Matematik A, STX

15. august 2018

Løsningsforslag

Løsningerne er vejledende og skal bruge som indlæring, så derfor er de ikke lavet som en elevbesvarelse. En elevbevarelse skal være personligt. Det er disse løsninger ikke. NB: Der tages forbehold for fejl, så ser du nogle, så skriv.

Opgave 1:

a) Forskriften for den rette linje bestemmes på baggrund af P og Q. Ved anvendelse af formlerne for a og b får man

$$a = \frac{y_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-17}{4-2} = -5$$
$$b = y_1 - ax_1 = 17 - (-5)\cdot 2 = 27$$

Dermed er forskriften $f(x) = 27 - 5x$. (eller $f(x) = -5x + 27$).

Opgave 2:

a) Først omregnes tallet a. $a = 0.98$, så $r = a - 1$, dvs. $(0.98 - 1)\cdot 100\% = -2\%$.

Forklaring: Når man sætter kaffen udenfor, er dens starttemperatur $90^o C$, hvorved temperaturen for kaffen aftager hvert minut med 2%.

Opgave 3:

a) Arealet af parallelogrammet beregnes ved determinantformlen numerisk. Man har

$$A = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|4\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 6\right| = |2-12| = |-10| = 10$$

Opgave 4:

a) Ligningen for tangenten går gennem $P(3,1)$, så $x_0 = 3$ og $f(x_0) = 1$. Man beregner $f'(x_0)$ vha. differentialligningen, så

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 3\cdot 1 + 2\cdot 3 = 3 + 6 = 9$$

Tangenten i P for f er givet ved $y = 9(x-3)+1 = 9x - 26$.

Opgave 5:

a) Arealformlerne opstilles.

$$T_{kvadrat} = 3x \cdot 3x = 9x^2$$
$$T_{rektangel} = x \cdot (x+4) = x^2 + 4x$$

Hvis begge figurer skal have samme areal, så gælder

$$T_{kvadrat} = T_{rektangel} \Leftrightarrow 9x^2 = x^2 + 4x \Leftrightarrow 8x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(8x-4) = 0$$

Så er $8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. Så det korrekte svar som også giver det samme areal, skal være $x = 1/2$.

(Dette tjekkes efter. For $T_{kvadrat} = 9 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ og $T_{rektangel} = (\frac{1}{2})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Dermed får de begge figurer samme areal.).

Opgave 6:

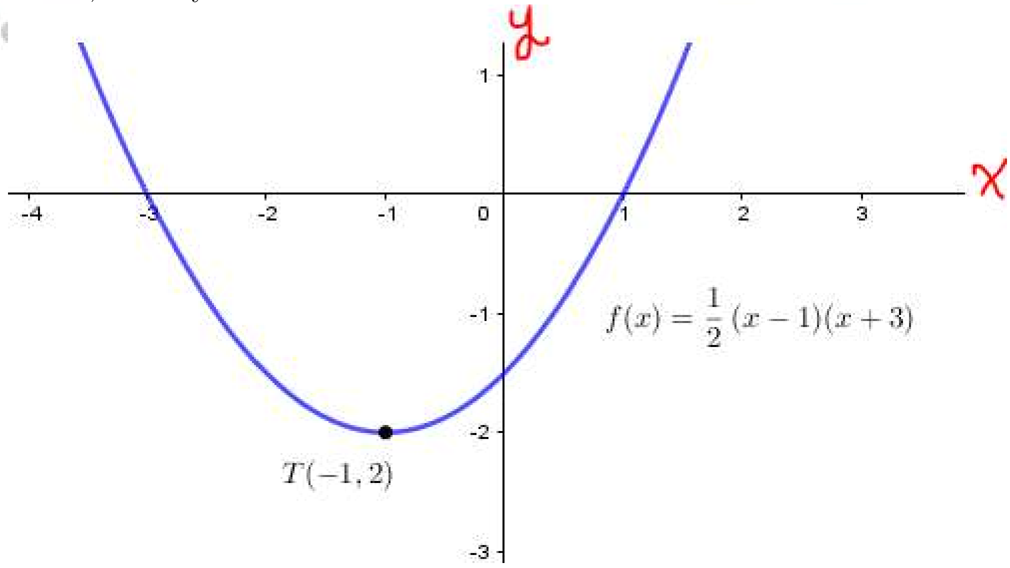
a) Man finder $f'(x)$ og løser $f'(x) = 0$, så $f'(x) = a(3+x) + a(x-1)$. Man løser ligningen

$$a(3+x) + a(x-1) = 0 \Leftrightarrow a(3+x) = -a(x-1) \Leftrightarrow 3 + x = 1 - x \Leftrightarrow$$
$$2 = -2x \Leftrightarrow x = -1$$

