

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

A2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

A3. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

A4. α. Σ

β. Λ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέτω όπου x το $x-1$

$$f(x) = xe^{1-x}$$

B2. $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		○	-
f	$-\infty$		0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1-x}) = -\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^u \stackrel{u \rightarrow -\infty}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{\text{DHL}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{x-1}} \right)} = 0$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ διότι $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 1)$ και είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ διότι $f'(x) < 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και είναι συνεχής $[1, +\infty)$

Έχει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$

$$B3. f''(x) = -e^{1-x}(1-x)e^{1-x} = e^{1-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{1-x}$$

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	\curvearrowright		\curvearrowleft

$\frac{2}{e}$

Η f είναι κοίλη στο $x \in (-\infty, 2]$ και κυρτή για $x \in [2, +\infty)$

Έχει σημείο καμπής για $x = 2$ το σημείο $\left(2, \frac{2}{e}\right)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \rightarrow +\infty$ την ευθεία $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \text{ άρα δεν έχει πλάγια για } x \rightarrow -\infty$$

B4. Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} θα πάρει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του 1.

Άρα σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$ τότε $f(A_1) = (-\infty, 1]$

και $A_2 = [1, +\infty)$ τότε $f(A_2) = (0, 1]$

- Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ μια ρίζα
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$ δύο ρίζες
- Αν $\lambda = 1$ τότε μια ρίζα η $x = 1$
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ δεν έχει καμία ρίζα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική και στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma \nu x) = 1 \text{ και } f(0) = 1 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\text{Για } x < 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \alpha x^2 - 3x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

$$\text{Για } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sigma \nu x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$

Γ2. i. η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta \mu x$

$$f(0) = 1 \text{ και } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Άρα δεν ισχύει η τρίτη συνθήκη του Θ. Rolle

$$\text{ii. } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa \pi \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$0 < \kappa \pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2} \text{ άρα } \kappa = 1 \text{ και } x = \pi$$

$$\text{Γ3. } f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$$

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0 \text{ διότι } \alpha < -3 \Leftrightarrow \alpha + 3 < 0$$

Άρα $f'(x) \neq 0$ για $x < 0$ επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$

Γ4.

Για $x < 0$

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0 \text{ διότι } \Delta < 0 \text{ και } 3\alpha < 0$$

$$\text{Για } x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \quad f'(x) = -\eta\mu x$$

0	π	$\frac{3\pi}{2}$
-	+	0
1	-1	

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'(x)	-	-	○	+
f(x)	$+\infty$	1	-1	0

Ολικό ελάχιστο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha x^3) = +\infty$$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) \geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Έστω } K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$

- η $K(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών
- $K(1) = -1, K(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3): K(x_0) = 0$ και $K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για $x \in (1, e)$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα x_0 είναι μοναδική

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

ΓΛΥΦΑΔΑ: Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

email : support@romvos.edu.gr

$$\Delta 2. f(x) = \ln x_0(x+1) - \ln x - 1$$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

0

Διότι

$$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \ln x_0 \cdot x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Δ3. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Για $x \leq 0$ είναι $g(x) \leq 0 < h(x)$ άρα η εξίσωση $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη

Για $x > 0$

Έχουμε

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow xe^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow xe^{-x} e^{x+1} = x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow xe = x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe) = \ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e = (x+1) \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Διότι από το Δ2 ερώτημα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = x_0$ το $f(x_0) = 0$

Για να έχουν οι C_g και C_h κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο αρκεί να δείξουμε ότι

$$g'(x_0) = h'(x_0)$$

$$h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = h(x_0)(\ln x_0 - 1) = h(x_0) \cdot \frac{1 - x_0}{x_0} = g(x_0) \cdot \frac{1 - x_0}{x_0} =$$

$$= e^{-x_0} (1 - x_0) = g'(x_0)$$

Συνεπώς έχουμε ότι $g(x_0) = h(x_0)$ και $g'(x_0) = h'(x_0)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των

C_g και C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη

Δ4. Έστω $A(x, f(x))$ και $B(x, f(x))$ τότε

$$(AB) = \sqrt{(f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x) \text{ διότι } f(x) > \varphi(x)$$

Έστω $d(x) = f(x) - \varphi(x)$

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

ΓΛΥΦΑΔΑ: Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

email : support@romvos.edu.gr

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$
Επειδή x_0 εσωτερικό στο $(0, +\infty)$ και η d έχει ελάχιστο στο x_0 θα έχουμε $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow 0 = \varphi'(x_0)$ άρα x_0 κρίσιμο σημείο της φ
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε επειδή είναι συνεχής στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ

Σχολιασμός θεμάτων

Τα θέματα κάλυπταν όλη την ύλη, ήταν διαβαθμισμένης δυσκολίας, με πιο απαιτητικά ερωτήματα το Δ3 ,Δ4.

Συγγραφική επιμέλεια

Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου