Matematik B, HHX december 2013

Løsningsforslag uden hjælpemidler

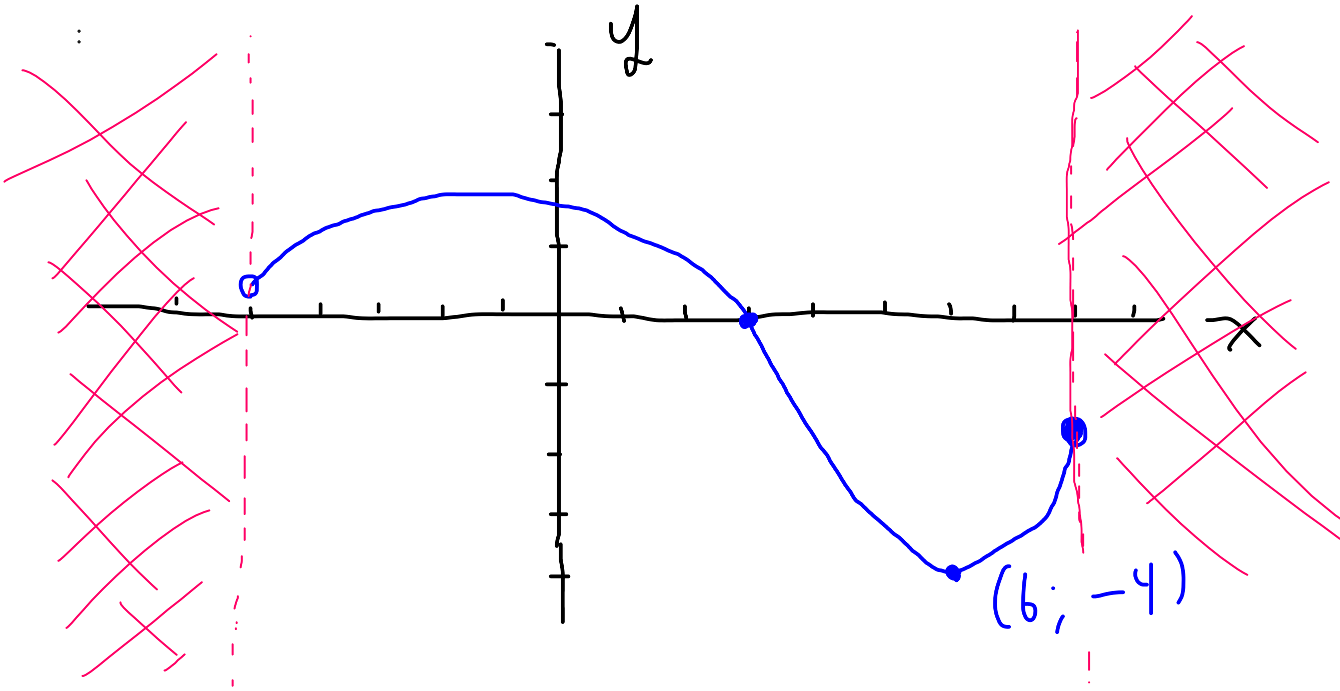
OBS: Vi lægger vægt på, at læseren forstår at $a \cdot b = ab$.

Opgave 1:

a) En tegning, der opfylder:

- $Dm(f) =]-5;8]$
- $f(x) = 0 \Rightarrow x = 3$
- Globalt min. i $(6;-4)$.

:



Opgave 2:

a) Indsæt $x = -2$ i ligningen, så

$$\big(6 + 3\cdot(-2)\big)\cdot(-6\cdot(-2) + 24) = 0$$
$$\Rightarrow (6-6)\cdot(12+24) = 0$$
$$\Rightarrow 0 = 0$$

Dermed er $x = -2$ en løsning. Nulreglen anvendes, så man har to ligninger,

$$6 + 3x = 0 \vee -6x + 24 = 0$$

Hvor mindst en af faktorerne skal give 0. Da venstre faktor gav 0 løser vi ligningen for den højre faktor.

$$-6x + 24 = 0 \Leftrightarrow -6x = -24 \Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{6} = 4$$

Så $x = -2 \vee x = 4$ er løsningerne til ligningen.

Opgave 3:

a) Den angivende vækstrate omskrives til fremskrivningsfaktoren vha.

$$a = 1 + r = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

Begyndelsesværdien i år 2012 er 15.7 mia. kr., så forskriften er

$$R(x) = 15.7 \cdot 1.2^x$$

Hvor $R(x)$ angiver omsætningen for firmaet, målt i mia. kr. til tidspunktet x, målt i år efter 2012.

Opgave 4:

a) Funktionen differentieres.

$$f'(x) = -10x + 10$$

Ligningen $f'(x) = 0$ løses og det er ret entydigt at se, at $x = 1$ er en løsning. Der vælges to nye tal 0 og 2 som anvendes til fortegnsvariation.

$$f'(0) = -10 \cdot 0 + 10 = 10$$
$$f'(2) = -10 \cdot 2 + 10 = -10$$

Der er tale om ”plus-minus”, så funktionen er voksende og dernæst aftagende i netop punktet $x = 1$. Mere generelt er der tale om:

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty\,;1]$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[1;\infty[$

Alternativt kunne man blot bestemme toppunktet for polynomiet og se på den tilhørerende a-værdi i $f(x)$. Det ses, at $a < 0$ og at toppunktets x-koordinat er i $x = 1$, dermed kan der foretages samme konklusion. Overlades til læseren.

Opgave 5:

a) Aflæsning. Det ses, at ved 50% er den daglige omsætningen på 26000kr eller mindre i år 2012.

Løsningsforslag med hjælpemidler

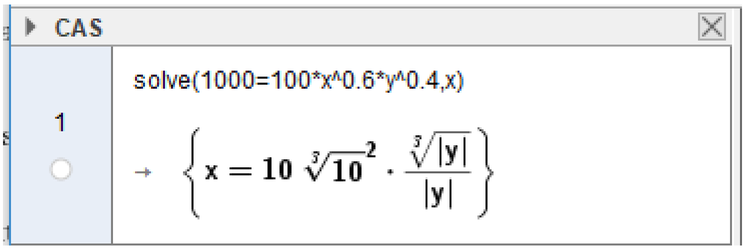
OBS: Vi lægger vægt på, at læseren forstår at $a \cdot b = ab$.

Opgave 6:

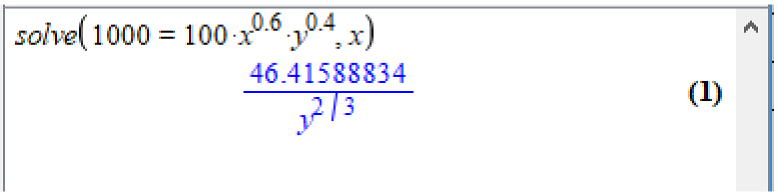
a) Sæt $P = 1000$, så er:

$$1000 = 100 \cdot x^{0.6} \cdot y^{0.4}$$

Vha. CAS-værktøjet GeoGebra er:



I Maple:



Dette kan også gøres i hånden. NB: $0.4 = 2/5$ og $0.6 = 3/5$

$$1000 = 100 \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow$$
$$10 = x^{\frac{3}{5}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow$$
$$x^{\frac{3}{5}} = \frac{10}{y^{\frac{2}{5}}} \Leftrightarrow$$
$$x = \left(\frac{10}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{10^{\frac{5}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} = 10^{\frac{5}{3}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$$

Det sidste udtryk giver det samme som GeoGebra.

b) Ligningen er $x = (x-2)^2$. Forklaringerne er angivet nedenfor:

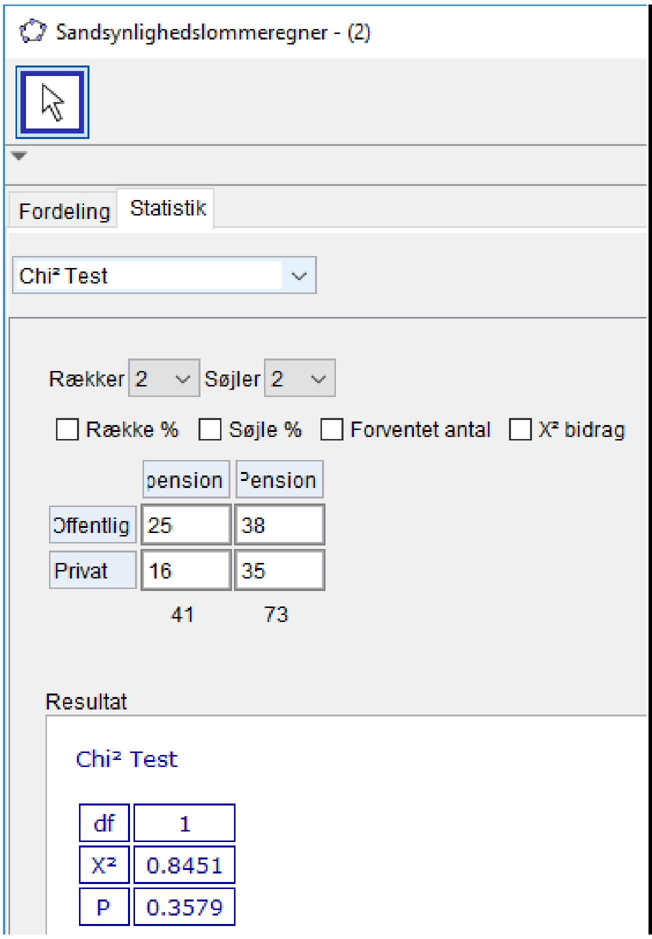
$x = (x-2)^2$	Ligningen er skrevet op.
$x = x^2 + 4 - 4x$	Anden kvadratsætning anvendes.
$x^2 - 5x + 4 = 0$	x trækkes fra på begge sider.
$x = 1 \vee x = 4$	Ligningen løses vha. faktorisering.

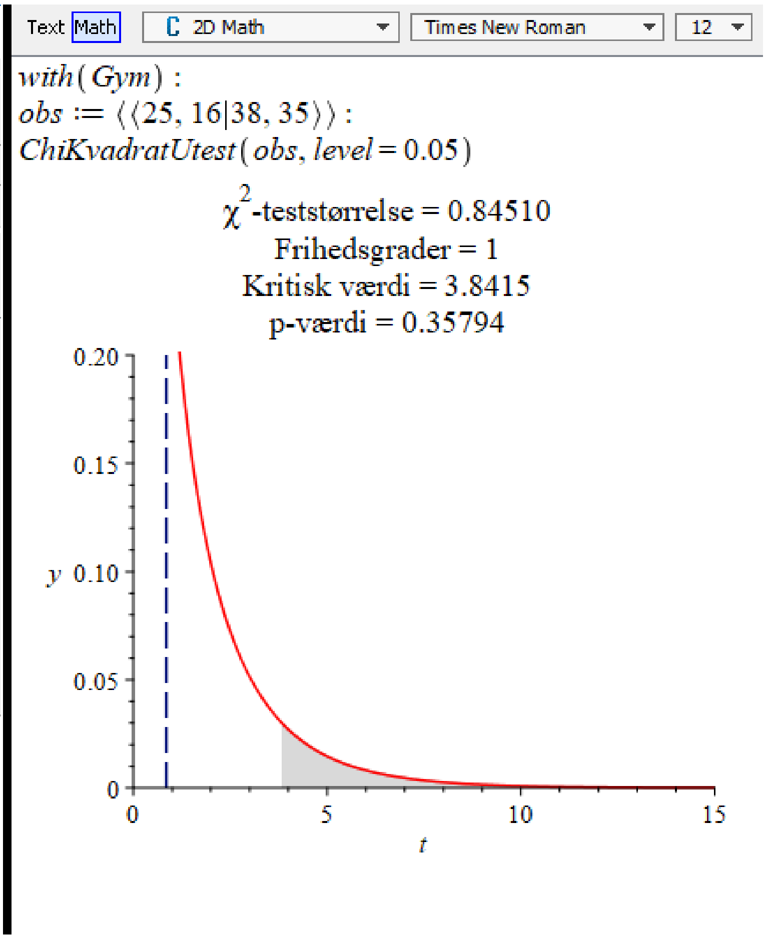
Opgave 7:

a) I Excel laves en Pivottabel og skrives rent i Word:

	Ikke pension	Pension	**Total**
Offentlig ansat	25	38	63
Privat ansat	16	35	51
Total	41	73	**114**

b) Der testes med et 5% signifikans. I GeoGebra (venstre) og Maple (højre) kan man lave Chi-anden-test.





Det ses at når p-værdien er større end de 5% der testes med, accepteres nulhypotesen. Der er ingen signifikans forskel på, om man er privat eller offentlig ansat og har en privat pensionsopsparing.

Opgave 8:

a) Omsætningen kan beskrives ved $R(x) = -x^2 + 502x,\ 25 \leq x \leq 475$

Da det er et andengradspolynomium med $a < 0$, er det nok at bestemme toppunktet.

$$T_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{502}{2\cdot(-1)} = 251$$
$$T_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{502^2 - 4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)} = 63001$$

Så den største omsætning fås ved 251 vare, som giver 63001kr.

b) Variable omkostninger er $C(x) = 25 \leq x \leq 475$, og dækningsbidraget er

$$DB(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 502x - 50x = -x^2 + 452x$$

Intervallet hvor dækningsbidraget er positivt svarer til at løse $DB(x) = 0$, så

$$-x^2 + 452x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 452x = 0 \Leftrightarrow x(x - 452) = 0$$

Her er $x = 0$, men $x = 0$ er ikke defineret i intervallet. Her er $x = 452$, som er defineret i intervallet. Det betyder, at intervallet hvor dækningsbidraget er positivt er $25 \leq x < 452$

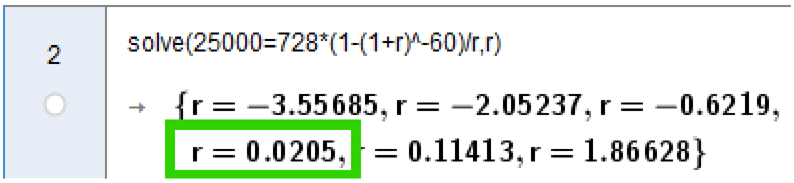
Opgave 9:

a) Der er tale om annuitetslån. Her er $G = 25000$, $y = 728$ og $n = 60$.

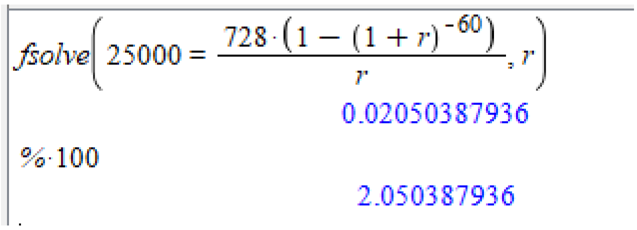
$$25000 = 728 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-60}}{r}$$

Ligningen er ikke nem at løse pr. håndkraft, så GeoGebra og Maple anvendes.

