
$T(x) := 4x^2 - 12x + 16$

$$T := x \mapsto 4x^2 - 12x + 16 \tag{13.2.1}$$

Så løses ligningen:
$T'(x) = 0$

$$8x - 12 = 0 \tag{13.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{3}{2}\right]\right] \tag{13.2.3}$$

Da $\frac{3}{2} = 1.5$ ligger i intervallet $0 < x < 2$ så er det sandt. Dernæst anvendes anden afledede for at undersøge, om dette er det mindst mulige værdi af x. Man har
$T''\left(\frac{3}{2}\right)$

$$8 \tag{13.2.4}$$

Da tallet 8 er større end 0, så følger det, at $x = \frac{3}{2}$ giver det midste areal.

Matematik B STX 31. maj 2012
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Funktionen $f(x)$ er en lineær aftagende funktion med skæring ved y-aksen omkring $y = 1$. Grafen for denne er den eneste på tegningen, og det er A.
Funktionen $g(x)$ er en lineær voksende funktion med skæring i origo, den eneste der opfylder dette, er grafen for C.
Funktionen $h(x)$ er en lineær voksende funktion med skæring ved y-aksen omkring $y = 2$.
Udelukkelsesmetoden siger, det er B.

Opgave 2

Diskriminanten bestemmes.
$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$. Da $d > 0$, eksisterer der to løsninger.
Løsningerne bestemmes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2\,a} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{-8+2}{2} = -3 \\ \dfrac{-8-2}{2} = -5 \end{cases}$$

Dermed er løsningerne
$x = -5 \vee x = -3$.

Opgave 3

Længden AB bestemmes vha. Pythagoras.

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Arealet af trekanten ABC er

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (30 - 10 - 7.5) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{25}{2} = \frac{150}{4} = \frac{75}{2} = 37.5$$

Som er arealet.

Opgave 4

Fordoblingskonstanten er $T_2 = 3$, så

$x = 0$ giver $f(0) = 7$
$x = 3$ giver $f(3) = 14$
$x = 6$ giver $f(6) = 28$
$x = 9$ giver $f(9) = 56$
Så dermed kan man se et mønster, at $f(x)$ værdien fordobles hver gang x øges med 3.

Opgave 5

Funktionen $f(x) = 2 \cdot e^x + 1$, så er
$f'(x) = 2 \cdot e^x$.

Tangenten i punktet P med $x_P = 0$ er

$f(0) = 2 \cdot e^0 + 1 = 3$
$f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$
Tangenten er så
$y = f'(x_P) \cdot (x - x_P) + f(x_P) = 2 \cdot (x - 0) + 3 = 2\,x + 3$.

Opgave 6

Det vil være spild af tid at differentiere funktionerne for at se hvilken der passer.
Derimod anvendes et integral.

$$F_n(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4\,x + 3)\,\mathrm{d}x = 2\,x^2 + 3\,x + C$$

Hvor $n \in \{1, 2, 3\}$.

Man har så punktet, og det anvendes for at finde C.

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + C = 10 \Leftrightarrow 2 + 3 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$$

Dermed er den eneste stamfunktion der opfylder dette er

$$F_1(x) = 2\,x^2 + 3\,x + 5$$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :
Tabellens data indlæses.
$E1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$:
$E2 := [2056, 2899, 4170, 6120, 9914, 17320]$:

Spgm. a

Der laves en eksponentiel regression.
$S(t) := ExpReg(E1, E2, t)$:
$evalf[5](S(t))$

$$1902.3\ 1.5232^t \quad \textbf{(20.1.1)}$$

Så forskriften er hermed blevet fundet.

Spgm. b

$t = 10$ svarer til 2015, så man har
$S(10) \xrightarrow{\text{ceiling}} 127875$
Ifølge modellen vil man have 127875 MW solcellekapacitet.

Spgm. c

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, stiger solcellekapaciteten med 52.32%, hvor i år 2005 var solcellekapaciteten på 1902 ifølge modellen.

