استخدام العلاقات التكرارية الأساسية لمتعددات حدود هيرمت في استنتاج صيغ (علاقات) تكرارية أخرى

عادل عبود نجم[1]، أحمد علي الواكشي[2]
[1]قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة سومر، العراق، [2]قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة مصراتة

Email: elwakshi2007@yahoo.com

الملخص Abstract:

كنتيجة مما تقدم وللأهمية الكبيرة لمتعددات حدود هيرمت التي تظهر كحلول لمعادلة هيرمت التفاضلية خاصة تلك المعادلات التفاضلية ذات التطبيقات الفيزيائية والهندسية ، وكما هو الحال في الكثير من الدوال الخاصة المعروفة كدوال بيسل وليجندر وغيرها التي تملك صيغ تكرارية يستفاد منها لتبسيط وحل الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية والهندسية بأسلوب رياضي متقدم ، فان متعددات حدود هيرمت تملك صيغتين تكراريتين أساسيتين ومن هنا جاءت فكرة البحث وهي استخدام هاتين الصيغتين في اكتشاف واستنتاج صيغ تكرارية أخرى وعلاقاتها بدوال أخرى كمتعددات حدود ليجندر، تفيد في حل الكثير من المسائل ذات العلاقة.

كلمات مفتاحية: متعددات حدود هيرمت، العلاقات التكرارية، الدالة المولدة.

المقدمة Introduction:

تكمن أهمية معادلة هيرمت التفاضلية في استخدامها الواسع في مجالات الفيزياء والهندسة والعلوم الرياضية الاخرى، وبشكل اكثر تحديدا لموضع بحثنا فمتعددات حدود هيرمت تظهر كحل لمعادلة شرودنجر التفاضلية Schrodinger Equation للاهتزاز او التذبذب التوافقي Harmonic oscillator الكمومي من ميكانيكا الكم والتي فيها يوصف الجسيم المتحرك على انه دالة موجبة ψ وشكلها العام هو:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi m^2}{h^2}\left(E-\tfrac{1}{2}Kx^2\right)\psi=o$$

حيث أن E ، M ، h ، k ثوابت

أن للمعادلة التفاضلية أعلاه حلا عند قيم معينة للطاقة (E) وهذه القيم عادة ما تكون منفصلة " متقطعة " وجميع هذه القيم تدعي بالقيم الذاتية (Eigen values) أما الدوال الذاتية eygine functions المقابلة لهذه القيم فتمثل الحل y والذي عادة ما يظهر بدلالة متعددات حدود هيرمت حيث يعطي الحل العام بالعلاقة.

$$\psi=\boldsymbol{C_nH_n}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right)\boldsymbol{e}^{\frac{-x^2}{4a^2}}\ ,\qquad \boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\ldots$$

حيث

$$a = \sqrt[4]{\frac{h^2}{16\pi^2{}_{km}}}$$

$$E = (n + \frac{1}{2})\ \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

تعريفات ومصطلحات هامة

الحل العام لمعادلة هيرمت التفاضلية [4]

إن الشكل العام لمعادلة هيرمت التفاضلية هو

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\,\lambda y = 0 \qquad (1)$$

حيث **λ** ثابت.

إن هذه المعادلة التفاضلية يمكن حلها باستخدام طريقة متسلسلات القوى power series بافتراض أن

$$\mathrm{y} = \sum_{r=1}^{\propto} a_r x^{k+r} \qquad (2)$$

حيث يظهر حلان لـ y واللذان يشكلان الحل العام لمعادلة هيرمت التفاضلية و هما

$$y = a_0 \begin{bmatrix} -1\dfrac{2\lambda}{2!}x + \dfrac{2\lambda(2\lambda-2)}{4!}x^4 \\ +(-2)^m\lambda(\lambda-2)\ + \\ \ldots\ldots\ldots + \dfrac{(\lambda - 2m + 2}{(2m)!}x^{2m} + \ldots \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ونسمى هذا الحل بـ y_1 او $\mathrm{y} = y_1$

أما الحل الثاني لـ y فيكون بالشكل

$$y = a_o\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 + \cdots + (-2)^m\frac{(\lambda-1)(\lambda-3).(\aleph-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right] \qquad (4)$$

ونسمى هذا الحل بـ y_2 أو $y = y_2$

وعليه سيكون الحل العام لمعادلة هيرمت التفاضلية هو مجموع الحلين، بمعنى أن

$$y = A\,y_1 + By_2$$

حيث أن A و B ثابتان اختياريان.

(فهما الحلان المعطيان بالعلاقتين (3)و(4) على الترتيب)

متعددات هيرمت [2] Hermit polynomials

عند التعويض بـ $\lambda = n$ في الحل العام السابق ومناقشة ذلك عندما **λ** تكون عدد صحيح زوجي أو فردي فسنحصل على ما يسمى بمتعددات حدود هيرمت ذات الدرجة n والتي يرمز لها بالرمز $H_n(x)$ وشكلها العام هو

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n\,(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}(2x)^{n-2m} \qquad (5)$$

ويمكن اختصار هذه الصيغة بالشكل

$$H_n(x) = \sum_{r=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \qquad (6)$$

حيث أن

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوجي} \quad n \\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{فردي} \quad n \end{cases}$$

الدالة المولدة [2] Generating function

أن الدالة المولدة لمتعددات حدود هيرمت $H_n(x)$ تعطى بالعلاقة التالية

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \qquad (7)$$

و هذه العلاقة أو النتيجة تكون مفيدة جدا في الحصول على الكثير من الخصائص المتعلقة بمتعددات حدود هيرمت $H_n(x)$. ولأهميتها هذه النتيجة في هذا البحث فقد رأينا عرض ذلك بالشكل

$$e^{2tx-t^2} = e^{2tx}.e^{-t^2} = \sum_{r=o}^{\infty}\frac{(2tx)^r}{r!}\sum_{s=o}^{\infty}\frac{(-t^2)^S}{s!}$$

$$= \sum_{r,s=o}^{\infty}(-1)^s\frac{(2x)^r}{r!\,s!}t^{r+2S}$$

وبوضع $r + 2S = n$ فإن $r = n - 2S$، ومن ذلك نجد أن

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n,s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s (2x)^{n-2s}}{(n-2s)!\, s!}$$

و هنا يظهر معامل t^n مع تثبيت قيمة s بالشكل

$$t^n = (-1)^s = \frac{(-1)^s (2x)^{n-2s}}{(n-2s)!\, s!}$$

ومن أجل قيم مثبتة للمتحول s نجد أمثال t^n باختيار k = n + 2S أي k= n-2S

حيث n – 2S≥ 0 أي $0 \le S \le \left[\frac{n}{2}\right]$ و المعاملات أمام الحد t^n هي

$$\sum_{s=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s}{s!\,(n-2S)!} (2x)^{n-2S}$$

و هذا المجموع بدوره يساوي $\frac{H_n(x)}{n!}$ لهذا فان

$$H_n(x) = \sum_{s=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s n!}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2S}$$

إذن

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}$$

بعض الأشكال أو الصيغ لمتعددات حدود هيرمت [1]

نظرا لأهمية الدالة المولدة لمتعددات حدود هيرمت في هذه الورقة البحثية فقد رأينا أن نبرز بعض العلاقات أو الصيغ الأخرى لمتعددات حدود هيرمت والمتحصل عليها من خلال الدالة المولدة

$$(I) \quad H_n(x) = 2^n \left\{ \exp\left(-\frac{d^2}{4dx^2}\right) x^n \right\}$$

الإثبات

بما أن $\quad (1) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dx} e^{2tx} = te^{2tx}$

الآن $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx} e^{2tx}\right) = 2t^2 e^{2tx}$

إذن

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx} e^{2tx}\right) = t^2 e^{2tx}$$

أو

$$(\frac{1}{2}\frac{d}{dx})^2 e^{2tx} = t^2 e^{2tx}$$

وعليه يمكن استنتاج أن

$$(\frac{1}{2}\frac{d}{dx})^n e^{2tx} = t^n e^{2tx} \qquad (2)$$

ولهذا يمكن القول أن

$$\left\{exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\} \mathrm{e}^{2tx}$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{x^2})\right] e^{2tx}$$
$$= \sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}(\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}x^2})^{2\mathrm{n}} e^{2tx}$$

