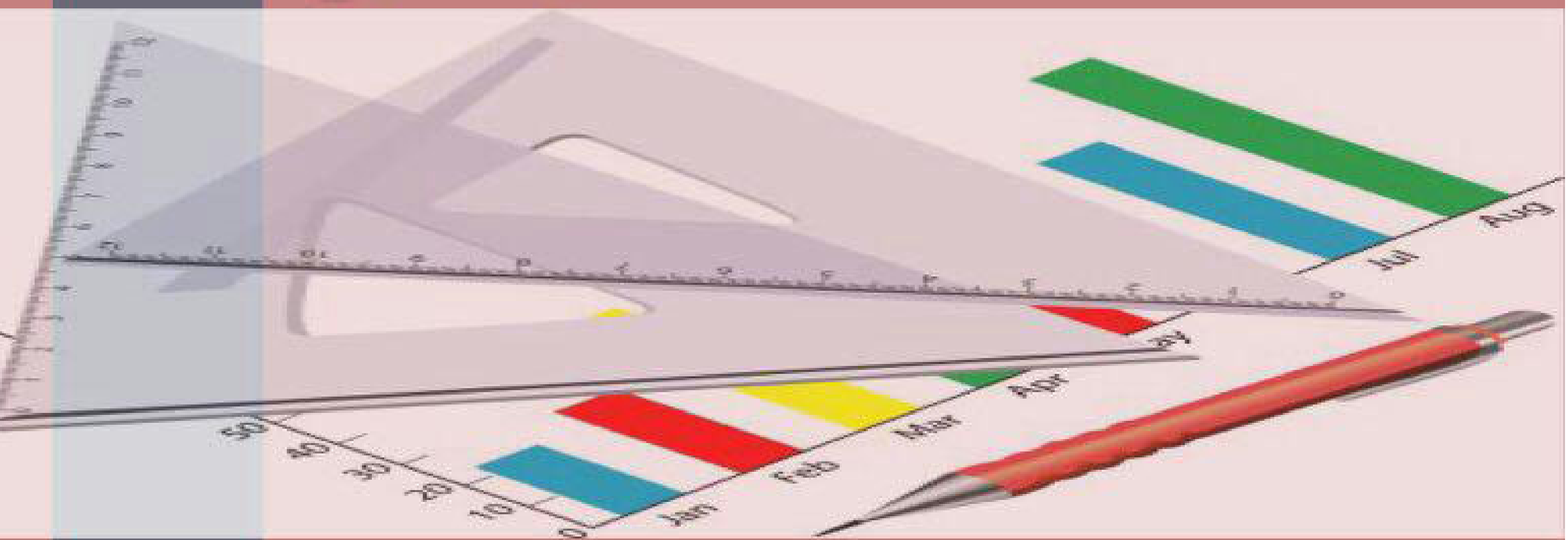
2017

مساعد الطالب في

الرياضيات

للسادس الادبي



إعداد الأستاذ : احمد الشمري

حصرياً لرحلة التفوق في السادس

ملزمة الرياضيات
السادس الادبي
2016 - 2015

شرح مفصل
حلول التمارين
حلول الاسئلة الوزارية
امثلة اثرائية

رحلة التفوق
في
السادس

الأستاذ: أحمد الشمري
07704516937

الفصل الاول(مبرهنة ذات الحدين):

الفصل الثاني(الغاية):

الفصل الثالث (المشتقة):

الفصل الرابع (التكامل):

ملزمة الرياضيات
السادس الادبي
2016 - 2015

الفصل الاول
مبرهنة ذات الحدين

رحلة التفوق
في
السادس

الأستاذ: أحمد الشمري
07704516937

المرسل للطباعة والنشر
المنصور – مجاور جامع حي دراغ
07703458937

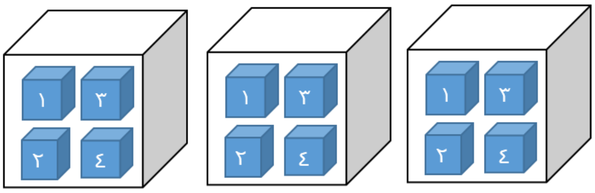

رحلة التفوق في السادس
تابعونا على مواقع التواصل


رحلة
التفوق
في السادس

الفصل الاول(مبرهنة ذات الحدين):

1- (مبدأ العد الاساسي): ويقصد به اتباع اساليب العد الاساسية في اجراء عمليات الحساب بدون استخدام المعادلات:

مثال 1/ لدينا ثلاثة صناديق بيضاء بداخل كل منها اربع صناديق زرقاء فكم عدد الصناديق الزرقاء؟



الحل/ من خلال مبدء العد الاساسي نقوم بضرب عدد الصناديق البيضاء بعدد الصناديق الزرقاء في كل صندوق ابيض وسينتج عدد الصناديق الزرقاء الكلي كما مبين:

عدد الصناديق البيضاء = 3

عدد الصناديق الزرقاء لكل صندوق ابيض = 4

عدد الصناديق الكلي = 3 . 4 = 12صندوق

مثال 2/ اعلن صاحب محل للدرّاجات الهوائية ان يوجد لديه خمسة انواع من الدرّاجات ومن كل نوع يوجد ثلاثة احجام ومن كل حجم يوجد ست درّاجات فكم عدد الدرّاجات في المحل.

الحل/ بما ان كل نوع درّاجات يحوي ثلاثة احجام وكل حجم يحوي ستة درّاجات فان:

عدد انواع الدرّاجات = 5

عدد الاحجام لكل نوع = 3

عدد الدراجات لكل حجم = 6

عدد الدرّاجات الكلي = 5 . 3 . 6 = 90 درّاجة.

مثال 3/ محل للملابس يحوي 5 موديلات مختلفة من البدلات الرجالية وفي كل موديل يوجد 10 قياسات ولديه سبعة الوان في كل قياس فكم عدد البدلات الرجالية الكلي.

الحل/ عدد الموديلات = 5

عدد القياسات لكل موديل = 10

عدد الالوان لكل قياس = 7

عدد البدلات الكلي = 5 . 10 . 7 = 350 بدلة.

مثال 4/ صاحب محل ساعات لديه 10 ماركات مختلفة وكل ماركة فيها 5 احجام وكل حجم فيه 7 الوان فكم ساعة في المحل**(وزاري 2012 دور اول)**

الحل/ عدد الماركات = 10

عدد الاحجام لكل ماركة = 5

عدد الالوان لكل حجم = 7

عدد الساعات الكلي = 10 . 5 . 7 = 350 ساعة

الاختيارات (الطرق) : باستخدام مبدأ العد الاساسي يمكننا ايجاد عدد الطرق الممكن اتباعها لتوزيع مجموعة من العناصر على مجموعة من الخانات.

مثال 5/ ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من مرتبتين باستخدام الرقمين 3 و 5 ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/ عدد طرق مرتبة العشرات = 2

عدد طرق مرتبة الاحاد = 2

عدد الطرق الكلية = 2 . 2 = 4 طرق

مثال 6/ ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من مرتبتين باستخدام الارقام 1 و 2 و 3 ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/ عدد طرق مرتبة العشرات = 3

عدد طرق مرتبة الاحاد = 3

عدد الطرق الكلية = 3 . 3 = 9 طرق

مثال 7 / ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من ثلاثة مراتب باستخدام الارقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/ عدد طرق مرتبة المئات = 5

عدد طرق مرتبة العشرات = 5

عدد طرق مرتبة الاحاد = 5

عدد الطرق الكلية = 5 . 5 . 5 = 125 طريقة

لاحظ في الامثلة السابقة كنا نسمح بتكرار الرقم في اكثر من خانة واذا طلب منا في السؤال عدم تكرار اي رقم فاننا نتبع اسلوب مختلف.

مثال 8/ ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من مرتبتين باستخدام الرقمين 3 و 5 بدون تكرار اي رقم.

الحل/ عدد طرق مرتبة العشرات = 2

عدد طرق مرتبة الاحاد = 1

عدد الطرق الكلية = 2 . 1 = 2 طريقة

مثال 9/ ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من مرتبتين باستخدام الارقام 1 و 2 و 3 بدون تكرار اي رقم.

الحل/ عدد طرق مرتبة العشرات = 3

عدد طرق مرتبة الاحاد = 2

عدد الطرق الكلي = 3 . 2 = 6 طرق

مثال 10/ ما هي الاختيارات المتوفرة لتكوين عدد من ثلاثة مراتب باستخدام الارقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 بدون تكرار اي رقم.

الحل/ عدد طرق مرتبة المئات = 5

عدد طرق مرتبة العشرات = 4

عدد طرق مرتبة الاحاد = 3

عدد الاختيارات = 5 . 4 . 3 = 60 طريقة

مثال 11/ اذا كان لدينا الحروف(أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ز) فكم كلمة (بمعنى او بدون معنى) يمكننا تكوينها بحيث تتكون من اربعة حروف على ان لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة.

الحل/ عدد طرق الحرف الاول في الكلمة = 6

عدد طرق الحرف الثاني في الكلمة = 5

عدد طرق الحرف الثالث في الكلمة = 4

عدد طرق الحرف الرابع في الكلمة = 3

عدد الطرق الكلية = 6 . 5 . 4 . 3 = 360 كلمة

مثال 12 / اذا كان لدى فتاة 6 قمصان مختلفة الالوان و7 تنورات مختلفة الالوان و 4 ازواج احذية مختلفة فبكم زي مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن للفتاة ان تستخدم.

توضيح : عدد طرق توزيع مجموعة عناصر على خانة واحدة يساوي عدد العناصر في المجموعة.

الحل/ عدد طرق القميص = 6

عدد طرق التنورة = 7

عدد طرق زوج الحذاء = 4

عدد الطرق الكلية = 6 . 7 . 4 = 168 زي

مثال 13/ اذا كان لشاب اربعة قمصان وثلاثة تيشيرتات وخمسة بنطلونات واربعة احذية فكم زي يمكنه ان يستخدم بفرض انه يرتدي اما قميص او تي شيرت.

الحل/ في هذا المثال لدينا مجموعة قمصان ومجموعة تيشيرتات تندرج في نفس الخانة لذلك يكون عدد طرق هذه الخانة يساوي مجموع عدد عناصر القمصان والتيشيرتات:

عدد طرق خانة القمصان والتيشيرتات = 3 + 4 = 7

عدد طرق البنطلونات = 5

عدد طرق الاحذية = 4

عدد الطرق الكلية = 7 . 5 . 4 = 140 زي

مثال 14 / بكم طريقة يمكن تكوين عددا من ثلاثة مراتب على ان يكون اقل من 500 باستخدام الارقام(1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7) اذا كان:

1 – يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

2 – لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

توضيح : السؤال يشترط ان يكون العدد اقل من 500 وهذا يعني اننا لا نستطيع وضع الارقام 7 و 6 و 5 في خانة المئات وبذلك يكون عدد الارقام الممكنة لخانة المئات هي اربعة ارقام فقط وهي 1 و 2 و 3 و 4.

الحل/ أ – يسمح بتكرار الرقم:

عدد الطرق في مرتبة المئات = 4

عدد الطرق في مرتبة العشرات = 7

عدد الطرق في مرتبة الاحاد = 7

عدد الطرق الكلية = 4 . 7 . 7 = 196 طريقة

ب – لا يسمح بتكرار الرقم:

عدد طرق خانة المئات = 4

عدد طرق خانة العشرات = 6

عدد طرق خانة الاحاد = 5

عدد الطرق الكلية = 4 . 5 . 6 = 120 طريقة

مثال 15 / كم عددا مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام(1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7) بحيث:

a) يكون العدد زوجيا وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به.

b) يكون العدد فرديا وتكرار الرقم في العدد مسموح به. (وزاري 2013 دور ثاني)

الحل/ a) عدد طرق مرتبة الاحاد = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 6
عدد طرق مرتبة المئات = 5
عدد الطرق الكلية = 3 . 6 . 5 = 90 طريقة

ملاحظة / مرتبة الاحاد تحوي احد الارقام (2 و 4 و 6) اي عدد طرق مرتبة الاحاد يساوي 3.

b) عدد طرق مرتبة الاحاد = 4
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة المئات = 7
عدد الطرق الكلية = 4 . 7 . 7 = 196 طريقة

ملاحظة / مرتبة الاحاد تحوي احد الارقام(1 و 3 و 5 و 7) اي عدد طرق مرتبة الاحاد يساوي 4.

حلول تمارين 1-1

1- لدى احمد 5 سترات مختلفة و 6 بنطلونات مختلفة و 8 قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من سترة وبنطلون وقميص. (تمهيدي 2013 ، وزاري 2011 دور اول)

ج/ عدد طرق السترات = 5
عدد طرق البنطلونات = 6
عدد طرق القمصان = 8
عدد طرق الزي = 5 . 6 . 8 = 240 ز

2- اذا كان لدينا الحروف (أ – ل – ع – ق – ك – ب) كم كلمة مكونة من اربعة احرف (بمعنى او بدون معنى) من هذه الحروف على ان لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة.

ج/ عدد طرق الحرف الاول = 6
عدد طرق الحرف الثاني = 5
عدد طرق الحرف الثالث = 4
عدد طرق الحرف الرابع = 3
عدد الكلمات = 6 . 5 . 4 . 3 = 360 كلمة

3- بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينة مختلفة.

ج/ عدد طرق الوظيفة الاولى = 10
عدد طرق الوظيفة الثانية = 9
عدد طرق الوظيفة الثالثة = 8
عدد طرق شغل الوظائف = 10 . 9 . 8 = 720 طريقة

4- كم عددا مكون رمزه من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه باستخدام الارقام 9، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3
أ – على ان يكون العدد فرديا والتكرار غير مسموح للرقم في العدد نفسه.
ب – على ان يكون العدد زوجيا والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه.

ج/ أ- عدد طرق مرتبة الاحاد = 4
عدد طرق مرتبة العشرات = 6
عدد طرق مرتبة المئات = 5
عدد الطرق الكلية = 4 . 6 . 5 = 120 طريقة

ب - عدد طرق مرتبة الاحاد = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة المئات = 7
عدد الطرق الكلية = 3 . 7 . 7 = 147 طريقة

5- كم عددا يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7
أ – على ان يكون العدد اكبر من 500 والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه.
ب – على ان يكون العدد اصغر من 400 والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه.

الحل/
أ - عدد طرق مرتبة الاحاد = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة المئات = 7
عدد الطرق الكلية = 3 . 7 . 7 = 147 عدد

ب - عدد طرق مرتبة الاحاد = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 6
عدد طرق مرتبة المئات = 5
عدد الطرق الكلية = 3 . 6 . 5 = 90 عدد

2- مضروب العدد (المفكوك): هو حاصل ضرب العدد في الاعداد التي تسبقه ويرمز له اما بـ ! او L واذا فرضنا ان n عدد طبيعي فان مفكوك n هو n! او $\lfloor n$ حيث :

n! = n . (n-1) . (n-2) 1

مثال 1/ جد مفكوك العدد 4؟

ج/ 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24

مثال 2/ جد مفكوك الاعداد 5 ، 3 ؟

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

3! = 3 . 2 . 1 = 6

قوانين المفكوك:

1) **0! = 1** مفكوك الصفر يساوي 1
2) **1! = 1** مفكوك الواحد يساوي 1
3) **2! = 2** مفكوك الاثنين يساوي 2
4) **n! = n . (n-1)! = n . (n-1) . (n-2)!**

اي ان:

6! = 6 . 5! = 6 . 5 . 4! = 6 . 5 . 4 . 3! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2!

مثال 3/ جد قيمة المعادلة التالية $\frac{9!}{7!}$ ؟

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9\ .\ 8\ .\ \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 9\,.\,8 = 72$$

مثال 4/ جد ناتج المعادلة $\frac{100!}{99!}$ ؟

$$\frac{100!}{99!} = \frac{100\ .\cancel{99!}}{\cancel{99!}} = 100$$

مثال 5/ جد قيمة n التي تحقق المعادلة $6 = \frac{n!}{(n-2)!}$. **(وزاري 2011 دور اول)**

الحل/ من تعريف مفكوك العدد فان:

n! = n . (n-1) . (n-2)!

بذلك يمكننا ان نستعيض عن قيمة n! كما مبين:

$$\frac{n\ .\ (n-1)\ .\ \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 6$$

n(n-1)-6 = 0 ⟹ $n^2 - n - 6 = 0$ ⟹ (n+2)(n-3) = 0

n = -2 تهمل دائما لان العدد السالب لا يوجد له مفكوك

$\therefore n = 3$

قانون التساوي : اذا كان k! = n! فان n تساوي k

مثال 6/ جد قيمة n التي تحقق المعادلة (n+1)! = 24

الحل/ بما ان احد طرفي المعادلة هو عدد وليس مفكوك فاننا يجب ان نجد العدد الذي يكون مفكوكه يساوي الرقم 24 من خلال الضرب العكسي:

1 . 2 = 2
2 . 3 = 6
6 . 4 = 24 ∴ 4! = 24

اذا : (n+1)! = 4!

n+1 = 4 ≫ $\therefore n = 3$

يفضل ان يتم حفظ مفكوك الاعداد الاساسية من 1 الى 7 كما مبين:

3 - التباديل: تستخدم معادلة التباديل في حساب عدد الطرق لمجموعة عناصر بشرط التكرار غير مسموح والترتيب مأخوذ بنظر الاعتبار:

قانون التباديل : $$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وتقرأ تباديل n مأخوذة r في كل مرة حيث:

$P_r^n =$ عدد الطرق الكلي

$n =$ عدد العناصر او عدد المراتب ايهما اكبر

$r =$ عدد العناصر او عدد المراتب ايهما اقل

مثال 1/ جد عدد الطرق لانشاء رقم من ثلاثة مراتب باستخدام مجموعة الارقام (1 و2 و3 و 4 و5) بشرط عدم تكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/

$r=3 \quad \& \quad n=5$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60 \text{ طريقة}$$

اذا عدد الطرق الكلية يساوي 60 طريقة

مثال 2/ جد عدد الطرق لانشاء كلمة من اربعة حروف باستخدام مجموعة الاحرف (أ ، ب ، ج ، د ، هـ) بشرط عدم تكرار الحرف في الكلمة نفسها.

$$P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5.4.3.2 = 120 \text{ كلمة}$$

مثال 3/ احسب كل مما يأتي: P_0^{10} ، P_4^4 ، P_3^4

a) $P_0^{10} = \frac{10!}{(10-0)!} = \frac{10!}{10!} = 1$

b) $P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4.3.2 = 24$

c) $P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4.3.2}{1} = 24$

d) $P_1^4 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4.3!}{3!} = 4$

مثال 4/ ما عدد طرق توزيع 5 اشخاص على خمسة وظائف **مختلفة** بحيث لكل شخص وظيفة واحدة.

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 5.4.3.2 = 120 \text{ طريقة}$$

ملاحظة/ بما ان الوظائف مختلفة والاشخاص مختلفون فان الترتيب مهم.

مثال 5/ جد قيمة n عندما $P_2^n = 42$

ج/

$$P_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n.(n-1).\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 42$$

$n.(n-1) = 42 \implies n^2 - n - 42 = 0 \implies (n+6)(n-7) = 0$

$n = -6$ تهمل $\implies \therefore \; n = 7$

مثال 6/ جد قيمة r عندما:

a) $P_3^6 = P_r^6$

b) $P_4^5 = P_r^5$

ج/ a) $P_3^6 = P_r^6$

$$\frac{\cancel{6!}}{(6-3)!} = \frac{\cancel{6!}}{(6-r)!} \implies (6-3)! = (6-r)! \implies 6-3 = 6-r \implies \therefore r = 3$$

b) $P_4^5 = P_r^5$

$$\frac{\cancel{5!}}{(5-4)!} = \frac{\cancel{5!}}{(5-r)!} \implies (5-4)! = (5-r)! \implies 5-4 = 5-r \implies \therefore r = 4$$

قانون المساواة:	اذا كان $P_r^n = P_k^n$ فان $r = K$

مثال 7/ جد قيمة كل من P_3^6 ، P_5^8 ، P_7^{15}

a) $P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$

b) $P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6720$

c) $P_7^{15} = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 32432400$

مثال 8/ ما عدد الاعداد التي رمز كل منها مكون من ثلاثة ارقام مأخوذة من بين الارقام 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 بشرط:

أ – دون تكرار الرقم في العدد نفسه.

ب – يمكن تكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/ أ –

$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$ عدد

ب -

عدد طرق مرتبة الاحاد = 6

عدد طرق مرتبة العشرات = 6

عدد طرق مرتبة المئات = 6

عدد الطرق الكلية = 6 . 6 . 6 = 216 طريقة

حلول التمارين 2-1

1- احسب قيمة كل من :

أ –

$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 42$

ب-

$\frac{\underline{|10}}{\underline{|6}} - \frac{\underline{|9}}{\underline{|5}} = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{5!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}} - \frac{9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 5040 - 3024 = 2016$

2- جد قيمة n اذا كان :

أ- $n! = 5040$

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

$\therefore n = 7$

ب- $P_2^n = 72$

$P_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n.(n-1).\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n.(n-1) = n^2 - n = 72$

$n^2 - n - 72 = 0 \Longrightarrow (n+8)(n-9) = 0 \Longrightarrow n = -8$ تهمل ، $\therefore n = 9$

ج- $P_5^n = 8 \,.\, P_4^n$ (وزاري 2013 دور اول)

$$P_5^n = 8 \,.\, P_4^n \implies \frac{\cancel{n}!}{(n-5)!} = 8 \,.\, \frac{\cancel{n}!}{(n-4)!} \implies (n-4)! = 8 \,.\, (n-5)!$$

$$(n-4)\,.\,\cancel{(n-5)!} = 8\,.\,\cancel{(n-5)!} \implies n-4 = 8 \implies \therefore n = 12$$

د- $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ (وزاري 2013 دور ثاني)

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,.\,(n+1-1)\,.(n+1-2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,.\,(n)\,.(n-1)!}{(n-1)!} = n\,(n+1) = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0 \implies (n-5)(n+6) = 0$$

$n = -6$ تهمل ، $\therefore n = 5$

3- اذا كانت لدينا المجموعة $x = (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7)$ فكم عددا رمزه مكون من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه اذا كان:

a) بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟ $P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 210$ عدد

b) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

عدد طرق مرتبة الاحاد = 7
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة المئات = 7
عدد الطرق الكلية = 343 عدد

c) اصغر من 400 بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

عدد طرق مرتبة المئات = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 6
عدد طرق مرتبة الاحاد = 5
عدد الطرق الكلية = 90 عدد

d) اكبر من 200 ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

عدد طرق مرتبة المئات = 6
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة الاحاد = 7
عدد الطرق الكلية = 294 عدد

e) عددا زوجيا بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

عدد طرق مرتبة الاحاد = 3
عدد طرق مرتبة العشرات = 6
عدد طرق مرتبة المئات = 5
عدد الطرق الكلية = 90 عدد

f) عددا فرديا ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

عدد طرق مرتبة المئات = 4
عدد طرق مرتبة العشرات = 7
عدد طرق مرتبة الاحاد = 7
عدد الطرق الكلية = 196 عدد

4- يجرى في احد الصفوف انتخابا على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وامين السر ما عدد النتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب؟

ج/ الترتيب مهم والتكرار غير مسموح :

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 720 \text{ نتيجة}$$

5- كم كلمة **مختلفة الحروف** مكونة من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة ذي قار؟

ج/

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60 \text{ كلمة}$$

6- بكم طريقة يمكن ان يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي؟

ج/ التكرار غير مسموح وكذلك الترتيب مهم:

$$P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720 \text{ طريقة}$$

4 - التوافيق : تستخدم معادلة التوافيق في حساب عدد طرق ترتيب مجموعة عناصر بشرط:

1- التكرار غير مسموح.

2- الترتيب غير مأخوذ بنظر الاعتبار.

قانون التوافيق $C_r^n = \frac{n!}{r!\ .\ (n-r)!}$

وتقرأ توافيق n مأخوذة r في كل مرة

C_r^n = عدد الطرق الكلي

n = عدد عناصر المجموعة او عدد المراتب ايهما اكبر

r = عدد عناصر المجموعة او عدد المراتب ايهما اقل

ويمكن كتابة رمز التوافيق كما مبين:

$C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$

مثال 1/ اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية 8 والمطلوب الاجابة عن 6 اسئلة فقط فكم عدد طرق حل الاسئلة؟

ج/ بما ان ترتيب حل الاسئلة غير مهم ولا يمكن تكرار حل اي سؤال في الدفتر الامتحاني فاننا نستخدم قانون التوافيق كما مبين:

n = 8 & r = 6

$C_6^8 = \frac{8!}{6!\ .\ (8-6)!} = \frac{8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\ .\ 2!}$ = 28 طريقة

مثال 2/ كم عدد قطع المستقيم التي يمكن تحديدها بنقطتين من مجموعة فيها 6 نقاط ولا توجد ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟ (تمهيدي 2005)

ج/

$C_2^6 = \frac{6!}{2!\ .\ (6-2)!} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{2\ .\ \cancel{4!}} = 15$

مثال 3/ جد ناتج ما يأتي C_{12}^{15} ، C_3^{15} ، C_0^8 ، C_4^5 ، C_5^5

a) $C_{12}^{15} = \frac{15!}{12!\ .\ (15-12)!} = \frac{15.14.13.12!}{12!\ .\ 3!} = \frac{15.14.13}{3.2} = 5.7.13 = 455$

b) $C_3^{15} = \frac{15!}{3!\ .\ (15-3)!} = \frac{15.14.13.12!}{3!\ .\ 12!} = \frac{15.14.13}{3.2} = 5.7.13 = 455$

c) $C_0^8 = \frac{8!}{0!\ .\ (8-0)!} = \frac{8!}{1\ .\ 8!} = 1$

d) $C_4^5 = \frac{5!}{4!\ .\ (5-4)!} = \frac{5\ .4!}{4!\ .\ 1!} = 5$

e) $C_5^5 = \frac{5!}{5!\ .\ (5-5)!} = \frac{5!}{5!\ .\ 0!} = \frac{5!}{5!\ .\ 1} = 1$

قانون التوافيق: $C_r^n = C_{n-r}^n$

مثال 4/ احسب ما يأتي C_5^{13} ، C_0^{10} ، C_{20}^{20}

ج/

a) $C_5^{13} = \frac{13!}{5!\ .\ (13-5)!} = \frac{13.12.11.10.9.8!}{5!\ .\ 8!} = \frac{13.12.11.10.9}{5.4.3.2} = 13.11.9 = 1287$

b) $C_0^{10} = \frac{10!}{0!\ .\ (10-0)!} = 1$

c) $C_{20}^{20} = \frac{20!}{20!\ .\ (20-20)!} = 1$

مثال 5/ جد قيمة n اذا كان $\binom{n+1}{3} = 2\binom{n}{2}$ ؟ (وزاري 2012 دور اول)

$$2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \implies 2.\frac{n!}{2!\,.\,(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{3!\,.\,((n+1)-3)!}$$

$$\cancel{2}.\frac{n!}{\cancel{2!}\,.\,(\cancel{n-2})!} = \frac{(n+1)!}{3!\,.\,(\cancel{n-2})!} \implies n! = \frac{(n+1)!}{3!} \implies n! = \frac{(n+1)!}{6}$$

$$n! = \frac{(n+1).(n+1-1)!}{6} \implies n! = \frac{(n+1).n!}{6} \implies 6 = \frac{(n+1).\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

$6 = n + 1 \implies \therefore n = 5$

مثال 6/ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من 5 طالبات و 7 طلاب من بين مجموعة مكونة من 8 طالبات و10 طلاب؟