Dette indsættes i $f(x)$, og man løser $f(-1) = -2$, så

$$-2 = a \cdot (-1-1) \cdot (-1+3) = -4a \Leftrightarrow a = \frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Så dette er den korrekte værdi af a. En grafisk tegning laves normalt i hånden, her snyder vi lidt med GeoGebra.



Dette kunne også regnes meget hurtigere. Da $f(x)$ er symmetrisk om toppunktet, og man fik angivet $f(x)$ i faktoriseret form, vil det være nemt at se, at $x = -1$. Derfra kunne man løse $f(-1) = -2$ og slippe for omvejen med $f'(x)$, men om dette vil være en "accepteret" metode, ved jeg ikke selv.

Ved løsning af disse nedenstående opgaver, anbefales det klart at man har: WordMat, Maple og GeoGebra.

Opgave 7:

a) Tabellens data aflæses, og husk at 1960 svarer til $x = 0$, 1970 svarer til $x = 10$ osv. Der foretages efterfølgende eksponentiel regression over tabellens tal. Dermed er:

x	0	10	20	30	40	50	56
y	10.28	12.51	14.69	17.07	19.15	22.03	24.13

Eksponentiel regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat:
$R^2 = 0.9944051$

$$f(x) = 10.65897 \cdot 1.014889^x$$

Så er tallene $a = 1.014889$ og $b = 10.65897$.

b) Man beregner T_2, dvs. fordoblingskonstanten.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.014889)} \approx 46.9$$

Så befolkningstallet er fordoblet 47 år efter første observation.

c) Først regnes den afledede. $f'(x) = \ln(1.014889) \cdot 10.65897 \cdot 1.014889^x$. Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0.38$, så

$$\ln(1.014889) \cdot 10.65897 \cdot 1.014889^x = 0.38 \Leftrightarrow 1.014889^x = 2.4122 \Leftrightarrow$$
$$x \ln(1.014889) = \ln(2.4122) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.4122)}{\ln(1.014889)} \approx 59.579$$

Så efter ca. 59.6år, vil man overstige 0.38mio pr. år i Australien. Dette vil formentlig ske inden år 2020.

Opgave 8:

a) Bemærk, at vinkel C er stump. Ved anvendelse af sinusrelationerne vil vi få en spids vinkel.

$$\frac{\sin(40)}{4} = \frac{\sin(C)}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{4}\sin(40) = \sin(C) \Leftrightarrow C = \arcsin\left(\frac{6}{4} sin(40)\right)$$
$$C = 74.61856828^o$$

Så er den stumpe vinkel fundet ved

$$C_{stump} = 180^o - 74.61856828^o = 105.38143172^o$$

b) Arealet af ABC er

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin(180 - 40 - 105.38143172) \approx 6.817325703672$$

Dernæst er arealet af BCD

$$T_{BCD} = 13.5 - 6.817325703672 = 6.682674296328$$

Og længden $|CD|$ udregnes vha. arealformlen.

$$6.682674296328 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot CD \cdot \sin(74.61856828) \Leftrightarrow |CD| \approx 3.465$$

Opgave 9:

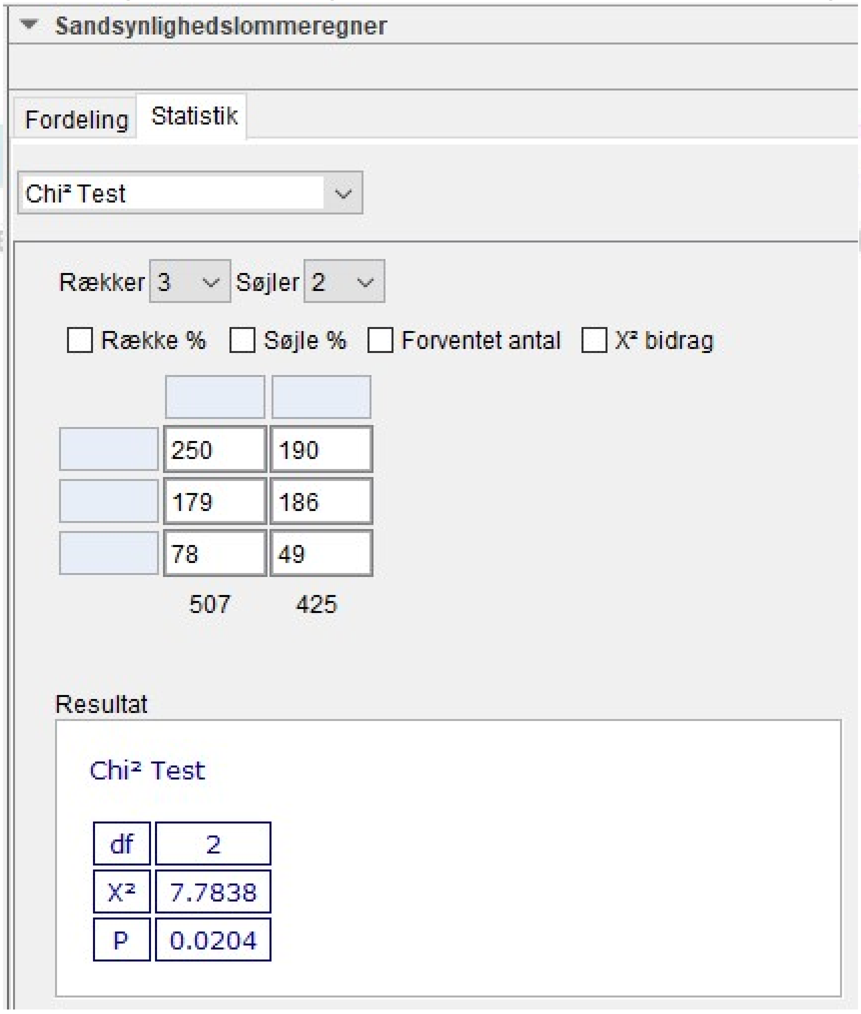
a) Nulhypotese: Holdningerne til statslig adfærdsreguleringen indenfor sundhed er uafhængigt af kønnet. Udregningerne for de forventede værdier sker ved formlen:

$$f_{n\times m}\ \frac{lodret\ sum \cdot vandret\ sum}{sum\ total}$$

Anvendes formlen fås skemaet:

	Kvinder	Mænd	Sum
Ja	$\frac{507\cdot 440}{932} = 239.36$	$\frac{425\cdot 440}{932} = 200.64$	440
Nej	$\frac{507\cdot 365}{932} = 198.56$	$\frac{425\cdot 365}{932} = 166.44$	365
Ved ikke	$\frac{507\cdot 127}{932} = 69.09$	$\frac{425\cdot 127}{932} = 57.91$	127
Sum	507	425	932

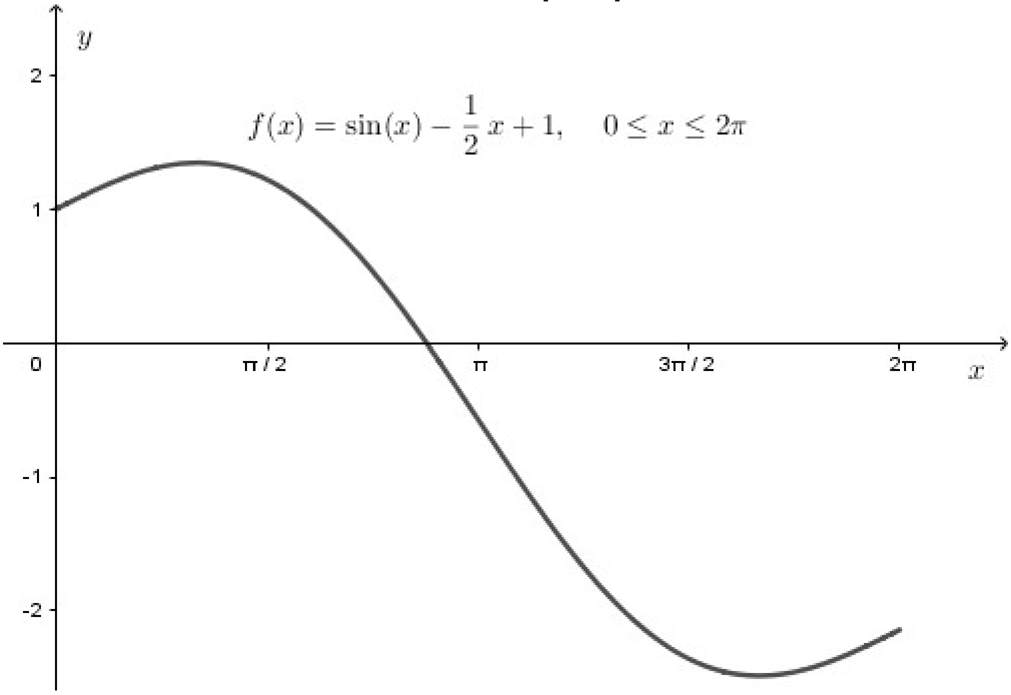
b) Ved at benytte et CAS-program (eller hånden) kan man bestemme teststørrelsen og dernæst den gældende p-værdi eller kritiske mængde.