ومن خلال العلاقة (2) ينتج أن

$$\sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} t^{2\mathrm{n}} e^{2tx} = e^{2tx}\sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} t^{2n}$$

$$= e^{2tx}\sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}!}(-t^2)^{\mathrm{n}} = e^{2tx}e^{-\mathrm{t}^2} = e^{2tx-\mathrm{t}^2}$$

أي أن

$$\left\{exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\}\mathrm{e}^{2tx} = e^{2tx-t^2}$$

ومن خلال تعريف الدالة المولدة المعطي في (3.2) فإن

$$\left\{exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}!}(2x)^n$$
$$= \sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\frac{H_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{t}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

وبمساواة معامل t^{n} في الطرفين نحصل على

$$\left\{exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\}\frac{1}{\mathrm{n}!}2^{\mathrm{n}}x^{\mathrm{n}} = \frac{H_n(x)}{\mathrm{n}!}$$

ومنها ينتج أن

$$H_n(x) = 2^n \left\{ exp\left(-\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2} \right) \right\} x^{\mathrm{n}}$$

$$e^{2xt-\mathrm{t}^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \qquad (II)\ \mathrm{H_n}(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{\mathrm{d}x^{\mathrm{n}}} \left(e^{-x^2}\right)$$

وبالنشر وفق ماكلوران حيث

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2} \right]_{t=0}$$

$$= e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0}$$

واعتمادا على المساواة

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{f}(x-t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{f}(x-t)$$

ومنها

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathrm{f}(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2}$$

أي

$$\mathrm{H_n}(x) = (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{\mathrm{d}x^{\mathrm{n}}} e^{-x^2}$$

الصيغ التكرارية الأساسية لمتعددات حدود هيرمت [1]

في هذه الفقرة سيتم استعراض الصيغتين التكراريتين الأساسيتين لمتعددات حدود هيرمت واللتان سنعتمد عليهما في استنتاج صيغ تكرارية "علاقات " أخرى تتعلق بمتعددات حدود هيرمت ، ولأهميتهما في هذا البحث سنقوم بإثبات هاتين الصيغتين مستخدمين الدالة المولدة لمتعددات حدود هيرمت

$$(I) \quad H'_{\mathrm{n}}(x) = 2nH_{\mathrm{n}-1}(x) \qquad ,n \geq 1$$

باستخدام الدالة المولدة لمتعددات لحدود هيرمت

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H_{n}}(x)}{\mathrm{n}!} t^{\mathrm{n}} e^{-t^{2+2tx}}$$

وباشتقاق كلا الطرفين بالنسبة إلى $\boldsymbol{x}$ يكون لدينا

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = 2t\, e^{-t^2+2tx}$$

$$= 2t \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n$$

وبمساواة معامل t^n بين كلا الطرفين يكون لدينا

$$\frac{H_n(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

ومنها ينتج إن

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

$$(II) \qquad 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$$

الإثبات:

باستخدام الدالة المولدة

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{-t^{2+2tx}}$$

وبأجراء عملية الاشتقاق بالنسبة لـ t نجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{H_n(x)}{n!} t^{n-1} = (-2t+2x)e^{-t^2+2tx}$$

$$\sum_{n=o} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = -2te^{-t^2+2tx} + 2xe^{-t^2+2tx}$$

وذلك لان حدود الطرف الأيسر تكون مساوية للصفر عندما n=0 وعليه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = -2t\sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2x\sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

أو

$$2x\sum_{n=o}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^2 = 2\sum_{n=o}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1}$$

أو

$$2x\sum_{\mathrm{n}=o}^{\infty}\frac{\mathrm{H_n}(x)}{\mathrm{n}!}t^n = 2\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{H_{n-1}}(x)}{(\mathrm{n}-1)!}t^{\mathrm{n}} + \sum_{\mathrm{n}=o}^{\infty}\frac{\mathrm{H_{n+1}}(x)}{\mathrm{n}!}t^{\mathrm{n}}$$