ج/ عدد طرق اختيار خمس طالبات من ثمانية = C_5^8

عدد طرق اختيار سبع طلاب من عشرة = C_7^{10}

$$C_5^8 \,.\, C_7^{10} = \frac{8!}{5!\,.\,(8-5)!} \,.\, \frac{10!}{7!\,.\,(10-7)!} = \frac{8.7.6.5!}{5!\,.\,(3)!} \,.\, \frac{10.9.8.7!}{7!\,.\,(3)!} = \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,.\,(3)!} \,.\, \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}\,.\,3.2}$$

$= 8.7.10.3.4 = 6720$ طريقة

مثال 7/ صندوق يحوي 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء يراد سحب (اختيار) 5 كرات بشرط ان تكون 3 كرات منها حمراء فقط ، بكم طريقة يمكن اجراء السحب؟ (تمهيدي 2013)

ج/ عدد طرق اختيار 3 كرات حمراء من 6 كرات = C_3^6

عدد طرق اختيار كرتين بيضاء من 4 كرات = C_2^4

$$C_3^6 \,.\, C_2^4 = \frac{6!}{3!\,.\,(6-3)!} \,.\, \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!} = \frac{\cancel{6}.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,.\,\cancel{3.2}} \,.\, \frac{\overset{2}{\cancel{4}}.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,.\,\cancel{2!}} = 5\,.\,4\,.\,2\,.\,3 = 120$$

مثال 8/ في احد المخازن يوجد ستة علب من مادة الحليب واربع علب من الشاي وخمسة اكياس سكر ، بكم طريقة يمكن تجهيز طلبية تحوي علبتي حليب وثلاث علب شاي واربعة اكياس سكر؟

الحل/ عدد طرق اختيار علبتي حليب من ستة = C_2^6

عدد طرق اختيار ثلاث علب شاي من اربع = C_3^4

عدد طرق اختيار اربع اكياس سكر من خمسة = C_4^5

$$C_2^6 \,.\, C_3^4 \,.\, C_4^5 = \frac{6!}{2!\,.\,(6-2)!} \,.\, \frac{4!}{3!\,.\,(4-3)!} \,.\, \frac{55!}{4!\,.\,(5-4)!} = 15\,.\,4\,.\,5$$

$= 300$ طريقة

مثال 9/ صندوق يحوي 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء يراد سحب (اختيار) 5 كرات بشرط ان تكون على الاقل 3 كرات حمراء فقط ، بكم طريقة يمكن اجراء السحب؟

ج/ على الأقل 3 حمراء (نبدء من 3 ونزيد الى 5)

1 - ثلاث حمراء من ستة واثنان بيضاء من اربعة = $C_2^4 \,.\, C_3^6$

2 - اربع حمراء من ستة وواحدة بيضاء من اربعة = $C_1^4 \,.\, C_4^6$

3 - خمسة حمراء من ستة وصفر بيضاء من اربعة = $C_0^4 \,.\, C_5^6$

الحمراء (6)	البيضاء (4)	المجموع
3	2	5
4	1	5
5	0	5

$C_3^6 \,.\, C_2^4 + C_4^6 \,.\, C_1^4 + C_5^6 \,.\, C_0^4 = 20\,.\,6 + 15\,.\,4 + 6\,.\,1 = 120 + 60 + 6 = 186$ طريقة

مثال 10/ المجموعة x تحوي اربع عناصر والمجموعة y تحوي خمسة عناصر ، كم مجموعة رباعية يمكن تكوينها من عناصر المجموعتين x وy بشرط ان تحوي على الاكثر عنصرين من المجموعة y ؟

الحل/ عنصرين من y وعنصرين من x = $C_2^5 \,.\, C_2^4$

1) عنصر من y وثلاث من x = $C_1^5 \,.\, C_3^4$

2) صفر من y واربع من x فقط = $C_0^5 \,.\, C_4^4$

x (4)	y (5)	المجموع
2	2	4
3	1	4
4	0	4

$C_2^4 \,.\, C_2^5 + C_1^5 \,.\, C_3^4 + C_0^5 \,.\, C_4^4 = 6\,.\,10 + 5\,.\,4 + 1\,.\,1 = 60 + 20 + 1 = 81$ مجموعة

حلول تمارين 3-1

1- جد قيمة كل من :

a) $C_5^{11} = \frac{11!}{5!\ .\ (11-5)!} = \frac{11.10.9.8.7.6!}{5.4.3.2!\ .\ 6!} = 11.3.2.7 = 462$

b) $C(18,18) = \frac{18!}{18!\ .\ (18-18)!} = 1$

c) $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0!\ .\ (7-0)!} = 1$

d) $\frac{1}{210}\ [P_3^7 + P_4^7] = \frac{1}{210}\ [\frac{7!}{(7-3)!} + \frac{7!}{(7-4)!}] = \frac{1}{210}\ [\frac{7.6.5.4!}{4!} + \frac{7.6.5.4.3!}{3!}]$

$= \frac{1}{210}\ [210 + 840] = \frac{1050}{210} = 5$

2- جد قيمة n اذا كان $C_{20}^n = C_{35}^n$ (2012 دور 3)

ج/ بما ان $C_r^n = C_{n-r}^n$ اذا:

$\because r = 20\ ,\ n - r = 35\ ,\ n - 20 = 35$

$\therefore n = 35 + 20 = 55$

3- اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة:

a) $C_6^{16} = C_4^{10}$

$C_6^{16} = \frac{16!}{6!\ .\ (16-6)!} = \frac{16.15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{6.5.4.3.2\ .\ \cancel{10!}} = 8.7.13.11 = 8008$

$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\ .\ 6!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{4.3.2\ .\ \cancel{6!}} = 10.3.7 = 210 \Longrightarrow \therefore C_6^{16} \neq C_4^{10}$ العبارة خاطئة

b) $C_{23}^{25} = \frac{P_2^{25}}{2!}$ (تمهيدي 2005)

$\frac{25!}{23!\ .(25-23)!} = \frac{25!}{(25-2)!} . \frac{1}{2!} \Longrightarrow \frac{25!}{23!\ .\ 2!} = \frac{25!}{23!} . \frac{1}{2!}$ العبارة صائبة

c) $\binom{n}{4} = \binom{n}{6}$ $\therefore n = 10$

بما ان $C_r^n = C_{n-r}^n$ اذا:

$\because r = 4\ ,\ n - 6 = 4\ ,\ n = 4 + 6$

$\therefore n = 10$

العبارة صائبة

d) عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر والتي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها 10 هو C_3^{10}

العبارة صائبة

e) سبعة اشخاص غير متمايزين يكون عدد طرق اختيار ثلاثة منهم هو P_3^7

العبارة خاطئة

ملاحظة : لان المجموعة الفرعية تحوي اشخاص غير متمايزين اذا الترتيب غير ضروري والحل بالتوافيق.

f) عدد طرق اختيار شخصين من بين ستة اشخاص دون مراعاة الترتيب عند الاختيار يساوي 15 طريقة.

$C_2^6 = \frac{6!}{2!\ .\ (6-2)!} = \frac{6.5.4!}{2!\ .\ 4!} = 15$

العبارة صائبة

g) $P_0^3 - 2\,\lfloor 0 = -1$

R.H.S $= P_0^3 - 2\lfloor 0 = \frac{3!}{(3-0)!} - 2\ .\ 0! = \frac{3!}{3!} - 2\ .\ 1 = 1-2 = -1 = L.H.S$ العبارة صائبة

h) لكل $n , r \in N$ اذا كان $P_n^5 = P_r^5$ فان $n = r$

$$P_r^5 = P_n^5$$

$$\frac{\cancel{5}!}{(5-r)!} = \frac{\cancel{5}!}{(5-n)!}$$

$(5-r)! = (5-n)!$ وسطين بطرفين

$(5-r) = (5-n) \Longrightarrow 5-r = 5-n$ العبارة صائبة $\therefore\ r = n$

4- اختر الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

a) عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين عشرة اشخاص يساوي

الجواب الصحيح C_3^{10} اي رقم 2

b) اذا كان n عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها 6 فان n يساوي :

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!\ .\ (6-2)!} = \frac{6.5.4!}{2!\ .\ 4!} = 15$$ الجواب الصحيح رقم 1

c) عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين رأسين من رؤوس مضلع سداسي يساوي

الجواب الصحيح رقم 2 C_2^6

d) $\binom{68}{8} \div C_{60}^{68} = C_8^{68} \div C_{60}^{68} = 1$

بما ان $C_r^n = C_{n-r}^n$ فان $C_8^{68} = C_{60}^{68}$ الجواب الصحيح رقم 3

e) اذا كان لدينا الارقام 1,2,3,4,5,6,7,8,9 فان عدد الاعداد المكون رمزها من **اربعة** ارقام **مختلفة** من بين هذه الارقام هو :

$$P_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!} = 9.8.7.6 = 3024$$ الجواب الصحيح رقم4

5- يراد تشكيل لجنة من ستة اعضاء من بين 5 طلاب و8 مدرسين فبكم طريقة يمكن ان تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين فقط؟(2013 دور اول)

$$C_2^8\ .\ C_4^5 = \frac{8!}{2!\ .\ (8-2)!}\ .\ 5 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}.7.\cancel{6}!}{\cancel{2}!\ .\ \cancel{6}!}\ .\ 5 = \frac{8.7}{2}\ .\ 5 = 4\ .\ 7\ .\ 5 = 140$$ طريقة

6- صندوق يحوي 4 كرات حمراء و 8 كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معا جد عدد طرق سحب:(2012 دور اول)

1) اثنتان حمراء وواحدة بيضاء.