Da p-værdien er $0.0204 < 0.05$, så afvises nulhypotesen. Der viser sig at være en sammenhæng mellem holdning og køn.

Opgave 10:

a) Funktionen tegnes i GeoGebra for $x \in [0; 2\pi]$.



Dernæst løses $f(x) = 0$. Ligningen løses numerisk vha. WordMat.

$$\sin(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$$

Ligningen løses numerisk for x vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$x \approx 2.072322 \quad \vee \quad x \approx 2.072322$$

Endelig kan det sluttes, at nulpunktet er $P(2.072322{,}0)$.

b) Den afledede bestemmes. $f'(x) = \cos(x) - 1/2$, så løses $f'(x) = 0$ og man får $\cos(x) - 1/2 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1/2$ fra enhedscirklen ved vi, at $x = \pi/3$ og $x = 5\pi/3$, så dermed er det de ønskede løsninger. Den dobbelte afledede bestemmes. $f''(x) = -\sin(x)$. Man indsætter rødderne fra $f'(x) = 0$ i $f''(x)$ og får: $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, så er $x = \pi/3$ et lokalt maksimum. Indsættes $x = 5\pi/3$ i $f''(x)$ fås. $f''(\frac{5\pi}{3}) = -\sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ og dermed er $x = 5\pi/3$ et lokalt minimum. Dermed kan der sluttes, at $f(x)$ er voksende i intervallet $x \in [0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$ og aftagende i intervallet $x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$.

c) Integralet bestemmes.

$$V = \pi \int_0^2 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \sin(x)\right)^2 dx \approx 9.2570$$

Da formlen ovenfor er volume-formlen omkring x-aksen, kan det sluttes, at volumen af $f(x)$, drejet om 360^o om førsteaksen afgrænset af $x = 0$ og $x = 2$ giver et volumen på $V = 9.257$

Opgave 11:

a) Da det er angivet at l går gennem A og B, så kan man opstille en retningsvektor mellem A og B samt benytte A som fast punkt og ud fra disse resultater vil man få en parameterfremstilling i rummet.

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-11 \\ 0-0 \\ 15-10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Så er

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 10.5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

b) Ligningen for kuglen aflæses vha. radius og centrum at

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 15^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 225$$

c) Parameterfremstillingen indsættes i kuglens ligning, og man løser ligning for t. Det giver

$$(11-6t)^2 + 0^2 + (10.5+4.5t)^2 = 225 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Så får man at koordinatsættet til skæringspunktet er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 10.5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Opgave 12:

a) Da man får oplyst at bredden er 25m, må det betyde, at $25 = |12.5 + (-12.5)|$ og dermed er $x = -12.5$ og $x = 12.5$. Højden er 3.75 ved $x = 0$, så det giver ligningen $3.75 = a \cdot \big(0 - (-12.5)\big)(0 - 12.5) = -156.25a$. Løses ligningen fås $a = -0.024$. Så kan man anvende det faktoriserede andengradspolynomium og man får $f(x) = -0.024(x+12.5)(x-12.5) = -0.024x^2 + 3.75$ som forventet.

b) Afstanden d beregnes. Først løses $f(x) = 3.7$, dvs. $-0.024x^2 + 3.75 = 3.7 \Leftrightarrow x = -1.443 \vee x = 1.443$. Dermed må d være bestemt ved $d = |1.443 + (-1.443)| = 1.443 + 1.443 = 2.886$ og dermed er afstanden $2.886m$.

c) Højden for de laveste stolper kan findes ved at man først kender afstanden ud til den mindste stolpe ved at anvende formlen:

$$Afstand\ til\ mindste\ stolpe = \frac{1}{2} \cdot d + 3 \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 2.886 + 3 \cdot 2.886 = 10.101$$

Dernæst er $f(10.101) = -0.024 \cdot (10.101)^2 + 3.75 = 1.3$, så højden må være 1.3m for begge små stolper.