وبمساواة معاملات t^{n} في الطرفين نحصل على

$$\frac{2xH_n(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(\mathrm{n}-1)!} + \frac{H_{n+1}(x)}{\mathrm{n}!}$$

ومنها ينتج أن:

$$2xH_{\mathrm{n}}(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{\mathrm{n+1}}(x)$$

ويمكن ملاحظة أنه بمساواة معاملات t^{o} للطرفين نحصل على

$$2xH_{\mathrm{o}}(x) = \mathrm{H}_1(x)$$

استنتاج صيغ تكرارية (علاقات) أخرى تتعلق بمتعددات حدود هيرمت [3]

في هذه الفقرة سوف نقوم باستنتاج صيغ تكرارية " علاقات " مهمة أخرى تتعلق بمتعددات حدود هيرمت بالاعتماد وبشكل رئيسي على الصيغتين التكراريتين اللتان عرضناهما آنفا ، وهذه الصيغ تفيدنا في حل الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية والهندسية التي تصادفنا ضمن هذه المجالات:-

$$(\boldsymbol{a}) \qquad H_{\mathrm{n}}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

الإثبات:

بكتابة الصيغتين التكراريتين الأساسيتين (I) ، (II)

$$H'_{\mathrm{n}}(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad ,n \geq 1 \qquad (1)$$

$$2xH_{\mathrm{n}}(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{\mathrm{n+1}}(x) \qquad (2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على

$$H'_{\mathrm{n}}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

$$(\boldsymbol{b}) \qquad H_{\mathrm{n}}(x) - 2x\mathrm{H}_2(x) + 2\mathrm{nH_n}(x) = o$$

الإثبات:

من معادلة هيرمت التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2nx = 0 \qquad (1)$$

وحيث ان $H_n(x)$ تعتبر حلا لـ (1) لذلك ينتج أن

$$H_n(x) - 2xH_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

$$H_n(x) = H_{n-1}(x)H_{n-2}(x) \qquad (\mathbf{c})$$

الإثبات:

باستخدام الصيغة التكرارية الأساسية (I) في (5.2)

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (A)$$

وبالاشتقاق بالنسبة للمتغير $\boldsymbol{x}$ نحصل على

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (B)$$

وباستبدال n بـ $(n-1)$ في (A) نحصل على

$$H_n(x) = 2(n-1)H_{n-2}(x) \ldots\ldots\ldots.(c)$$

ومن خلال العلاقتين (B) و (c) ينتج إن

$$H_n(x) = H_n(n-1)H_{n-2}(x)$$

$$(\boldsymbol{d}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = \sqrt{\pi}2^{n-1}n!\,\delta_{n-1,m} + \sqrt{\pi}2^n(n+1)!\,\delta_{n+1,m}$$

حيث إن δ تمثل دالة كرونيكر kornecker delta

باستخدام الصيغة التكرارية الأساسية (II) في (5.2).

$$x\,H_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

إذن

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)\right]H_m(x)dx$$

$$= n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}(x)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n+1}(x)H_m(x)dx$$

وبالاستفادة من خاصية التعامد لحدوديات هيرمت حيث أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0\,, & n \neq m \\ 2^n\, n!\,\sqrt{\pi}, & n = m \end{cases}$$

يمكن إعادة كتابة النتيجة أعلاه باستخدام دالة كرونيكر أي

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, d\pi = 2^n n!\sqrt{\pi}\, \delta_{nm}$$

حيث

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 1 & , n = m \end{cases}$$

اذن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = n2^{n-1}\sqrt{\pi 2^n (n-1)!\,\delta_{(n-1)m}} + \sqrt{\pi 2^m (n-1)!\,\delta_{(n+1)m}}$$

ومنها ينتج ان

$$i)\ H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

$$ii\ ) H_{2n+1}(0) = 0$$

الإثبات:

لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (H_n(x) = e^{-t^2+2x}$$

بوضع n=o نحصل علي

$$\sum_{n=0}^{\propto} \frac{t^n}{n!} H_n(o) = e^{-t^2} = \left\{1 - t^2 + \frac{(t^2)^2 +}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{(t^2)^n}{n!} + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\propto} \frac{(-t^2)^n}{n!}$$