2) على الاقل اثنتان حمراء.

ج/ بما ان الكرات تسحب معا اي الترتيب غير مهم بين البيضاء والحمراء

1) $$C_2^4\ .\ C_1^8 = \frac{4!}{2!\ .\ (4-2)!}\ .\ 8 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}.3.\cancel{2}!}{\cancel{2}!\ .\ \cancel{2}!}\ .\ 8 = 2.3.8 = 48$$

2)

- **اثنتان حمراء وواحدة بيضاء :** $C_2^4\ .\ C_1^8$
- **ثلاثة حمراء فقط بدون كرات بيضاء :** $C_3^4\ .\ C_0^8$

$$C_2^4\ .\ C_1^8 + C_3^4\ .\ C_0^8 = 6\ .\ 8 + 4\ .\ 1 = 48 + 4 = 52$$ طريقة

7- اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما هو 10 اسئلة وكان المطلوب حل 7 اسئلة منها على ان نختار 4 من الخمسة الاولى ، فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

ج/

$$C_4^5\ .\ C_3^5 = 5\ .\ \frac{5!}{3!\ .\ (5-3)!} = 5\ .\ \frac{5.4.3!}{3!\ .\ 2!} = 50$$ طريقة

3- مبرهنة ذات الحدين: تستخدم هذه المبرهنة في تحليل المعادلات التي تتكون من جمع او طرح حدين مرفوعين لاي قوة $(x \pm y)^n$ وقانونها هو:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \cdot x^{(n-i)} \cdot y^{(i)}$$

مثال 1/ جد مفكوك $(x+y)^2$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين:

$$(x+y)^2 = C_0^2 \cdot x^{(2-0)} \cdot y^{(0)} + C_1^2 \cdot x^{(2-1)} \cdot y^{(1)} + C_2^2 \cdot x^{(2-2)} \cdot y^{(2)}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\,x \cdot y + y^2$$

مثال 2/ جد مفكوك $(x-y)^2$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين:

$$\mathbf{(x-y)^2 = \left(x+(-y)\right)^2 = C_0^2 \cdot x^{(2-0)} \cdot (-y)^{(0)} + C_1^2 \cdot x^{(2-1)} \cdot (-y)^{(1)} + C_2^2 \cdot x^{(2-2)} \cdot (-y)^{(2)}}$$

$$\mathbf{(x-y)^2 = x^2 - 2\,x \cdot y + y^2}$$

ملاحظة / اذا كان داخل الاقواس جمع فكل حدود المفكوك موجبة اما اذا كان داخل الاقواس طرح فان اول حد موجب ويليه حد سالب وهكذا.

مثال 3/ جد مفكوك $(x+y)^4$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين:

$$(x+y)^4 = C_0^4 \cdot x^4 + C_1^4 \cdot x^3 \cdot y + C_2^4 \cdot x^2 \cdot y^2 + C_3^4 \cdot x \cdot y^3 + C_4^4 \cdot y^4$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4$$

مثال 4/ جد مفكوك $(x-y)^4$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين:

$$(x-y)^4 = C_0^4 \cdot x^4 - C_1^4 \cdot x^3 \cdot y + C_2^4 \cdot x^2 \cdot y^2 - C_3^4 \cdot x \cdot y^3 + C_4^4 \cdot y^4$$

$$(x-y)^4 = x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4$$

مثال 5/ جد مفكوك $(x-y)^3$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين

$$(x-y)^3 = C_0^3 \cdot x^3 - C_1^3 \cdot x^2 \cdot y + C_2^3 \cdot x \cdot y^2 - C_3^3 \cdot y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 - y^3$$

ملاحظات: من خلال الملاحظات التالية يمكننا ان نختصر العديد من الخطوات :

1- عدد حدود المفكوك يساوي $n+1$.
2- مجموع اسس x و y في كل حد يساوي n.
3- في اول حد يكون اس المتغير الاول x يساوي n ويتناقص تدريجيا في الحدود التالية ليصبح اسه صفر في اخر حد.
4- في اول حد يكون اس المتغير y يساوي صفر ويتزايد تدريجيا ليصبح اسه يساوي n في اخر حد.
5- اذا كان لدينا طرح فان الحدود الفردية دائما موجبة والحدود الزوجية دوما سالبة.
6- قيم التوافقيات حول الحدود الوسطية متساوية.
7- اول توافقية واخر توافقية = 1
8- قيمة توافقية الحد الثاني وما قبل الاخير = n

كما مبين:

اس x يساوي n واس y يساوي صفر

اس x ينقص واحد واس y يزداد واحد

اس x يساوي 0 واس y يساوي n

$$(x+y)^4 = C_0^4 \cdot x^4 + C_1^4 \cdot x^3 \cdot y + C_2^4 \cdot x^2 \cdot y^2 + C_3^4 \cdot x \cdot y^3 + C_4^4 \cdot y^4$$

مثال 6/ جد مفكوك $(x-y)^5$.

$$(x-y)^5 = C_0^5 \cdot x^5 - C_1^5 \cdot x^4 \cdot y + C_2^5 \cdot x^3 \cdot y^2 - C_3^5 \cdot x^2 \cdot y^3 + C_4^5 \cdot x \cdot y^4 - C_5^5 \cdot y^5$$

$$= x^5 - 5 \cdot x^4 \cdot y + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 - 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot x \cdot y^4 - y^5$$

مثال 7/ جد مفكوك $(3a+b)^4$.

$$(3a+b)^4 = C_0^4 \cdot (3a)^4 + C_1^4 \cdot (3a)^3 \cdot b + C_2^4 \cdot (3a)^2 \cdot b^2 + C_3^4 \cdot 3a \cdot b^3 + C_4^4 \cdot b^4$$

$$= 81\,a^4 + 4 \cdot 27\,a^3 \cdot b + 6 \cdot 9\,a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 3a \cdot b^3 + b^4$$

$$= 81\,a^4 + 108\,a^3 \cdot b + 54 \cdot a^2 \cdot b^2 + 12 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

مثال 8/ جد قيمة $(101)^3$

ج/ نقوم بتبسيط المقدار ليصبح:

$$(101)^3 = (100+1)^3 = C^3_0 \cdot 100^3 + C^3_1 \cdot 100^2 \cdot 1 + C^3_2 \cdot 100 \cdot 1^2 + C^3_3 \cdot 1^3$$

$$= 100^3 + 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 + 1 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301$$

مثال 9/ جد قيمة $(0.99)^5$

$$(0.99)^5 = \left(\frac{99}{100}\right)^5 = \frac{99^5}{100^5} = \frac{(100-1)^5}{100^5}$$

ايجاد مفكوك البسط:

$$(100-1)^5 = 100^5 - 5.100^4 + 10.100^3 - 10.100^2 + 5.100 - 1 = 9509900499$$

$$\therefore (0.99)^5 = \frac{9509900499}{100^5} = 0.9509900499$$

قانون الحد العام: وهو قانون يستخدم لايجاد حد معين في المفكوك واذا فرضنا ان تسلسل الحد هو r فيرمز لذلك الحد بالرمز P_r ومعادلته هي:

$$P_r = C^n_{r-1} \cdot x^{(n-r+1)} \cdot y^{(r-1)}$$

حيث r تمثل تسلسل الحد المطلوب في المفكوك وn تمثل اس المفكوك(اول حد تسلسله 1 واخر حد تسلسله n+1)

مثال 10/ جد الحد الثالث في مفكوك $(x+2)^5$

$$P_3 = C^5_{3-1} \cdot x^{(5-3+1)} \cdot 2^{(3-1)} = C^5_2 \cdot x^3 \cdot 2^2 = 10 \cdot x^3 \cdot 4 = 40\, x^3$$

مثال 11/ جد الحد الثاني في مفكوك $(a-3)^4$

$$P_2 = C^4_{2-1} \cdot a^{(4-2+1)} \cdot (-3)^{(2-1)}\ C^4_1 \cdot a^3 \cdot (-3)^1 = 4 \cdot a^3 \cdot (-3) = -12\, a^3$$

مثال 12/ جد الحد الخامس في مفكوك $(2-x)^8$

$$P_5 = C^8_{5-1} \cdot 2^{(8-5+1)} \cdot (-x)^{(5-1)} = C^8_4 \cdot 2^4 \cdot (-x)^4 = \frac{8.7.6.5.4!}{4.3.2!\ .\ 4!} \cdot 16 \cdot x^4$$

$$= 70 \cdot 16 \cdot x^4 = 1120\, x^4$$

مثال 13/ جد الحد الاوسط في مفكوك $(x+3)^6$

ج / بما ان عدد حدود المفكوك يساوي n+1 اي 7 فان الحد الاوسط هو الحد الرابع :

$$P_4 = C^6_{4-1} \cdot x^{(6-4+1)} \cdot (3)^{(4-1)} = C^6_3 \cdot x^3 \cdot 27 = 20 \cdot 27 \cdot x^3 = 540\, x^3$$

ملاحظة/ اذا كان n عدد زوجي فان تسلسل الحد الاوسط هو $\frac{n+1}{2}$

مثال 14/ جد الحد الاوسط في مفكوك $(x-3)^6$

ج / بما ان عدد حدود المفكوك يساوي n+1 اي 7 فان الحد الاوسط هو الحد الرابع :

$$P_4 = C^6_{4-1} \cdot x^{(6-4+1)} \cdot (-3)^{(4-1)} = C^6_3 \cdot x^3 \cdot (-27) = -20 \cdot 27 \cdot x^3 = -540\, x^3$$