Udregning af r vha. fremskrivningsfaktoren:
$r = (1.5232 - 1) \cdot 100$

$$r = 52.3200 \quad \textbf{(20.3.1)}$$

NB: Procenttal

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Længden BC bestemmes vha. Pythagoras.
$BC = \sqrt{6^2 + (2+5)^2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} BC = 9.2195$

Og arealet af ABC er
$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$

$$T = 15 \quad \textbf{(21.1.1)}$$

Spgm. b

Vinkel B bestemmes.

$B = invCos\left(\frac{2+5}{9.2195}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} B = 40.601$

Medianen m_a er

$$m_a = \sqrt{5^2 + \left(\frac{9.2195}{2}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{9.2195}{2}\right) \cdot Cos(40.601)}$$

$$m_a = 3.354073576 \quad \textbf{(21.2.1)}$$

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$v(r) := 0.0060 \cdot r^{2.6657}$:
Her indsættes 40 på $v(r)$, så
$v(r) = 40$

$$0.0060\, r^{2.6657} = 40 \quad \textbf{(22.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$27.19479435 \quad \textbf{(22.1.2)}$$

Hermed er radius for græskaret 27.195cm.

Hvis radius øges med $r_x = 10\ \%$, så øges vægten med 28.925%, da:

$$r_y = \left(\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{2.6657} - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = 28.92599170 \quad \textbf{(22.1.3)}$$

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Funktionen defineres.
$f(x) := x^4 - 2 \cdot x^2 + 4$:
Dernæst løses
$f'(x) = 0$

$$4\, x^3 - 4\, x = 0 \quad \textbf{(23.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 1], [x = -1]] \quad \textbf{(23.1.2)}$$

Spgm. b

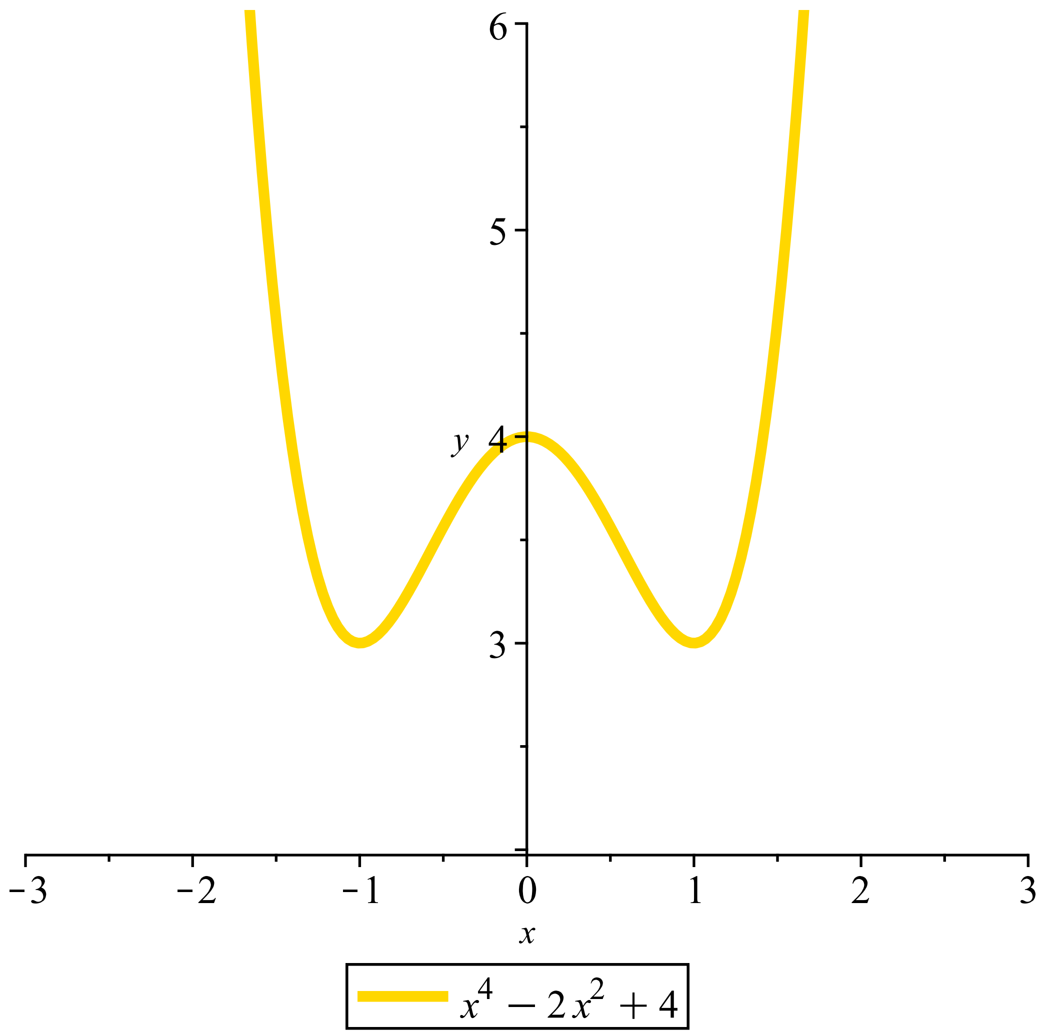
Løsningerne fra før anvendes her for at man kan bestemme monotoniforholdene.