I GeoGebra:



I Maple:



Den effektive rente bestemmes.

$$r_{\text{eff}} = (1 + r)^n - 1$$

Der gælder:

$$r_{\text{eff}} = (1 + 0.0205)^{12} - 1 = 0.2757$$

Den effektive rente er 27.57%.

b) **Præsentation**

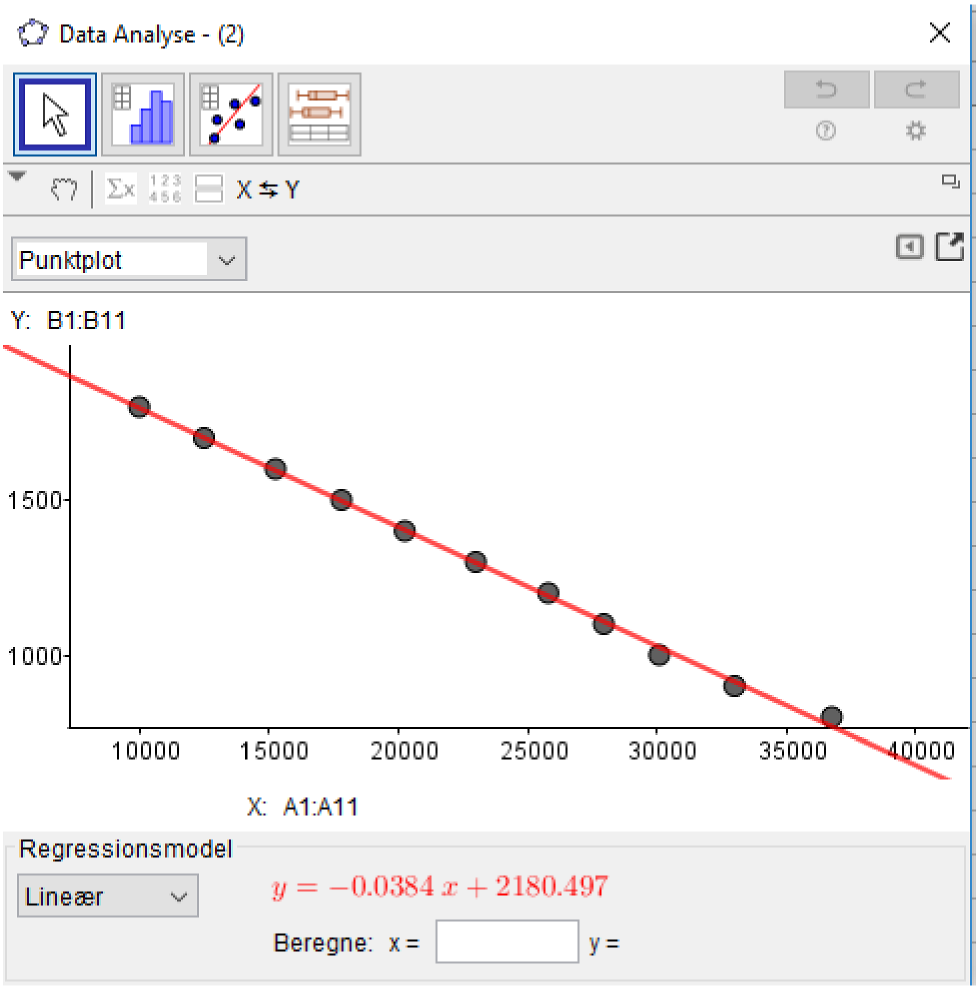
Ydelsen (728kr) hos L'easy er lavere end hos Lån & Spar Bank, hvilket gør, at L'easy er god at låne fra, hvis man vil betale tilbage i 60 måner, svarende til 5 år. Omvendt er ydelsen (967.29kr) lidt højere hos Lån & Spar Bank, men her vil man opleve, at man kun skal betale ydelsen tilbage i 36 måneder, svarende til 3 år. Renten hos Lån & Spar Bank er væsentlig lavere end hos L'easy, dermed vil Lån & Spar Bank være det bedste valg, familien kan foretage sig.

Opgave 10:

a) Grafen for $f(x)$ er A og $f'(x)$ er B. Hvis man ser hvordan B forløber sig, så ved man, at når $f'(x)$ er under x-aksen, så er $f(x)$ aftagende. Når $f'(x)$ er over x-aksen, er $f(x)$ voksende. Dette kan ses på skitsen. Ydermere kan man se, at når $f'(x)$ skærer x-aksen, (det man normalt kender fra $f'(x) = 0$), så har $f(x)$ et ekstrema. Dvs. i dette tilfælde har funktionen (som det ser ud) et globalt minimum i $x = 1$, for her skærer $f'(x)$ nemlig i $x = 1$.

Opgave 11:

a) Oplysningerne indlæses i GeoGebra, og der foretages et xy-plot (inkl. modellen $p(x) = a \cdot x + b$).



Her er den lineære forskrift

$$p(x) = -0.0384x + 2180.497$$

Hvor $p(x)$ er prisen (i kr.) og x er mængden (i stk.)

b) Ved en prise på 925kr løses ligningen

$$p(x) = 925 \Leftrightarrow$$
$$-0.0384x + 2180.497 = 925 \Leftrightarrow$$
$$-0.0384x = -1255.497 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1255.497}{0.0384} = 32695.234375$$

Så ved en pris på 925kr, kan man få 32695 stks af den mængde man har efterspurgt.

Opgave 12A:

a) Det forventede antal defekte varer udregnes til at være

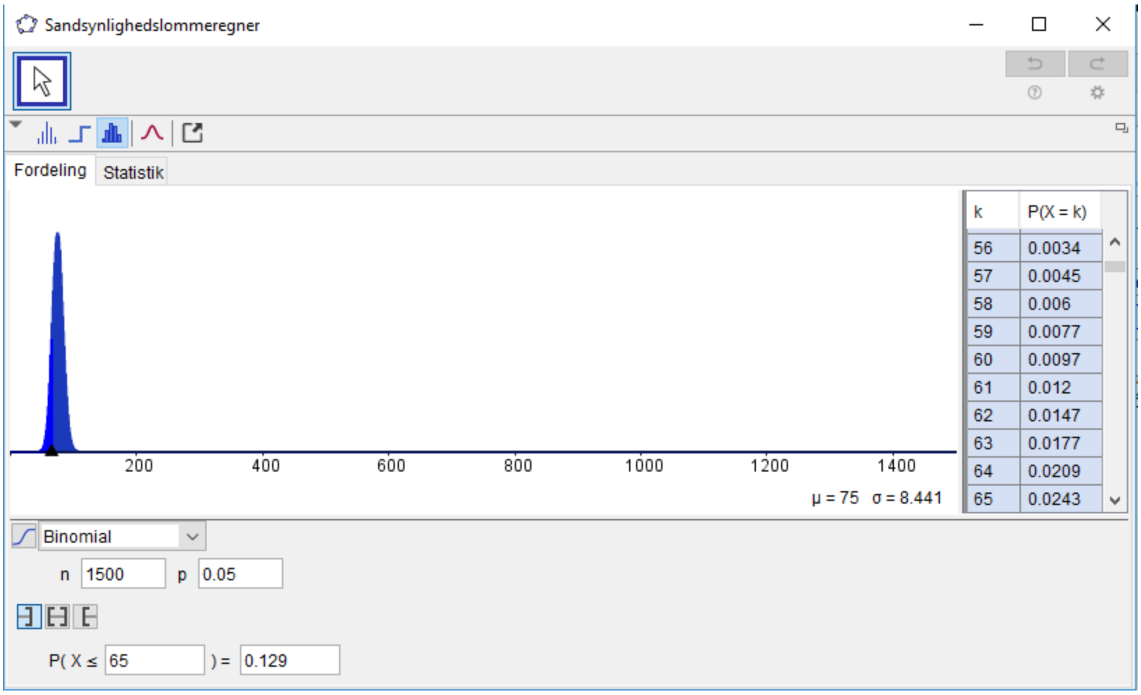
$$Defekte = 1500 \cdot \frac{5}{100} = 75$$