مثال 15/ جد الحد الاوسط في مفكوك $(x+3)^7$

ج / بما ان عدد حدود المفكوك يساوي n+1 اي 8 فان الحد الاوسط هو الحدين الرابع والخامس :

$$P_4 = C^7_{4-1} \cdot x^{(7-4+1)} \cdot (3)^{(4-1)} = C^7_3 \cdot x^4 \cdot (27) = \frac{7.6.5.4!}{3.2!\ .\ 4!} \cdot 27 \cdot x^4$$

$$= 35 \cdot 27 \cdot x^4 = 945\, x^4$$

$$P_5 = C^7_{5-1} \cdot x^{(7-5+1)} \cdot (3)^{(5-1)} = C^7_4 \cdot x^3 \cdot (81) = \frac{7!}{4!\ .\ 3!} \cdot 81 \cdot x^3 =$$

$$\frac{7.6.5.4!}{4!\ .\ 3!} \cdot 81 \cdot x^3 = 35 \cdot 81 \cdot x^3 = 2835x^3$$

مثال 16/ جد الحد الذي يحوي المتغير x^4 في مفكوك $(x+3)^6$

ج / نفرض ان تسلسل الحد المطلوب تسلسله = r ونكتب المعادلة كما مبين:

$$P_r = C^6_{r-1} \cdot x^{(6-r+1)} \cdot (3)^{(r-1)}$$

بما ان المطلوب هو المتغير x^4 فان :

$x^{(6-r+1)} = x^4$

$6 - r + 1 = 4$ اذا تساوت كميتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$\therefore\ r = 6 + 1 - 4 = 3$

اذا الحد الذي يحوي المتغير x^4 هو الحد الثالث ونقوم الان بايجاد هذا الحد كما مبين:

$$P_3 = C^6_{3-1} \cdot x^{(6-3+1)} \cdot (3)^{(3-1)} = C^6_2 \cdot x^4 \cdot (3)^{2)} = 15 \cdot x^4 \cdot 9 = 135\, x^4$$

مثال 17/ جد الحد الذي يحوي a^8 في مفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله. **(وزاري 2012 دور ثالث)**

ج /

$$P_r = C^8_{r-1} \cdot 3^{(8-r+1)} \cdot (a^2)^{(r-1)}$$

بما ان المطلوب هو المتغير a^8 فان :

$(a^2)^{(r-1)} = a^8 \Longrightarrow (a)^{2(r-1)} = a^8$

$2(r-1) = 8$ اذا تساوت كميتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$r - 1 = 4 \Longrightarrow \therefore r = 5$

اذا الحد الذي يحوي المتغير a^8 هو الحد الخامس ومعامله هو $C^8_{r-1} \cdot 3^{(8-r+1)}$

$$C^8_{5-1} \cdot 3^{(8-5+1)} = C^8_4 \cdot 3^4 = \frac{8.7.6.5.4!}{4.3.2!\ .\ 4!} \cdot 81 = 70 \cdot 81 = 5670$$ معامل الحد الخامس

مثال 18/ جد الحد الخالي من x في مفكوك $(x^2 - \frac{1}{x})^{15}$. **(وزاري 2013 دور ثاني)**

ج /

$$P_r = C^{15}_{r-1} \cdot (x^2)^{(15-r+1)} \cdot (-\frac{1}{x})^{(r-1)} = C^{15}_{r-1} (x)^{2(16-r)} \cdot (-1)^{(r-1)} (x)^{-(r-1)}$$

$$= C^{15}_{r-1} \cdot x^{(32-2r)-(r-1)} \cdot (-1)^{(r-1)} = C^{15}_{r-1} \cdot x^{(33-3r)} \cdot (-1)^{(r-1)}$$

بما ان المطلوب هو الحد الخالي من x فان اس x يساوي صفر اي ان:

$x^{(33-3r)} = x^0$

$33 - 3r = 0$ اذا تساوت قيمتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$\therefore\ r = 11$

اذا الحد الخالي من x هو الحد الحادي عشر

$$\mathbf{P_{11} = C^{15}_{11-1} \cdot (x^2)^{(15-11+1)}} \cdot (-\frac{1}{x})^{(11-1)} = C^{15}_{10} \cdot (x^2)^5 \cdot (-\frac{1}{x})^{10}$$

$$P_{11} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!\ .\ 5.4.3.2} \cdot x^{10} \cdot (\frac{1}{x^{10}}) = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2} = 3003$$ معامل الحد الحادي عشر

مثال 19/ جد الحد الاوسط في مفكوك $(x-3)^8$ **(وزاري 2011 دور اول)**

ج/ الحد الاوسط هو الخامس

$$P_5 = C^8_4 \cdot x^4 \cdot (-3)^4 = \frac{8.7.6.5.4!}{4.3.2!\ .\ 4!} .81.\ x^4 = 70.\ 81.\ x^4 = 5670\, x^4$$

مثال 20/ بسط المقدار $(2+a)^4 + (2-a)^4$ الى ابسط صورة ثم جد قيمة المقدار عندما $a = \sqrt{3}$.

ج/ بما ان المقدار مكون من حاصل جمع قوسين مترافقين a + 2 و a - 2 مرفوعين لنفس الاس ويختلفان بالاشارة فان حدود كل قوس تساوي حدود القوس الاخر ولكن تختلف الاشارات كما مبين:

$(2+a)^4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

$(2-a)^4 = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + P_5$

بالجمع: $(2+a)^4 + (2-a)^4 = 2P_1 + 2P_3 + 2P_5$

$= 2(P_1 + P_3 + P_5)$

الان نقوم بايجاد قيمة الحدود الاول والثالث والخامس فقط من المقدار $(2+a)^4$ كما مبين:

$P_1 = C^4_{1-1} . 2^{(4-1+1)} . a^{(1-1)} = C^4_0 . 2^4 . a^0 = 16$

$P_3 = C^4_{3-1} . 2^{(4-3+1)} . a^{(3-1)} = C^4_2 . 2^2 . a^2 = 24\,a^2$

$P_5 = C^4_{5-1} . 2^{(4-5+1)} . a^{(5-1)} = C^4_4 . 2^0 . a^4 = a^4$

$\therefore\ (2+a)^4 + (2-a)^4 = 2(16 + 24\,a^2 + a^4)$

عندما $a = \sqrt{3}$ فان قيمة المقدار تساوي:

$2(16 + 24\,(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^4) = 2(16 + 24 . 3 + 9) = 2(97) = 194$

ملاحظة/ ناتج الجمع هو ضعف مجموع الحدود الفردية وناتج الطرح هو ضعف مجموع الحدود الزوجية(الجمع فردي والطرح زوجي).

مثال 21/ بسط المقدار $(a + \frac{1}{a})^5 - (a - \frac{1}{a})^5$ الى ابسط صورة.

ج/ ناتج الطرح هو ضعف مجموع الحدود الزوجية:

$(a + \frac{1}{a})^5 - (a - \frac{1}{a})^5 = 2(P_2+P_4+P_6)$

$P_2 = C^5_{2-1} . a^{(5-2+1)} . (\frac{1}{a})^{(2-1)} = C^5_1 . a^4 . a^{-1} = 5\,a^3$

$P_4 = C^5_{4-1} . a^{(5-4+1)} . (\frac{1}{a})^{(4-1)} = C^5_3 . a^2 . a^{-3} = 10\,a^{-1} = \frac{10}{a}$

$P_6 = C^5_{6-1} . a^{(5-6+1)} . (\frac{1}{a})^{(6-1)} = C^5_5 . a^{-5} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

$(a + \frac{1}{a})^5 - (a - \frac{1}{a})^5 = 2\,(5\,a^3 + \frac{10}{a} + \frac{1}{a^5})$

حلول تمارين 4 – 1

1- جد مفكوك كل مما يأتي:

a) $(3a - b)^4$

$= C^4_0 . (3a)^4 - C^4_1 . (3a)^3 . b + C^4_2 . (3a)^2 . b^2 - C^4_3 . (3a) . b^3 + C^4_4 . b^4$

$= 1 . 81a^4 - 4 . 27\,a^3 . b + 6 . 9a^2 . b^2 - 4 . 3a . b^3 + 1 . b^4$

$= 81a^4 - 108\,a^3 . b + 54\,a^2 . b^2 - 12a . b^3 + b^4$

b) $(3x^2 + 2y)^3 = C^3_0 . (3x^2)^3 + C^3_1 . (3x^2)^2 . 2y + C^3_2 . (3x^2) . (2y)^2 + C^3_3 . (2y)^3$

$= 27\,x^6 + 3 . 9x^4 . 2y + 3 . 3x^2 . 4y^2 + 8y^3 = \mathbf{27\,x^6 + 54x^4 . y + 36x^2 . y^2 + 8y^3}$

c) $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$

$= C^6_0 . (2x)^6 - C^6_1 . (2x)^5 . (\frac{1}{2x}) + C^6_2 . (2x)^4 . (\frac{1}{2x})^2 - C^6_3 . (2x)^3 . (\frac{1}{2x})^3 +$
$C^6_4 . (2x)^2 . (\frac{1}{2x})^4 - C^6_5 . 2x . (\frac{1}{2x})^5 + C^6_6 . (\frac{1}{2x})^6$