$f'(-2); f'\left(-\frac{1}{2}\right); f'\left(\frac{1}{2}\right); f'(2)$

$$-24$$
$$\frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2}$$
$$24 \qquad \textbf{(23.2.1)}$$

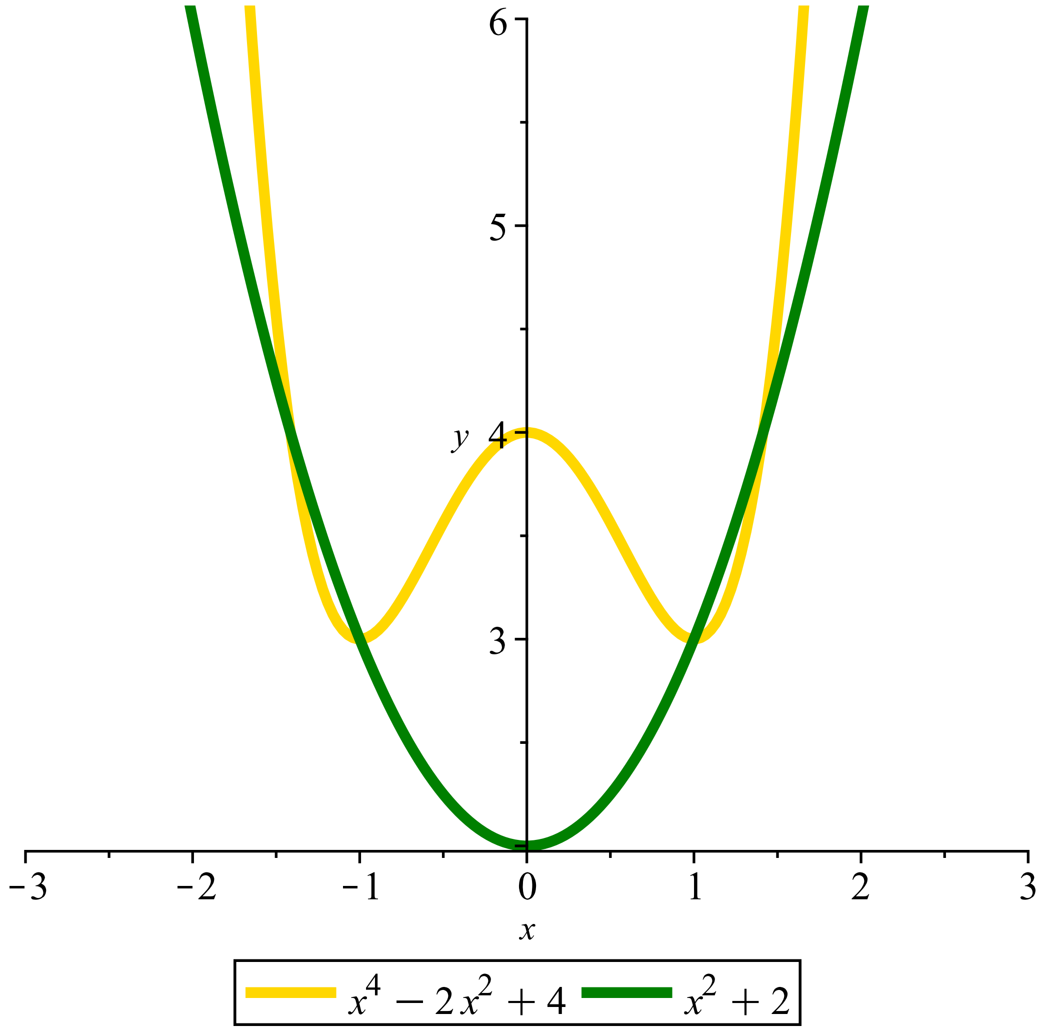
Dermed kan læseren lave et monotoniskema. Man har "minus,plus,minus,plus" så vi kan slutte, at:
$f(x)$ er aftagende i intervallet $(-\infty;-1]\cup[0;1]$
$f(x)$ er voksende i intervallet $[-1;0]\cup[1;\infty)$.