بوضع $k = 2n$ في الطرف الايسر ثم استبدال k بـ n نحصل علي

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} H_{2n}(0) t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

وبمساواة معاملات t^{2n} في الطرفين نحصل على

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

مرة أخرى نساوي معاملات t^{2n+1} في الطرفين نحصل على

$$\frac{1}{(2n+1)!} H_{2n+1}(0) = 0$$

وذلك بسبب ان الطرف الايسر في العلاقة لا يتضمن قوة أو أسس فردية لـ t
إذن

$$H_{2n+1}(0) = 0$$

$$(\boldsymbol{e}) \qquad \frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x) \qquad , m < n$$

الإثبات:
من الدالة المولدة

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} = e^{2tx - t^2}$$

إذن

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = \frac{d^m}{dx^m} e^{2tx - t^2}$$

$$= (2t)^m e^{2tx - t^2}$$

$$= (2t)^m \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = 2^m \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^{n+m}}{n!} H_n(x)$$

$$= 2^m \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{(r-m)!} t^r H_{r-m}(x)$$

ويوضح $r = n + m$ ومنها $n = r - m$

وعليه عندما n=0 فان $r = m$ وعندما $n \to \infty$ فان $r \to \infty$ وبمساواة معاملات t^n بالطرفين نحصل على

$$\frac{1}{n!} \frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = 2^m \frac{1}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

$$(\boldsymbol{f}) \qquad P_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt) dt$$

حيث ان $P_n(x)$ هي متعددات حدود ليجندر والتي احد اشكالها العامة يمكن كتابته بالصورة

$$P_n(x)=\sum_{r=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-2r)!\,(n-r)!}x^{n-2r}$$

علما بان $\left[\frac{n}{2}\right]$ تمثل اكبر عدد صحيح لا يزيد عن $\frac{n}{2}$

الإثبات:

من تعريف متعددات حدود هيرمت المعطى في (6) في (2.2)

$$H_n(x)=\sum_{r=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

$$H_n(xt)=\sum_{r=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(2xt)^{n-2r}$$

وعليه سيكون

$$\frac{2}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^n e^{-t^2}H_n(xt)dt$$

$$=\frac{2}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^n e^{-t^2}\sum_{r=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(2xt)^{n-2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{2^{n-2r+1}}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!}x^{n-2r}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2(n-r)}dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{2^{n-2r+1}}{\sqrt{\pi}\;\;r!(n-2r)}x^{n-2r}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2\left(n-r+\frac{1}{2}\right)-1}$$

وبالاعتماد على مفهوم دالة جاما بالنسبة للتكامل داخل العلاقة أعلاه حيث

$$(n)=2\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,t^{2n-1}dt$$

وعليه يصبح لدينا

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{2^{n-2r}(-1)^r}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!}x^{n-2r}\frac{[2(n-r]!}{2^{2(n-r)}}\sqrt{\pi}\quad=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{2^{n-2r+1}}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!}x^{n-2r}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(n-r+\frac{1}{2}\right)$$

وذلك من خلال احد خصائص دالة جاما حيث ان :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}\;\;n!}\sqrt{\pi}$$

وبهذا ينتج:-

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n \; r!(n-2r)!(n-r)!} x^{n-2r} = P_n(x)$$

$$\boldsymbol{g}) \quad \sum_{r=0}^{n} \frac{H_r(x)H_r(y)}{2^r \; r!}$$
$$= \frac{H_{n+1}(y)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}n!\,(y-x)}$$

وباستخدام الصيغة التكرارية الاساسية الثانية لمتعددات حدود هيرمت المبينة في (3.2).

