Matematik B HFE august 2015
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet forskriften $f(x) = ax + b$ samt punkterne P og Q. Vi bestemmer tallene a og b.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{6-2} = \frac{1}{2}$$

$$b = y_1 - ax_1 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 3 - 1 = 2, \text{ så}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

Er den ønskede forskrift.

Opgave 2

Vi har fået tabellen givet. Vi ved, at dataforbruget er proportionalt med tiden, så
$y = ax$ er vores forskrift. Vi har:
$y = 240$, $a = ?$ og $x = 4$, så tallet a bestemmes.

$$240 = a \cdot 4 \Leftrightarrow a = \frac{240}{4} = 60$$

Sammenhængen er så:
$y = 60 \cdot x$, og dermed kan vi bestemme y, når $x = 8$, dvs.
$y = 60 \cdot 8 = 480$
Vi har $y = 600$ så vi finder x.

$$600 = 60 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{600}{60} = 10$$

Tabellen er:

x	4	8	10
y	240	480	600

Opgave 3

Givet udtrykket

$$(a-b)^2 - \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot b\right)$$
$$= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b - a^2 + 2 \cdot a \cdot b$$
$$= a^2 - a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b$$
$$= b^2$$

Opgave 4

Vi ved, at halveringstiden er $T_{\frac{1}{2}} = 30$ dage,

Vi ved, at $b = 20\ ug/kg$, så 30 dage senere vil mængden af rottegift være halveret til 10 ug/kg., hvoraf yderligere 30 dage vil give en mængde på 5 ug/kg.

Opgave 5

Givet funktionen $f(x)$.

$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ her er $x > 0$ (overvej hvorfor).

Vi bestemmer samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

$F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x = \int 2x + \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = x^2 + \ln(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Så der findes uendelige stamfunktioner, eftersom k antager alle reelle tal.

Opgave 6

Givet to figurer.

Begge har samme funktion $f(x)$, men forskellige $f'(x)$. Vi undersøger, hvilken der er rigtig.

Betingelse 1)

Funktionen $f(x)$ har et minimum. Begge $f'(x)$ opfylder skæring med x-aksen.

Betingelse 2)

Når funktionen $f(x)$ er aftagende før minimum, så skal den afledede være under x-aksen. Af figurerne opfylder figur 2 det ikke.

Af disse kan man slutte, at figur 1 er rigtig og figur 2 er forkert.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

$restart :; with(Gym) :$

Tabellens oplysninger defineres.

$E1 := [0, 10, 20, 30, 40] :$

$E2 := [800, 1100, 1700, 2800, 4000] :$

Spgm. a

Vi benytter os af eksponentiel regression.

$f(x) := ExpReg(E1, E2, x) :$

$f(x)$

$$765.753256502083\ 1.04240636260126^x \tag{7.1.1}$$

Dermed blev tallene a og b bestemt. Disse kan aflæses ovenfor.

Spgm. b

Tallet a er fremskrivningsfaktoren, dvs. $a = 1.04240636260126$. Så for hvert år der går, stiger antallet af nedlagte krondyr med 4.24 % om året.

År 2015 svarer til $x = 50$, så
$f(50)$

$$6108.59777377483 \tag{7.2.1}$$

I år 2015 vil der være nedlagt 6109 krondyr ifølge modellen.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :;**local** D :

Spgm. a

Vi definerer vores andre længder, sådan så vi nemt kan bruge cosinusrelationerne til at bestemme $|BD|$.

$AB := 5$:; $AD := 6$:; $A := 42$:

Vi bruger cosinusrelationerne:

$BD := \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot Cos(A)}$

$$4.051087568 \tag{8.1.1}$$

Så længden af diagonalen er $|BD| = 4.051087568$

Spgm. b

Arealet af trekanten BCD er 8.7

$\mathrm{D} := 56$: $T_{BCD} := 8.7$:

Vi bruger ½-appelsinformlen.

$T_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot Sin(\mathrm{D})$

$$8.7 = 1.679251902\ CD \tag{8.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for CD}}$

$$[[CD = 5.180878455]] \tag{8.2.2}$$

Længden af $|CD|$ er bestemt til 5.180878455

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi definerer modellen.

$A(L) := 1.6 \cdot L^{0.6}$:

Vi indsætter $L = 20000$ i modellen.

$A(20000)$

$$609.1692603 \tag{9.1.1}$$

Stalden skal ligge 609 meter eller længere, fra huset.

Spgm. b

Vi løser ligningen $A(L) = 400$.

$1.6 \cdot L^{0.6} = 400 \Leftrightarrow \frac{1.6 \cdot L^{0.6}}{1.6} = \frac{400}{1.6} \Leftrightarrow L^{0.6} = \frac{400}{1.6} \Leftrightarrow L = \sqrt[0.6]{\frac{400}{1.6}} = 9921.256593$

Lugtens styrke skal være $L = 9921.256593$ *LE*/*s*.,

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Vi definerer funktionen

$f(x) := \frac{1}{4}x^4 - x + 1$:

Spgm. a

Vi løser ligningen $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$

$$x^3 - 1 = 0 \qquad \textbf{(10.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x=1], \left[x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right], \left[x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right]\right] \qquad \textbf{(10.1.2)}$$

På matematik B arbejder vi ikke med komplekse tal, så løsningen er $x = 1$. Vi bruger den dobbelte afledede til at bestemme grafens forløb.

$f''(1)$

$$3 \qquad \textbf{(10.1.3)}$$

Da outputtet er positivt, er $x = 1$ et minimum og dermed er funktionen $f(x)$:

Aftagende i intervallet $]-\infty; 1]$ og voksende i intervallet $[1; \infty[$.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi opstiller modellen:

$f(x) := -32000 \cdot x + 385000$:

Her er $a = -32000$ og $b = 385000$

Her betegner $f(x)$ er forsikringsværdien for bilen, målt i kr, hvor x er alderen, målt i år.

Spgm. b

Vi løser ligningen $f(x) = 0$, dvs.

$$-32000 \cdot x + 385000 = 0 \Leftrightarrow -32000 \cdot x = -385000 \Leftrightarrow 32000 \cdot x = 385000 \Leftrightarrow x = \frac{385000}{32000} = 12.031$$

Så bilen skal være 12 år gammel, hvis forsikringsværdien er 0 *kr*.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi har et rektangulær område.

Vi har, at trådhegnet er 10 meter

Vi har, at lågen er 1 meter bred.

Vi har omkredsen:

$\mathrm{O} = y - 1 + x$, dvs.

$10 = y - 1 + x \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 11 - x$

Arealet af et rektangel er
$A = x \cdot y$, vi har $y = 11 - x$, så
$A(x) := x \cdot (11 - x)$

$$x \rightarrow x\,(11 - x) \tag{12.1.1}$$

Dermed har vi fået arealet udtrykt ved x.

Spgm. b

Vi bestemmer x, for hvilket arealet bliver størst muligt.

$A'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{11}{2}\right]\right]$

Vi bruger den dobbelte afledede:

$A''\left(\frac{11}{2}\right)$

$$-2 \tag{12.2.1}$$

Da outputtet er negativt, så er x et maksimum, og dermed skal x være 5.5 m lang for, at arealet bliver størst. Så arealet er:

$A(5.5)$

$$30.25 \tag{12.2.2}$$

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :
Vi definerer funktionen
$f(x) := \ln(x) - 0.25\,x^2 + 4$:
Her er $x > 0$.

Spgm. a

Vi benytter os af intervallet. (vi havde været på den, hvis det var $1 < x < 3$).

$A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A = 7.129170199 \tag{13.1.1}$$

Så arealet af det røde område er $A = 7.129170199$

Spgm. b

Vi løser ligningen $f'(x) = -\frac{1}{2}$ sådan så vi kan få førstekoordinaten.

$f'(x) = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x} - 0.50\,x = -\frac{1}{2} \tag{13.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -1.], [x = 2.]] \tag{13.2.2}$$

Da vi arbejder med de positive tal, for $x > 0$, så førstekoordinaten er $x = 2$

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi har en retvinklet trekant.

$A := 30$:; $C := 90$:; $c := 3.20$:

$b := c \cdot Cos(A)$

$$2.771281293 \tag{14.1.1}$$

Så længden vi skal bruge er $b = 2.77\ m$ og dermed divideres resultatet med 10.

x er hermed:

$x = \dfrac{b}{10}$

$$x = 0.2771281293 \tag{14.1.2}$$

Så trindybden x er $0.277\ m$.

Matematik B HFE december 2015
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet udtrykket:

$a \cdot (2 \cdot b - a) + a^2 - a \cdot b$

$= 2 \cdot a \cdot b - a^2 + a^2 - a \cdot b$

$= a \cdot b$

Vi løser ligningen

$3x - 2 = 5x + 4 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{-2} = -3$

Opgave 2

Givet to retvinklede trekanter

Vi bestemmer $|AB|$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, dvs.

$AB^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Så længden $|AB| = 10$. Vi bruger nu forstørrelsesfaktoren k, for at kunne bestemme $|B_1C_1|$.

$k = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Så kan vi bestemme $|B_1C_1|$.

$B_1C_1 = BC \cdot k$, dvs.

$B_1C_1 = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Så længden $|B_1C_1| = 9$.

Opgave 3

Givet andengradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vi bestemmer fortegnet for a, b og c.

Fortegn	Begrundelse
$a > 0$	Man aflæser grafen for $f(x)$ og ser, at parablens ben vender opad, dermed er a positiv og fortegnet kan altså ikke være negativt, derfor er $a > 0$.
$b > 0$	Ved at se på grafens skæring med y-aksen kan vi se, at hældningskoefficienten i det punkt er positivt, og dermed er $b > 0$.
$c > 0$	Grafen for $f(x)$ skærer y-aksen over x-aksen, dvs. den positive side af y-aksen og dermed er $c > 0$.
$d < 0$	Egentlig er dette ikke en del af opgaven, men diskriminanten er negativ, eftersom $f(x)$ ikke har skæring med x-aksen, og dermed har vi ingen løsninger i de reelle tal, så $x \notin \mathbb{R}$ for $f(x) = 0$.

Opgave 4

Givet forskriften for rotters formering.

$f(x) = 50 \cdot 1.29^x$, her er $f(x)$ antal rotter og x er antal måneder efter forsøgets start.

Tallet 50 fortæller, at ved forsøgets starte var antallet af rotter 50. Antallet af rotter forventes at vokse hver måned med 29 %* efter forsøgets start.

*29 % er udregnet vha. formlen $a = 1 + r$, hvor $a = 1.29$.

Opgave 5

Givet funktionen $f(x)$.

$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^3$ her er $x > 0$ (overvej hvorfor).

Vi bestemmer samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

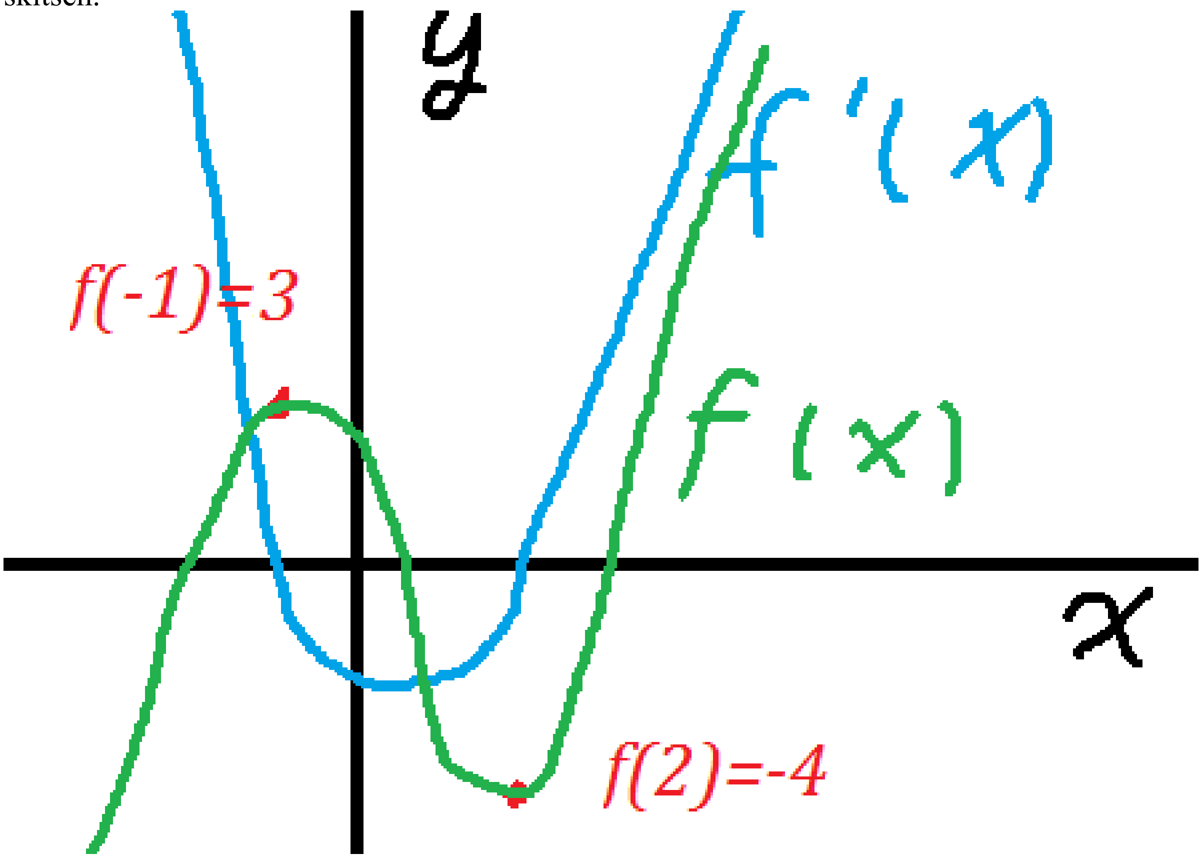
$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + 4x^3\,\mathrm{d}x = \ln(x) + x^4 + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Så der findes uendelige stamfunktioner, eftersom k antager alle reelle tal.