En tegning:
$plot(f(x), x=-3..3, y=2..6, color=["Gold"], legend=[f(x)], thickness=4)$



Spgm. c

Den nye funktion defineres.
$g(x) := x^2 + 2 :$
$plot([f(x), g(x)], x=-3..3, y=2..6, color=["Gold", "Green"], legend=[f(x), g(x)],$
$thickness=4)$



Man ser, at $f(x)$ ligger over $g(x)$, så arealet af området, begrænset af intervallet $-1 \leq x \leq 1$ er

$M = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx$

$$M = \frac{12}{5} \qquad \textbf{(23.3.1)}$$

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

De forventede værdier bestemmes.

$A = \frac{24.8}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} A = 271.81$

$B = \frac{9.5}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} B = 104.12$

$C = \frac{4.9}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} C = 53.704$

$F = \frac{9.2}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} F = 100.83$

$I = \frac{5}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \mathrm{I} = 54.800$

$K = \frac{0.8}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} K = 8.7680$

$\mathrm{O} = \frac{12.3}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \mathrm{O} = 134.81$

$V = \frac{26.8}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} V = 293.73$

$Ø = \frac{6.7}{100} \cdot 1096 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} Ø = 73.432$

Spgm. b

De observerende og forventede værdier defineres nedenfor:

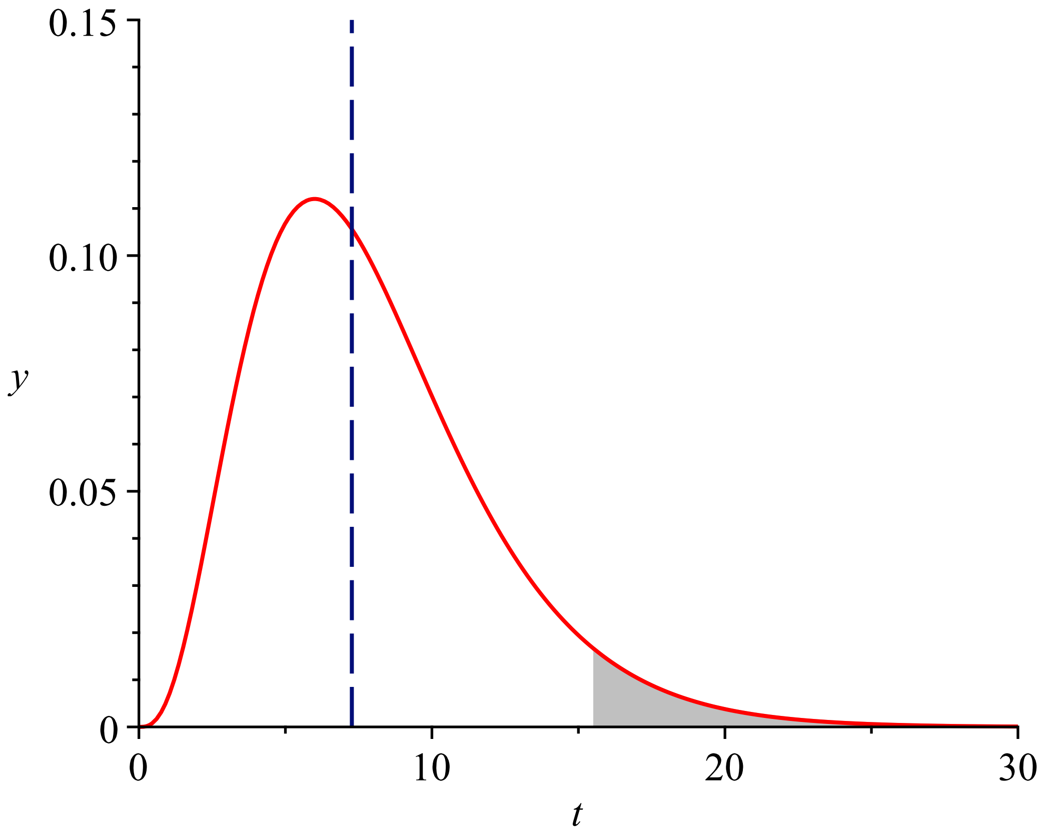
$OBS := [265, 115, 44, 85, 55, 7, 136, 313, 76]:$