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \tfrac{1}{2}H_{n+1}(x) \qquad (A_1)$$

$$yH_n(y) = nH_{r-1}(y) + \tfrac{1}{2}H_{r+1}(y) \qquad (A_2)$$

وبضرب :

$H_n(y)$ـب A_1 , $H_n(x)$ـب $(A_{2)}$

ومن ثم اجراء عملية الطرح بينهما نحصل على

$$(y-x)H_n(x)H_n(y) = \tfrac{1}{2}[H_{n+1}(y)]H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)$$

نضع

$$-n[H_{n-1}(x)H_n](y) - H_{n-1}(y)H_n(x) \qquad (A_3)$$

(A_3) في , $n = o, 1, \dots, n-1, n$

على الترتيب لنحصل على

$$(y-x)H_0(x)H_0(y) = \tfrac{1}{2}[H_1(y)H_0(x) - H_1(x)H_0(y)] - o \qquad (B_0)$$

$$(y-x)H_1(x)H_1(y) = \tfrac{1}{2}[H_2(y)H_1(x) - H_2(x)H_1(y)] - -[H_0(x)H_1(y) - H_0(y)H_1(x)] \qquad (B_1)$$

$$(y-x)H_2(x)H_1(y) = \tfrac{1}{2}[H_3(y)H_2 - H_3(\mathcal{X})H_2(y)] - -2[H_1(\mathcal{X})H_2 - H_1(y)H_2(\mathcal{X})] \qquad (B_2)$$

$$(y-x)H_3(x)H_3(y) = \tfrac{1}{2}[H_4(y)H_3(x) - H_4(x)H_3(y)] - -3[H_2(x)H_3(y) - H_2(y)H_3(x)] \qquad (B_3)$$

$$(y-x)H_{n-1}(x)H_{n-1}(y) = \frac{1}{2}[H_n(y)H_{n-1}(x) - H_n(x)H_{n-1}(y)] - (n-1)[H_{n-2}(x)H_{n-1}(y) - H(y)_{n-2}(x)] \qquad (B_{n-1})$$

$$(y-x)H_n(x)H_n(y) = \frac{1}{2}[H_{n+1}(y)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)] - -n[H_{n-1}(x)H_n(y) - H_{n-1}(y)H_n(x)] \qquad B_n$$

والان نضرب

$$(B_0)\ ,\ (B_1)\ ,(B_2)\ ,\ldots,(B_{n-1})\ ,(B_n)$$

وعلي الترتيب بـ

$$\frac{1}{2^0\ o!},\frac{1}{2^1 1!}\ ,\frac{1}{2^2 r!}\ ,\frac{1}{2^3\ ,3!},\ldots,\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}$$

ومن ثم القيام بعملية الجمع نحصل على

$$(y-x)\sum_{r=o}^{n}\frac{H_r(x)H_r(y)}{2^r\ r!} = \frac{H_{n+1}(y)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}\ n!}$$

اذن

$$\sum_{r=o}^{n}\frac{H_r(x)H_r(y)}{2^r\ \ r!} = \frac{H_{n+1}(y)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}\ n!\ \ (y-x)}$$

الخلاصة Conclusion:

كنتيجة مما تقدم وللأهمية الكبيرة لمتعددات حدود هيرمت التي تظهر كحلول لمعادلة هيرمت التفاضلية خاصة تلك المعادلات التفاضلية ذات التطبيقات الفيزيائية والهندسية، وكما هو الحال في الكثير من الدوال الخاصة المعروفة كدوال بيسل وليجندر وغيرها التي تملك صيغ تكرارية يستفاد منها لتبسيط وحل الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية والهندسية بأسلوب رياضي متقدم، فإن متعددات حدود هيرمت تملك صيغتين تكراريتين أساسيتين ومن هنا جاءت فكرة البحث وهي استخدام هاتين الصيغتين في اكتشاف واستنتاج صيغ تكرارية أخرى وعلاقاتها بدوال أخرى كمتعددات حدود ليجندر، تفيد في حل الكثير من المسائل ذات العلاقة.

:References المراجع

1- Arfken. G. 1970. "Mathematical Methods for physicists" 2^{nd} . Academic press, page (609-615).
2- Bell.W.W.1967,Special functions for Scientists and engineers, Nostrand company, page (156-166).
3- Mestiri. F.S & Elmahdy. E.A. 2009. Legendre and Related Polynomials (Theory and Applications). page (36-46).
4- Snddon . I. N. 1966. Special functions of Mathematical physics and chemistry. page (150-160).