Opgave 13:

a) Væksthastigheden bestemmes for $t = 0$. Bemærk, at $y(0) = 5$, så

$$y'(0) = 0.25 \cdot (48 \cdot 0.985^0 + 22 - 5) = 16.25$$

Så ved starttiden vokser temperaturen hvert minut med 16.25^oC.

b) Vha. Maple kan man lave *dsolve*, og resultatet bliver en funktion mht. t, så

$$dsolve(\{y'(t) = 0.25 \cdot (f(t) - y(t)), y(0) = 5\}, y(t))$$

$$y(t) = \frac{48\, 200^{-t}\, 197^{t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right)$$

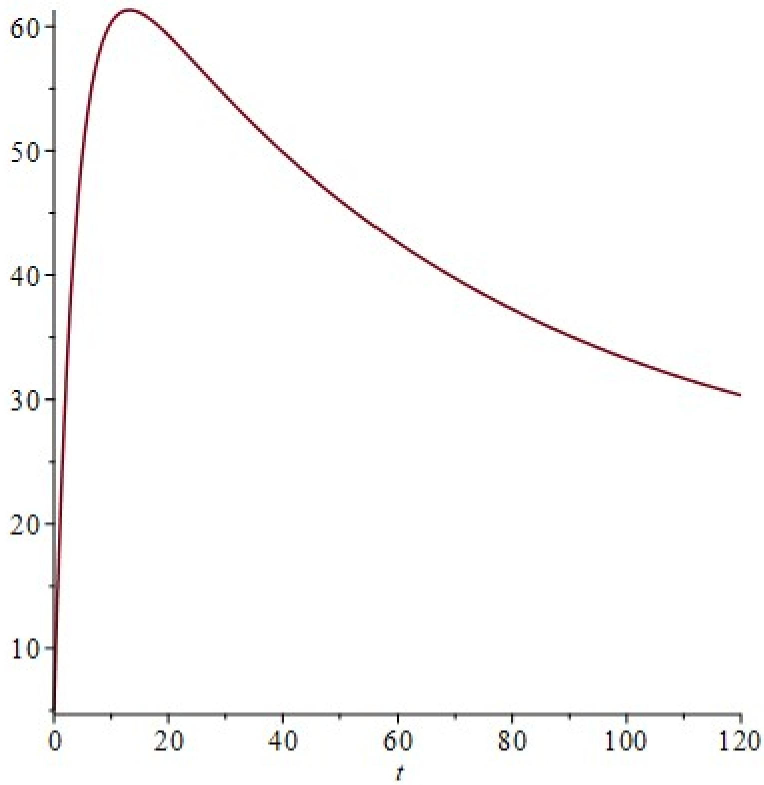
$$y(t) := \frac{48\, 200^{-t}\, 197^{t}}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}}\left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right):$$

$$y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 13.16854723$$

Dvs. $t = 13.169$ er det tidspunkt, hvor stegens indre temperatur er størst, sagt med ord: efter 13 minutter sådan cirka, er stegens indre temperatur størst. Det overlades til læseren at verificere, at $t = 13.169$ er maksimum. (hint indsæt værdien i den dobbelte afledede funktion).

Fra Maple tegnes grafen.

$$plot(y(t), t = 0..120)$$



c) Hvor væksthastigheden er mindst er det sted med vendetangent, så der løses ligningen $y''(t) = 0$. Løses den anden afledede i Maple fås

$$y''(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 25.11416804$$
$$is(y'''(25.11416804) > 0)$$
$$true$$

Så det er den værdi der er minimal. Denne indsættes i $f(t)$.

$$f(25.11416804) = 48 \cdot 0.985^{25.1141680} + 22 = 54.83958250$$

Så høkassen med vandet vil være 54.9^oC, når væksthastigheden er mindst for stegens indre temperatur.