$FORV := [271.81, 104.12, 53.704, 100.83, 54.8, 8.767, 134.81, 293.73, 73.432]:$

Der anvendes en Goodness-of-Fit-test.

$ChiKvadratGOFtest(OBS, FORV, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 7.2676
Frihedsgrader = 8
Kritisk værdi = 15.507
p-værdi = 0.50805



Da teststørrelsen er mindre end den kritiske værdi, accepteres nulhypotesen. Vælgeradfærden er uændret siden valget.

Opgave 12

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Omkredsen er

$O = h + h + 2 \cdot Pi \cdot r$

$$O = 2\pi r + 2h \tag{25.1.1}$$

Arealet er

$A = h \cdot 2 \cdot r - Pi \cdot r^2$

$$A = -\pi r^2 + 2hr \tag{25.1.2}$$

Så anvendes $O = 6$, og h isoleres.

$2\pi r + 2h = 6 \xrightarrow{\text{isolate for h}} h = -\pi r + 3$

Dette indsættes i arealformlen.

$A(r) = -\pi r^2 + 2 \cdot (-\pi r + 3) \cdot r \overset{\text{simplify}}{=} A(r) = -3\pi r^2 + 6r$

Som er det ønskede.

Arealformlen differentieres.

$A(r) := -3\pi r^2 + 6r :$

$A'(r) = 0$

$$-6\pi r + 6 = 0 \tag{25.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$\left[\left[r = \frac{1}{\pi}\right]\right] \tag{25.1.4}$$

Den dobbelte afledede anvendes.

$A''\left(\frac{1}{Pi}\right)$

$$-6\pi \tag{25.1.5}$$

Da outputtet er mindre end 0, så er $\frac{1}{Pi}$ det maksimale radius så arealet bliver størst muligt.

Matematik B STX 15. august 2012
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Ligningen løses.

$2x + 3 = -5x + 17 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$

Overbevis dig om at det passer.

Opgave 2

Først omregnes $r = 4.5\ \%$ til fremskrivningsfaktor.

$a = 1 + r = 1 + \frac{4.5}{100} = 1.045$

En passende model for Peter vil være:

$y = 25000 \cdot 1.045^x$.

Hvor y er kontoens indestående til tidspunktet x, målt i år.

Opgave 3

Længden x bestemmes vha. Pythagoras.

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$

Arealet af dragen bestemmes. Bemærk, at de fire trekanter er symmetriske, så de kan omdannes til to rektangler

$T_{øvre} = 6 \cdot 8 = 48$

$T_{nedre} = 6 \cdot 16 = 96$

Det totale areal er:

$T_{total} = 48 + 96 = 144$

Opgave 4

$f(3) = 12$, og for hver gang x vokser med 8, så øges y med 2, så

$f(3 + 8) = 12 \cdot 2$, dvs. $f(11) = 24$.

Opgave 5

Arealet bestemmes.