$= 64x^6 - 6 . 32x^5 . (\frac{1}{2x}) + 15 . 16x^4 . \frac{1}{4x^2} - 20 . 8x^3 . \frac{1}{8x^3} + 15 . 4x^2 . \frac{1}{16x^4} -$
$6 . \cancel{2x} . \frac{1}{\cancel{32x^5}} + \frac{1}{64x^6}$

$16x^4$

$= 64x^6 - 96\,x^4 + 60\,x^2 - 20 + \frac{15}{4x^2} - \frac{6}{16x^4} + \frac{1}{64x^6}$

2- جد الحد الثالث في مفكوك $(x - 3y^2)^7$. (تمهيدي 2013)

ج/

$P_3 = C^7_2 . x^5 . (-3y^2)^2 = 21 . x^5 . 9y^4 = 189 . x^5 . y^4$

3- جد الحد السادس في مفكوك $(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})^8$

ج/

$$P_6 = C_5^8 \cdot (\frac{x^2}{2})^3 \cdot (-\frac{x}{3})^5 = 56 \cdot \frac{x^6}{8} \cdot \frac{-x^5}{243} = \frac{-7}{243} \cdot x^{11}$$

4- جد الحد الاوسط في مفكوك $(a - \frac{2}{a})^{12}$. (وزاري 2012 دور اول)

ج/ عدد حدود المفكوك يساوي 13 اي ان الحد الاوسط هو الحد السابع:

$$P_7 = C_6^{12} \cdot a^6 \cdot (-\frac{2}{a})^6 = \frac{12.11.10.9.8.7.6!}{6.5.4.3.2\ .6!} \cdot a^6 \cdot \frac{64}{a^6} = 11.2.3.2.7\ .\ 64 = 59136$$

5- جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(2a - 1)^7$

ج/ عدد حدود المفكوك يساوي ثمانية اي ان الحد الاوسط الاول 4 والثاني 5 :

$$P_4 = C_3^7 \cdot (2a)^4 \cdot (-1)^3 = 35 \cdot 16\, a^4 \cdot (-1) = -560 \cdot a^4$$

$$P_5 = C_4^7 \cdot (2a)^3 \cdot (-1)^4 = 35 \cdot 8\, a^3 \cdot (+1) = 280 \cdot a^3$$

6- جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1 + x^2)^6$ ثم جد معامله.

(وزاري 2012 دور ثاني)

ج/

$$P_r = C_{r-1}^6 \cdot 1^{(6-r+1)} \cdot (x^2)^{(r-1)} = C_{r-1}^6 \cdot 1^{(6-r+1)} \cdot (x)^{2(r-1)}$$

$$(x)^{2(r-1)} = x^4$$

اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس.

$$2(r-1) = 4 \implies r - 1 = 2 \implies \therefore r = 3$$

ايجاد المعامل:

$$P_3 = C_2^6 \cdot 1^4 \cdot x^4 = 15\, x^4$$

7- جد معامل x^2 في مفكوك $(x^3 + \frac{2}{x^2})^9$. (وزاري 2013 دور اول)

ج/

$$P_r = C_{r-1}^9 \cdot (x^3)^{(9-r+1)} \cdot (\frac{2}{x^2})^{(r-1)} = C_{r-1}^9 \cdot (x)^{3(10-r)} \cdot \frac{2^{(r-1)}}{x^{2(r-1)}}$$

$$= C_{r-1}^9 \cdot (x)^{(30-3r)} \cdot (2)^{(r-1)} \cdot x^{(2-2r)}$$

$$= C_{r-1}^9 \cdot (x)^{(30-3r)+(2-2r)} \cdot 2^{(r-1)}$$

بما ان الحد المطلوب هو الذي يحوي x^2

$$(x)^{(30-3r)+(2-2r)} = x^2$$

اذا تساوت قيمتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$$(30 - 3r) + (2 - 2r) = 2$$

$$32 - 5r = 2 \implies 5r = 30 \implies \therefore r = 6$$

ايجاد المعامل:

$$P_6 = C_5^9 \cdot (x^3)^4 \cdot (\frac{2}{x^2})^5 = \frac{9.8.7.6.5!}{5!\ .\ 4.3.2} \cdot x^{12} \cdot \frac{32}{x^{10}} = 3.7.6\ .x^2 \cdot (32) = 4032\ .x^2$$

المعامل = 4032

8- جد الحد الخالي من x في مفكوك $(x^2 + \frac{2}{x^3})^{10}$

ج/

$$P_r = C^{10}_{r-1} . (x^2)^{(10-r+1)} . (\frac{2}{x^3})^{(r-1)} = C^{10}_{r-1} . (x)^{2(11-r)} . \frac{2^{(r-1)}}{x^{3(r-1)}}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1} . (x)^{2(11-r)} . x^{-3(r-1)} . (2)^{(r-1)} = C^{10}_{r-1} . (x)^{(22-2r)} . x^{(3-3r)} . (2)^{(r-1)}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1} . (x)^{(22-2r)+(3-3r)} . (2)^{(r-1)}$$

$(x)^{(22-2r)+(3-3r)} = x^0$　　　الحد المطلوب هو الحد الخالي من x اي x^0

$(22 - 2r) + (3 - 3r) = 0$　　　اذا تساوت قيمتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$25 - 5r = 0 \Longrightarrow 5r = 25 \Longrightarrow \therefore r = 5$

$$P_5 = C^{10}_{5-1} . (x)^{2(11-5)} . \frac{2^{(5-1)}}{x^{3(5-1)}} = C^{10}_{4} . (x)^{12} . \frac{2^4}{x^{12}} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2 \; . \; 6!} . 16$$

$= 10.3.7 . 16 = 3360$

9- جد قيمة $(99)^4$ باستخدام مبرهنة ذي الحدين.

ج/

$(99)^4 = (100 - 1)^4$

$= C^4_0 . 100^4 + C^4_1 . 100^3 . (-1) + C^4_2 . 100^2 . (-1)^2 + C^4_3 . 100 . (-1)^3 + C^4_4 . (-1)^4$

$= 100^4 - 4 . 100^3 + 6 . 100^2 - 4 . 100 + 1 = 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1$

$\therefore (99)^4 = 96059601$

10- جد قيمة $(102)^4 - (98)^4$

ج/

$(102)^4 - (98)^4 = (100+2)^4 - (100-2)^4$

$(100+2)^4 - (100-2)^4 = 2P_4 + 2P_2$　　　ناتج الطرح هو ضعف مجموع الحدود الزوجية

$P_2 = C^4_1 . 100^3 . 2 = 4 . 100^3 . 2 = 8000000$

$P_4 = C^4_3 . 100 . 2^3 = 4 . 100 . 8 = 3200$

$(102)^4 - (98)^4 = 2(8000000+3200) = 2(8003200) = 16006400$

11- جد قيمة $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7$

ج/ ناتج الجمع هو ضعف الحدود الفردية

$(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7 = 2(P_1+P_3+P_5+P_7)$

$P_1 = C^7_0 . 2^7 . (\sqrt{3})^0 = 128$

$P_3 = C^7_2 . 2^5 . (\sqrt{3})^2 = 21 . 32 . 3 = 2016$

$P_5 = C^7_4 . 2^3 . (\sqrt{3})^4 = \frac{7.6.5.4!}{4! \; . \; 3.2} . 8 . 9 = 35 . 72 = 2520$

$P_7 = C^7_6 . 2 . (\sqrt{3})^6 = 7.2.27 = 378$

$(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7 = 2(128 + 2016 + 2520 + 378) = 10084$

ملزمة الرياضيات
السادس الادبي
2016 - 2015

الفصل الثاني
الغايات والاستمرارية

رحلة التفوق
في
السادس

الأستاذ: أحمد الشمري
07704516937

المرسل للخدمات الطباعية
المنصور – مجاور جامع حي دراغ
07703458937

رحلة التفوق في السادس

تابعونا على مواقع التواصل

رحلة التفوق
في
السادس

الفصل الثاني(الغايات والاستمرارية):

(الغاية): الغاية تعبير رياضي يمثل قيمة ناتج الدالة f(x) عندما يقترب متغيرها المستقل x من مقدار معين a وتكتب بالصيغة التالية:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

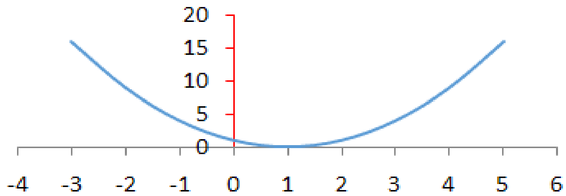
وتقرأ غاية f(x) عندما x تقترب من a

وحدانية الغاية : لا يوجد اكثر من ناتج واحد لقيمة الغاية عند عدد معين

مثال 1/ جد غاية الدالة $x^2 - 2x + 1$ عندما x يقترب من 1.

ج/ نعوض قيمة x بواحد كما مبين:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1) = 1 - 2 + 1 = 0$$



اي ان غاية الدالة عندما x تقترب من 1 تساوي صفر وهي قيمة وحيدة اي لا يوجد قيمة اخرى للغاية عندما $x \to 1$ كما مبين:

القيم الغير معرفة:

1 – القسمة على صفر مثل $\frac{x}{0}$ و $\frac{0}{0}$.

2 – الجذر الزوجي لقيمة سالبة $\sqrt[4]{-5}$.