Så med en stikprøve på 1500 varer, er 75 højst sandsynligt defekte.

b) Man anvender binomialfordelingen. I Maple er

```
with(Gym) :
bincdf(1500, 0.05, 65)
                                0.1290230878
%·100
                                12.90230878
```

Det betyder, at sandsynligheden for at højst 65 varer er defekte ligger på ca. 12.90%. I GeoGebra er



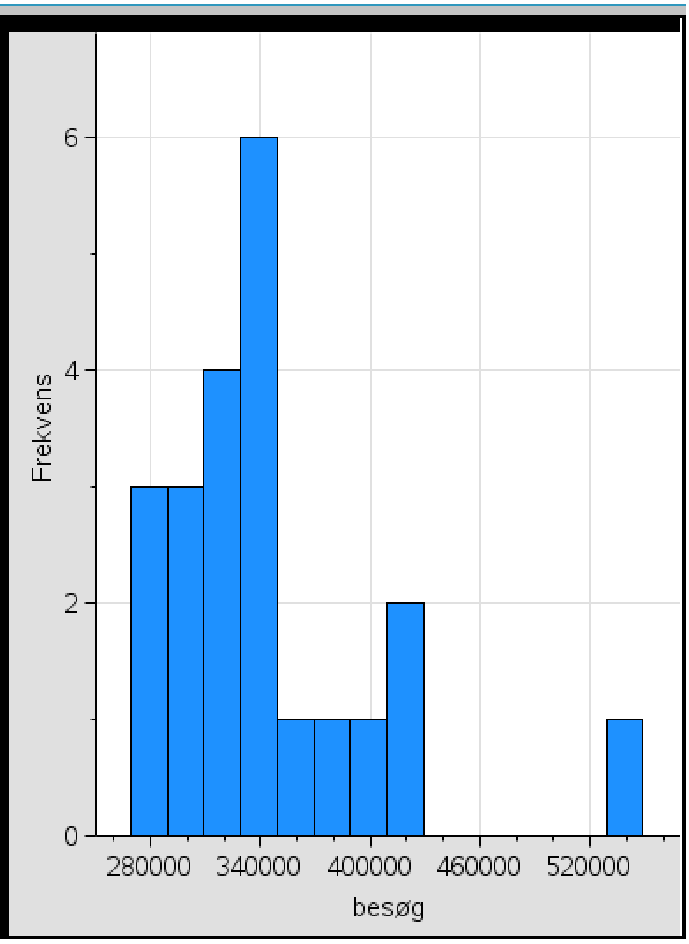
Så man får også de $0.129 = 12.9\%$

<u>Opgave 12B:</u>

a) Tallene indlæses i Nspire (tak til en kursist for lån af PC). Man vælger regneark og indlæser data. På højreside vælges diagrammer og statistik. Man vælger at vise antal besøgende. Så fremkommer der et histogram. (hvis ikke, højreklik på prikdiagrammet og find histogram).

	A år	B besøg	C	D
=				
1	1991	530851		
2	1992	361302		
3	1993	298781		
4	1994	330152		
5	1995	269145		
6	1996	269609		
7	1997	423302		
8	1998	394149		
9	1999	334578		
10	2000	320511		
11	2001	292294		
12	2002	426201		

B besøg



b) Man forsætter brugen i regnearket. Man kan få Nspire til at udregne de statistiske deskriptorer. Ifølge Nspire er

- Gennemsnittet er $\overline{x} = 341423$
- Medianen er $m = 330254$
- 90%-fraktilen er 420386

median(**besøgende**) ▸ 330254.

mean(**besøgende**) ▸ 341423.