$M = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-6x^2 + 6x\right)\ \mathrm{d}x = \left[-2x^3 + 3x^2\right]_0^1 = -2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - \left(-2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right) = -2 + 3$
$- 0 = 1$

Opgave 6

Givet $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x + 5,\ x > 0$, da er

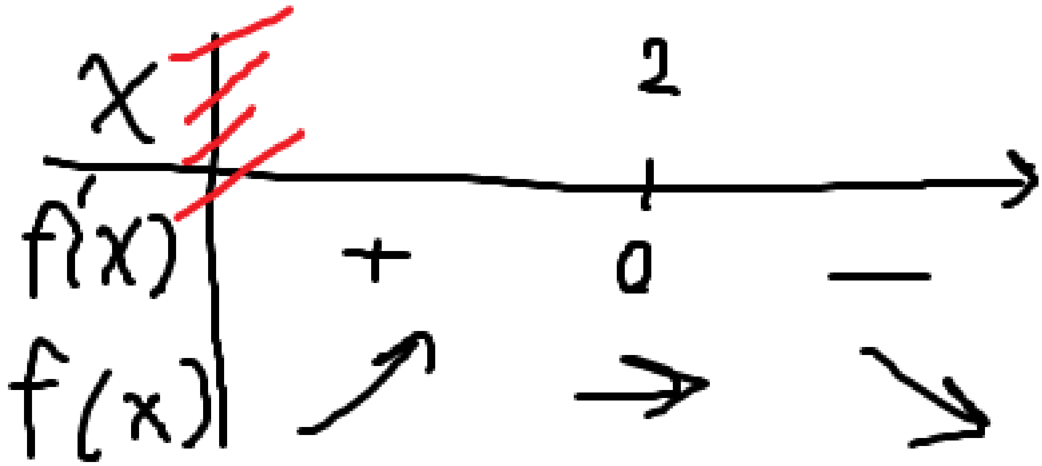
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ og hermed løses ligningen $f'(x) = 0$, så $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$. Her er 2>0.

Værdierne 1 og 4 testes.

$f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Så kan monotoniskemaet ses:



De røde klodsede streger angiver, at $x > 0$.
Og dermed er $f(x)$:
- Voksende i intervallet $(0; 2]$
- Aftagende i intervallet $[2; \infty)$.

De resterende opgaver løses **<u>med</u>** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Modellen defineres.

$y(x) := -x + 21.8$

$$y := x \mapsto -x + 21.8 \tag{32.1.1}$$

Her indsættes $x = 10$, så

$y(10)$

$$11.8 \tag{32.1.2}$$

En ørred der er 10cm lang, har en årlig længdeforøgelse på 11.8cm.

Spgm. b

$y(x) = 0$

$$-x + 21.8 = 0 \tag{32.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 21.80000000]] \tag{32.2.2}$$

Når en ørred har opnået længden på 21.8cm, så vokser den ikke længere.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Funktionen defineres.

$f(x) := -0.05\cdot x^2 + 0.8\cdot x + 2.3:$
Her er $x \geq 0$.
Længden af kuglestøddet bestemmes ved at løse ligningen
$f(x) = 0$

$$-0.05\,x^2 + 0.8\,x + 2.3 = 0 \tag{33.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$-2.488088482,\ 18.48808848 \tag{33.1.2}$$

$x = -2.488088482$ er ikke med, så $x = 18.48808848$ er svaret. Dvs. længden er (afrundet til spillerens fordel): 18.5m

Spgm. b

Kan løses på to måder. Toppunktets $y-$koordinat eller differentialregning.

$T_y = -\dfrac{0.8^2 - 4\cdot(-0.05)\cdot 2.3}{4\cdot(-0.05)}$

$$T_y = 5.500000000 \tag{33.2.1}$$

Den maksimale højde er 5.5m over jorden.
$f'(x) = 0$

$$-0.10\,x + 0.8 = 0 \tag{33.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 8.]] \tag{33.2.3}$$

$f(8)$

$$5.50 \tag{33.2.4}$$

Som så også giver svaret 5.5m

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :
$P1 := [5, 10, 15, 20, 25, 30]:$
$P2 := [20, 157, 530, 1256, 2453, 4239]:$

Spgm. a

Forskriften for V bestemmes vha. potensregression.
$V(x) := PowReg(P1, P2, x):$
$evalf[5](V(x))$

$$0.16157\,x^{2.99058845434504} \tag{34.1.1}$$

Som så er den ønskede forskrift.

