Hamilton-kör

Be lehet-e járni lóugrásban egy $n \times n$-es tábla minden mezőjét pontosan egyszer úgy, hogy visszaérkezzünk a kiindulási mezőre: ha $n = 9$, $\quad n = 8$, $\quad n = 4$?

Megoldás: $n = 9$

A következő klasszikus trükköt alkalmazzuk! Színezzük a mezőket fekete-fehérre, mint a sakktáblát!

Mi legyen a G gráf, ami a feladathoz kapcsolható?

A G gráf csúcsai feleljenek meg a 9×9-es tábla 81 mezőjének. Két csúcs között legyen él, ha lóugrásban az egyikről a másikra lehet lépni. Kérdés: van-e Hamilton-kör?

Döntő észrevétel: minden él egyik végpontja fekete, másik fehér!

Mármost ha a sarokban fekete mező van, akkor összesen 46 fekete és 45 fehér csúcsa van a G gráfnak.

Másrészt, amikor felfűzzük a csúcsokat egy körre, akkor váltakozva lesz fekete és fehér csúcs.

Ezért egy Hamilton-körben ugyanannyi fehér és fekete csúcs kell legyen.

A mi esetünkben több a fekete csúcs, ezért nincs Hamilton-kör!

Megjegyzés: Előadáson a teljes páros gráfok Hamilton-körével kapcsolatban ugyanez az okfejtés alkalmazható!

⋆ ⋆ ⋆

Megoldás: $n = 8$

Ez a klasszikus feladat, amelyet már Euler is tanulmányozott. Egészen pontosan ő azt akarta kiszámolni, hogy hány megoldása van a feladatnak.

Próbáljanak meg egyet önállóan megtalálni!

https://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour

⋆ ⋆ ⋆

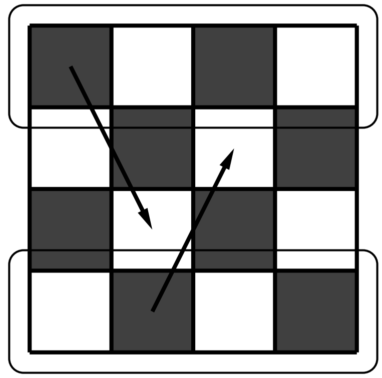
Megoldás: $n = 4$

Próbálkozás után az a meggyőződésünk alakul ki, hogy a bejárás lehetetlen! Hogyan tudnánk most ezt bizonyítani?

Többféle gondolatmenet lehetséges. A következő egy tanulságos indoklás:

Nevezzük az első és a negyedik sort a tábla szélének. A második és harmadik sort a tábla közepének.

Döntő észrevétel: a tábla széléről csak a tábla közepére tudunk lépni! Mivel ugyanannyi mező van szélen mint középen, ezért középről mindig szélre kell lépnünk.



Továbbá emlékezzünk rá, hogy pepitára színezve a táblát, lóugrásban a fekete és fehér mezők felváltva kell szerepeljenek!

Képzeljük most el, hogy a bal felső sarokból indulunk, ami fekete!

Lóugrásban lépve tehát középre ugrunk majd a szélére, majd középre és így tovább.

Ezek szerint szélső fekete után középső fehér mező következik majd vissza.

Ez lehetetlen! középen is vannak fekete mezők, amikre így sose léptünk!

Tehát nincs megfelelő bejárás, azaz Hamilton-kör.

Hamilton-kör 2.

Mutassuk meg, hogy ha egy 12 tagú társaságban mindenki a többiek közül legfeljebb ötöt nem ismer, akkor mind a tizenketten leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a két szomszédja!

Megoldás: Mi köze van a feladatnak a gráfelmélethez?

Világos, hogy egy olyan gráfot fogunk tekinteni, melynek csúcsai a társaság 12 tagjának felel meg.

Két csúcsot kössön össze él, ha a nekik megfelelő emberek ismerik egymást. Kaptunk egy G gráfot.

Lehetetlen pontosan felrajzolni egy konkrét gráfot, hiszen sokféle lehet az ismerettség.

A megoldásunkban tehát arra az egy tulajdonságra kell támaszkodnunk, hogy minden embernek legalább 6 ismerőse van.

Azaz G-ben minden csúcs foka legalább 6. Célunk pedig találni egy Hamilton-kört!

⋆ ⋆ ⋆

Több más feladatnál is bevált módszert fogunk alkalmazni.

Valahol elkezdjük az utat és bővítünk eggyel minden lépésben. A végén pedig bezárjuk körré!

Mivel minden csúcs foka legalább 6, ezért találunk mohó módon egy 6 hosszú P utat.

Nevezzük P csúcsait belsőnek, G többi csúcsát pedig külsőnek.

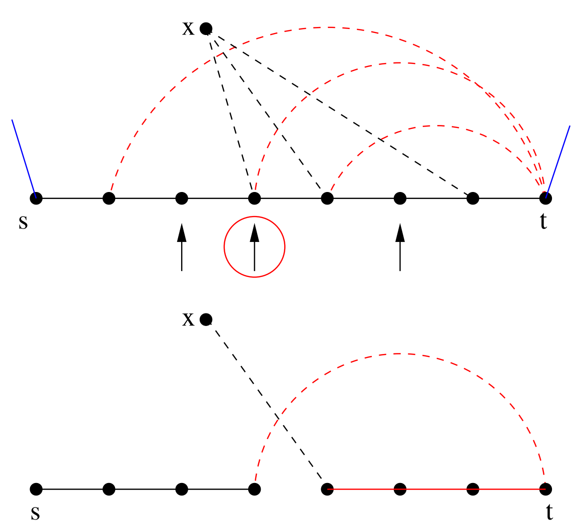
Hogyan tudjuk legegyszerűbben bővíteni P-t? Ha szerencsénk van, találunk egy külső csúcsot, ami össze van kötve P valamelyik végével (ezek az s és t csúcsok). Az alábbi ábrán kék él.

Egyébként vegyünk egy x külső csúcsot. Ez nincs összekötve P végeivel, de néhány belső csúccsal igen. Ezek a fekete szaggatott élek az ábrán. A mi konkrét esetünkben x-nek lehet 3 külső csúcs a szomszédja, de legalább 3 belső csúccsal össze van kötve.

Most ezen belső csúcsok s felé eső szomszédját jelöljük meg. Az alábbi ábrán kis nyíl a jel.

P másik végéből t-ből is indul ki legalább 6 él. Mind belső csúcsba vezet! Ezek közül valamelyik nyíllal jelölt csúcsba fut. Hiszen csak 4 jelöletlen csúcs van.

Ekkor az ábra alsó felében látható módon találtunk egy eggyel hosszabb utat.



Könnyű látni, hogy ez mindaddig folytatódik, míg felfűzzük a 12 csúcsot egy Hamilton-útra.

Akkor kell körré bezárni. Hogyan? Hasonlóan járunk el, mint az előbb.

Vegyük a két végét az útnak. Legyen ez s és t.

s-ből is kiindul legalább 6 él, t-ből is kiindul legalább 6 él. Ha ezek között van az st él, akkor kész vagyunk.

Különben vegyük az s-ből kiinduló élek másik végpontjait. Jelöljük meg nyíllal ezek s-hez közelebbi szomszédait P-n. Kis nyíl az alábbi ábrán.

Vegyük a t-ből induló éleket. Belső csúcs 10 db van. Ebből 4 jelöletlen. Világos hogy a t-ből induló élek közül az egyik nyíllal jelölt csúcsba fut.

Ekkor az ábra alsó részén látható módon kaptuk a Hamilton-kört.