Opgave 6

Vi har to punkter som $f(x)$ skærer i.
$f(-1) = 3$ og $f(2) = -4$

Vi oversætter monotonitallinjen:
$f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; -1]$ og $[2; \infty[$ samt aftagende i intervallet $[-1; 2]$, så nu tegnes skitsen.



De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi opstiller modellen:
$f(x) := 0.52 \cdot x + 150$:
Her er $a = 0.52$ og $b = 150$, enheden er i kg.
Her betegner $f(x)$ mængden af brændstofforbruget, målt i kg, hvor x er antal kilometer, målt i km.

Spgm. b

Vi bestemmer det forventede brændstofforbrug, når der flyves 900 *km*.

$f(900)$

$$618.00 \tag{21.2.1}$$

Så der skal bruges 618 *kg* brændstof til en flyvetur på 900 *km*.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi benytter os af renteformlen

$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$

Vi har

$K_0 = 15000$ *kr*, vi har $n = 10$ og $K_{10} = 18465$, så vi bestemmer renten r.

$$18465 = 15000 \cdot (1+r)^{10} \Leftrightarrow \frac{18465}{15000} = (1+r)^{10} \Leftrightarrow \sqrt[10]{\frac{18465}{15000}} = 1 + r \Leftrightarrow r = \sqrt[10]{\frac{18465}{15000}} - 1$$

Vi omregner ovenstående til procent, så:

$$r = \left(\sqrt[10]{\frac{18465}{15000}} - 1\right) \cdot 100 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} r = 2.10$$

Så den årlige procentvise rente er 2.10 %.

I Maple kunne man løse ligningen

fsolve($\{18465 = 15000 \cdot (1+r)^{10}\}$)

$$\{r = -2.021000149\}, \{r = 0.02100014859\} \tag{22.1.1}$$

Vi bruger den positive rente.

$r = 0.02100014859 \cdot 100 = 2.100014859$ %

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Vi definerer funktionen $f(x)$.

$f(x) := -x^2 + 8 \cdot x^{\frac{1}{2}}$:

Her er $x \geq 0$ (Hvorfor må den ikke være negativ? Overvej hvorfor).

Spgm. a

Vi bestemmer ligningen for tangenten i punktet $P(1, f(1))$.

$f(1)$

$$7 \tag{23.1.1}$$

$f'(1)$

$$2 \tag{23.1.2}$$

Vi indsætter i den velkendte tangentligning og får:

$y = 2 \cdot (x - 1) + 7$

$$y = 2\,x + 5 \tag{23.1.3}$$

Som er tangentligningen i punktet P.