Spgm. b

Ligningen nedenfor løses (numerisk, for at undgå komplekse værdier!)
$V(x) = 2000$

$$0.161587103565441\,x^{2.99053465054290} = 2000 \tag{34.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$23.36283943 \tag{34.2.2}$$

Så højden skal være 23.363cm.

Spgm. c

Hvis højden øges med $r_x = 10\ \%$, så øges volumen med 32.98%, da:

$$r_y = \left(\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2.99053465054290} - 1\right)\cdot 100$$

$$r_y = 32.97997880 \qquad \textbf{(34.3.1)}$$

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Modellen defineres.

$$C(t) := \frac{900000\cdot 1.031^t}{t+38}$$

$$C := t \mapsto \frac{900000\ 1.031^t}{t+38} \qquad \textbf{(35.1.1)}$$

Dernæst bestemmes $C'(72)$, så

$C'(72)$

$$1580.025101 \qquad \textbf{(35.1.2)}$$

Dette tal fortæller, at i år 2022 (1950+72) er den gennemsnitlige årlige udledning af CO_2 pr. person på 1580kg/årligt

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Nulhypotesen:

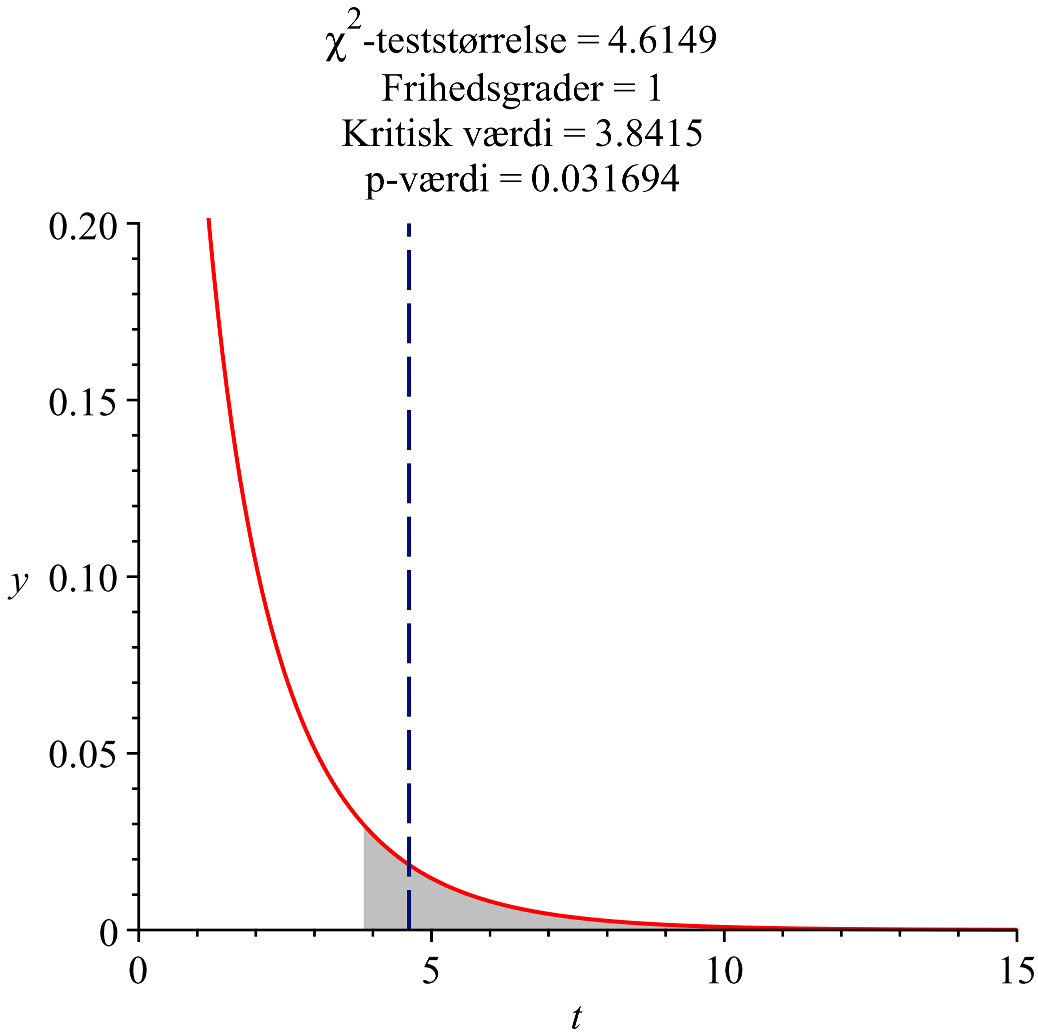
H_0 = *Børns rygevaner er uafhængig af forældrens rygevaner.*