Heldigvis kan Excel regne den. Skriv PRÆCIS:

$$= \text{FRAKTIL(dataområde; k)}$$

I mit tilfælde: $= \text{FRAKTIL}(A2{:}A23; 0{,}9)$

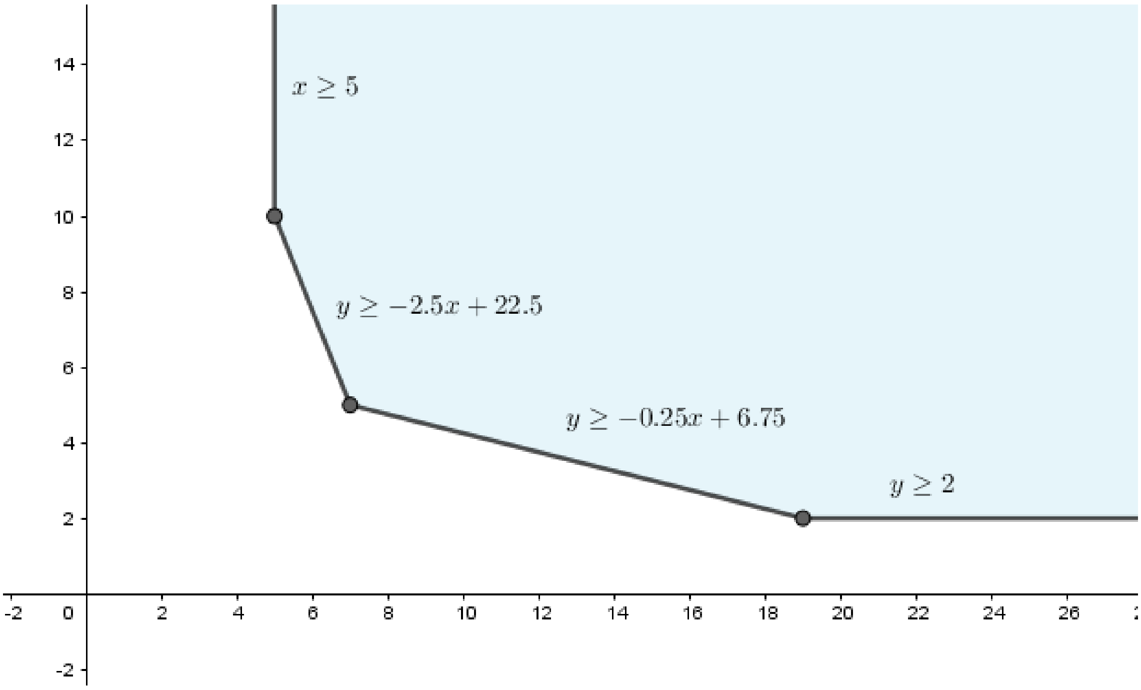
Opgave 12C:

a) Den ønskede funktion ud fra oplysningerne er

$$f(x,y) = 15x + 20y$$

Hvor x er det daglige forbrug af oksekød (i kg), y er det daglige forbrug af lammekød (i kg) og $f(x,y)$ er de daglige omkostninger til oksekød og lammekød.

b) I GeoGebra laves polygonområdet.



Hjørnemetoden anvendes. Punkterne fra ovenstående tegning er

$$(5;10), \qquad (7;5), \qquad (19;2),$$

De testes.

$$f(5{,}10) = 15 \cdot 5 + 20 \cdot 10 = 275$$
$$f(7{,}5) = 15 \cdot 7 + 20 \cdot 5 = 205$$
$$f(19{,}2) = 15 \cdot 19 + 20 \cdot 2 = 325$$

Det ses, at $f(7{,}5) = 205$ som der giver slagterbutikken de mindst mulige samlede daglige omkostninger til oksekød og lammekød, hvis der anvendes 7kg oksekød og 5kg lammekød.

Slut