Maple kan også sluge hele baduljen
$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

$$y = 2\,x + 5 \tag{23.1.4}$$

Spgm. b

Vi bestemmer arealet af det røde.

$A = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A = \frac{49}{3} \tag{23.2.1}$$

Arealet af det røde er $A = \dfrac{49}{3}$.

Opgave 10

$restart$:; $with(Gym)$: **local** D :
Alle oplysninger defineres.
$AB := 8.5$:; $A := 34$:; $C := 84$:

Spgm. a

Vi bestemmer vinkel B.
$B = 180 - A - C$

$$B = 62 \tag{24.1.1}$$

Så vinkel B er 62^o.
$B := 62$:

Længden $|AC|$ bestemmes via sinusrelationerne.
$\dfrac{Sin(B)}{AC} = \dfrac{Sin(C)}{AB}$

$$\frac{0.8829475927}{AC} = 0.1170025759 \tag{24.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for AC}}$

$$[[AC = 7.546394478]] \tag{24.1.3}$$

Så længden $|AC|$ er 7.546
$AC := 7.546394478$:

Spgm. b

Vi bestemmer arealet af trekanten ABC. Vi bruger ½-appelsinformlen.

$T_{ABC} := \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot Sin(A)$

$$17.93453352 \tag{24.2.1}$$

Så hermed er araelet bestemt.

Spgm. c

Arealet af ABD er en tredjedel af ABC, dvs.

$T_{ABD} := \frac{1}{3} \cdot T_{ABC}$:

T_{ABD}

$$5.978177840 \quad (24.3.1)$$

Så da vi kender arealet af ABD, så kan vi bruge ½-appelsinformlen igen:

$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot Sin(A)$

$$5.978177840 = 2.376569840\ AD \quad (24.3.2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for AD}}$

$$[[AD = 2.515464826]] \quad (24.3.3)$$

Og da vi har $|AD| = 2.515$ kan vi nu bestemme BD via cosinusrelationerne.

$AD := 2.515464826$:

$BD := \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot Cos(A)}$

$$6.567001659 \quad (24.3.4)$$

Som er den ønskede længde af $|BD| = 6.567$

Opgave 11

$restart$:; $with(Gym)$:

Tabellens oplysninger defineres.

$P1 := [1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.1]$:

$P2 := [264, 313, 366, 426, 490, 560, 650]$:

Spgm. a

Vi bestemmer tallene a og b via potensregression.

$f(x) := PowReg(P1, P2, x)$:

$f(x)$

$$89.7946999180134\ x^{2.65200926763393} \quad (25.1.1)$$

Tallene a og b er:

$a := 2.65200926763393$:

$b := 89.7946999180134$:

Spgm. b

Vi bestemmer hestens vægt, når gjordmålet øges med 4%, så

$r_y = \left(\left(1 + \frac{4}{100}\right)^a - 1\right) \cdot 100$

$$r_y = 10.9615651 \quad (25.2.1)$$

Så hestens vægt er vokset med 11 % i løbet af sommeren.

Spgm. c

Hesten Tyfon vejer 785 kg og har et gjordmål på 2.25m, så

$f(2.25)$

$$771.333165439844 \quad (25.3.1)$$

$f(x) = 785$

$$89.7946999180134\, x^{2.65200926763393} = 785 \quad \textbf{(25.3.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 2.264950401], [x = -1.622281671 + 1.580570308\, I], [x = -1.622281671 - 1.580570308\, I]] \quad \textbf{(25.3.3)}$$

Modellen passer ikke helt så godt, eftersom hesten vejer 785kg, hvor modellen påstår at hesten vejer 771.3kg, hvilket er en procentvis difference på 1.77%

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :**local** O :

Modellen defineres.