Oplysningerene defineres i en matrix.

$$OBS := \begin{bmatrix} 35 & 33 \\ 23 & 46 \end{bmatrix} :$$

Der anvendes en uafhængighedstest.

ChiKvadratUtest(*OBS*, *level* = 0.05)



Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, afvises nulhypotesen.
Det viser sig, at børns rygevaner ikke er afhængig af forældrenes rygevaner.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :
Oplysningerne defineres.
$C_{ABC} := 60$:; $BC := 2.7$:; $AB := 2.4$:

Spgm. a

Vinkel BAC menes blot A i trekanten ABC. Denne vinkel bestemmes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{Sin(A)}{BC} = \frac{Sin(C_{ABC})}{AB}$$

$$0.3703703704 \sin(0.01745329252\, A) = 0.3608439183 \quad \textbf{(37.1.1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for A}}$$

$$[[A = 76.97671884]] \quad \textbf{(37.1.2)}$$

Hermed blev vinkel *A* fundet.

Spgm. b

Højden *BE* bestemmes.
Et nyt punkt på linjen *BE* betegnes *K*, så
$C_{BCK} := 90 - 60$

$$C_{BCK} := 30 \tag{37.2.1}$$

Så er
$BK := 2.7 \cdot Sin(C_{BCK})$

$$BK := 1.350000000 \tag{37.2.2}$$

Og så er
$BE = BK + 0.7$

$$BE = 2.050000000 \tag{37.2.3}$$

Den ønskede længde.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$f(x) := -x^3 + 3x^2 + x + 4$

$$f := x \mapsto -x^3 + 3x^2 + x + 4 \tag{38.1.1}$$

Man sætter hældingen lig med den afledede.
$f'(x) = 4$

$$-3x^2 + 6x + 1 = 4 \tag{38.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = 1]] \tag{38.1.3}$$

Så førstekoordinaten til røringspunktet er $x = 1$.

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Pythagoras anvendes. Her isoleres *h*.
$h = \sqrt{90^2 - x^2}$
Volumen af sengen svarer til at bestemme volumen i et rektangel, da trekanten er symmetrisk om *h*, så man har
$R = 200 \cdot x \cdot h = 200 \cdot x \cdot \sqrt{90^2 - x^2}$ hvor $0 < x < 90$

Spgm. b

$R(x) := 200 \cdot x \cdot \sqrt{90^2 - x^2}$:
Ovenstående differentieres og nedenstående ligning løses.
$R'(x) = 0$

$$200\sqrt{-x^2 + 8100} - \frac{200x^2}{\sqrt{-x^2 + 8100}} = 0 \tag{39.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -45\sqrt{2}], [x = 45\sqrt{2}]] \quad \textbf{(39.2.2)}$$

evalf[5](%)

$$[[x = -63.639], [x = 63.639]] \quad \textbf{(39.2.3)}$$

Her er 63.639 defineret i intervallet $0 < x < 90$. Den dobbelte afledede kan vise om $x = 63.639$ er maksimum

$R''(63.639)$

$$-799.9769845 \quad \textbf{(39.2.4)}$$

Da outputtet er negativt, så er $x = 63.639$ maksimum og dermed den værdi der giver det største rumfang.