$O(x) := -0.1\, x^2 + 100\, x - 9000$: hvor $x \in [250; 750]$

Spgm. a

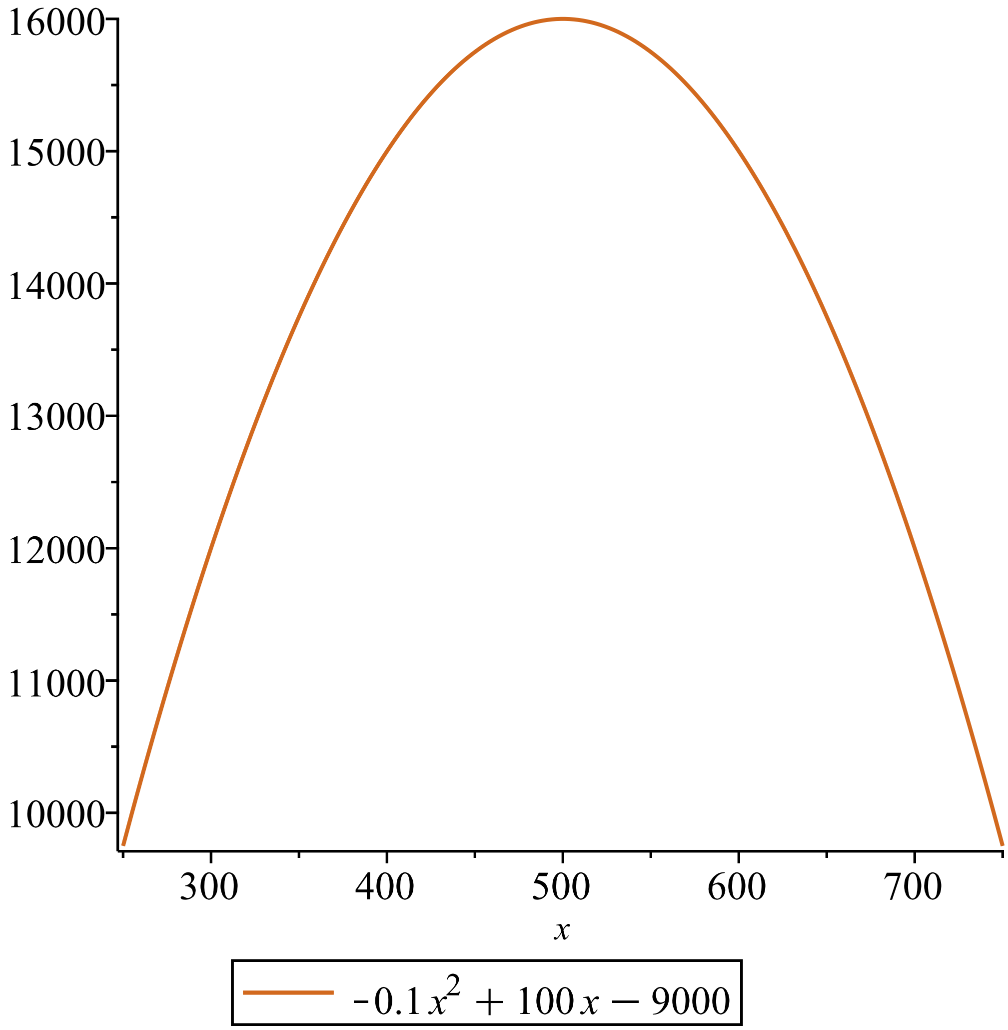
Vi bestemmer den månedlige overskud, hvis prisen er 600 *kr*, dvs.

$O(600)$

$$15000.0 \quad \textbf{(26.1.1)}$$

Så den månedlige overskud vil være 15000*kr*. Vi tegner grafen for $O(x)$.

plot(O(*x*), *x* = 250 ..750, *legend* = [O(*x*)], *color* = ["Chocolate"])



Spgm. b

Vi differentierer modellen og løser ligningen $O'(x) = 0$, dvs.
$O'(x) = 0$

$$-0.2\,x + 100 = 0 \tag{26.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 500.]] \tag{26.2.2}$$

vi bruger den dobbelte afledede for at se, om $x = 500$ passer.
$O''(500)$

$$-0.2 \tag{26.2.3}$$

Da outputtet er negativt, har vi altså et maksimum og dermed giver $x = 500$ den største månedlig overskud.

Spgm. c

Vi indsætter $x = 600$ i $O'(x)$, dvs.
$O'(600)$

$$-20.0 \tag{26.3.1}$$

Så det betyder, at hvis prisen er 600 *kr* pr. vase, så taber keramikeren 20kr i månedlig overskud pr solgt vase.