مثال 2/ جد غاية الدالة $\frac{1}{x^2+1}$ عندما x تقترب من -1 .

الحل/ بما ان الدالة تحوي عملية قسمة على المتغير x فاننا نحتاج الى عمل فحص للدالة عندما x تقترب من -1

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

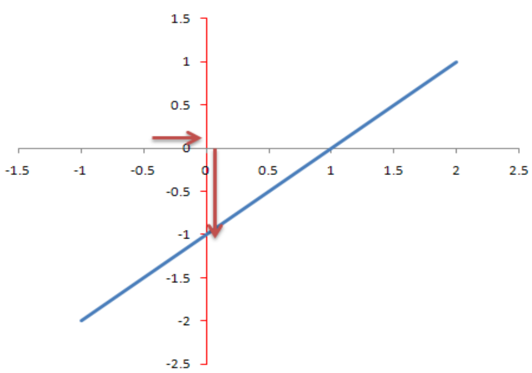
بما ان الناتج عدد حقيقي اذا نقول ان غاية الدالة عندما x تقترب من -1 موجودة وتساوي $\frac{1}{2}$.

مثال 3/ جد غاية الدالة $\frac{x^2-x}{x}$ عندما x تقترب من 0.

الحل/ عندما x تساوي صفر فان المقام يساوي صفر وهذا عدد غير معرف لذلك ننتقل الى التبسيط كما مبين :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$$

اذا للدالة غاية عندما $x \to 0$ وتساوي -1 كما مبين:



مثال 4/ جد قيمة $\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x + 3)$. **(وزاري 2012 دور اول)**

الحل/

$$\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x + 3) = (-2)^3 + 2 . (-2) + 3 = -8 - 4 + 3 = -9$$

مثال 5/ جد غاية الدالة $\frac{x-1}{x^2-1}$ عندما x تقترب من 1.

الحل/ بما ان الدالة تحوي عملية قسمة على المتغير x فاننا نحتاج الى عمل فحص للدالة عندما x تقترب من 1

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$$

بما ان الناتج يحوي قسمة على صفر وهذا المقدار لا يمثل عدد حقيقي فاننا ننتقل الى تحليل الدالة:

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

مثال 6/ جد غاية الدالة $\frac{x^2-4}{x-2}$ عندما x تقترب من 2.

الحل/ بما ان المقام يساوي صفر عندما x تساوي 2 ننتقل الى التحليل:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4$$

ملاحظة/ غاية القيمة الثابتة عند اي قيمة تقترب منها x تساوي القيمة الثابتة:

$$\lim_{x\to a}c=c \qquad a\,,c\in R$$
$$\lim_{x\to0}5=5$$
$$\lim_{x\to2}1=1$$

مثال 7/ جد قيمة $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$: (تمهيدي 2013)

الحل/ بما ان المقام يساوي صفر عندما x تساوي 2 ننتقل الى التحليل:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}=\lim_{x\to2}\frac{(\cancel{x-2})(x^2+2x+4)}{(\cancel{x-2})(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{4}=3$$

مثال 8/ جد قيمة $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$:

الحل/ بما ان المقام يساوي صفر عندما x تساوي 0 ننتقل الى التحليل:

نضرب بمرافق البسط:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)-2}{x.(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}.(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال 9/ جد قيمة $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$: (وزاري 2013 دور ثاني 2012 دور ثالث)

الحل/ بما ان المقام يساوي صفر عندما x تساوي 3 ننتقل الى التحليل:

نضرب بمرافق البسط:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)-4}{(x-3).(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3}).(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

مثال 10/ جد قيمة $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}$. (وزاري 2011 دور اول)

الحل/ نحلل البسط فرق بين مكعبين

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+5)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x+9}{x+5}=\frac{9+9+9}{3+5}=\frac{27}{8}$$

مثال 11 / جد قيمة $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. (2005)

الحل/ نحلل البسط فرق بين مربعين:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to1}\sqrt{x}+1=1+1=2$$

مثال 12/ اذا كانت $\lim_{x\to1}x^2-2x+a$ تساوي 4 جد قيمة a.

الحل/

$$\lim_{x\to1}\ x^2-2x+a=4$$

$1-2+a=4 \Longrightarrow -1+a=4 \Longrightarrow a=5$

مثال 13/ اذا كانت $\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}$ تساوي 1 جد قيمة a ومن ثم جد غاية الدالة عندما x تقترب من 2.

الحل/

$$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{x+1}=1$$

$$\frac{a}{(1+1)}=1 \Longrightarrow a=2$$

غاية الدالة عندما x يقترب من 2 هي:

$$\lim_{x\to2}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

مثال 14/ اذا كانت $f(x)=\frac{ax^2+bx}{x}$ وكانت $\lim_{x\to0}f(x)=4$ و $\lim_{x\to1}f(x)=5$ جد قيمتي a و b الحقيقيتين.

الحل/

$$\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}=4 \Longrightarrow \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(ax+b)}{\cancel{x}}=4 \Longrightarrow \lim_{x\to0}(ax+b)=4$$

$a(0)+b=4 \Longrightarrow \therefore\ b=4$

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2+bx}{x}=5 \Longrightarrow \lim_{x\to1}(ax+b)=5 \Longrightarrow a(1)+b=5 \Longrightarrow a+4=5$$

$\therefore\ a=1$

مثال 15/ اذا كانت $\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=2a+3$ جد قيمة a. (وزاري 2013 دور اول)

الحل/

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=\frac{1+3-1}{1+2}=1$$

$2a+3=1 \Longrightarrow 2a=1-3=-2 \Longrightarrow a=\frac{-2}{2}=-1$

مثال 16/ اذا كانت $f(x) = 6x^2 + ax + b$ وكانت $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 6$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 29$ جد قيمة a و b.

الحل/(تمهيدي 2005)

$$\lim_{x\to 1} \; 6x^2 + ax + b \; = 6 \quad \Longrightarrow \quad 6 + a + b = 6 \quad \Longrightarrow \quad b + a = 0 \;......\; u$$

$$\lim_{x\to 2} (6x^2 + ax + b) \; = 29 \quad \Longrightarrow \quad 24 + 2a + b = 29 \quad \Longrightarrow \quad 2a + b = 5 \;......\; v$$

نطرح معادلة u من v

$$\begin{aligned} 2a + b &= 5 \\ a \;\; + b &= 0 \\ \hline a &= 5 \end{aligned}$$

بالطرح

نعوض قيمة a في المعادلة u :

$$b + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad b + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -5$$

الدوال المركبة: وهي الدوال التي تتكون من عدة اقسام كل منها يملك مجال مستقل عن باقي مجالات الدوال الاخرى:

مثال 17/ جد غاية الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ عندما x تقترب من 3 ، 0 ، 1 - .

1- عندما x يقترب من 3 نستخدم الدالة الثانية: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$

2- عندما x تقترب من 0 نستخدم الدالة الاولى: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

3- عندما x تقترب من 1- نستخدم الدالة الاولى: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1$

غاية اليمين وغاية اليسار: اذا كان لدينا دالة مركبة من دالتين فان غاية الدالة عند نقطة الالتقاء الافتراضية تكون موجودة اذا كانت غاية الدالتين عند نقطة الالتقاء الافتراضية متساويتين وفي المثال السابق فان غاية الدالة x تسمى غاية اليمين وغاية الدالة x^2 تسمى غاية اليسار ونقطة الالتقاء الافتراضية هي 0 :

غاية اليمين $L_1 = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

غاية اليسار $L_2 = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 = L_1$

بما ان $L_2 = L_1$ فان غاية الدالة عندما x تقترب من الصفر تساوي صفر اي ان الغاية موجودة.

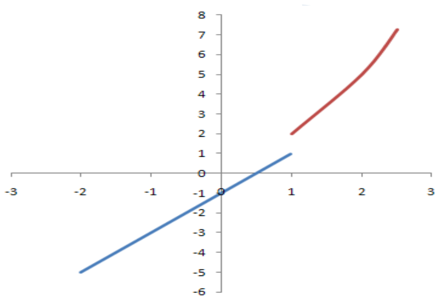
مثال 2/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \ge 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما x يقترب من 1.

الحل/ نقطة الالتقاء الافتراضية عند 1 لذا نحسب دالة اليمين ودالة اليسار.

$$L_1 = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1^-} (2x - 1) = 2 - 1 = 1 \ne L_1$$

ان الدالة لا تملك غاية عندما x يقترب من 1



مثال 3/ هل للدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \ge 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ غاية عندما $x \to 1$:

الحل/

$$L_1 = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 = L_1$$

الدالة تملك غاية عندما $x \to 1$

مثال 4/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 2x + a & x \leq 1 \end{cases}$ وان $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة جد قيمة a حيث $a \in R$.

الحل/ بما ان الغاية موجودة عندما $x = 1$ فان غاية اليمين تساوي غاية اليسار اي ان:

$$\lim_{x\to1^+} (x^2 + 2) = \lim_{x\to1^-} (2x + a)$$

$$1^2 + 2 = 2 \cdot 1 + a \Longrightarrow 3 = 2 + a \Longrightarrow a = 3 - 2 = 1$$

مثال 5/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x > 1 \\ b - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة وان $\lim_{x\to-1} f(x) = 5$ جد قيمتي a و$b \in R$.

الحل/

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} (b - 2x) = 5$$

نعوض قيمة $x = -1$ كون الدالة لا تحوي قسمة او جذر لـ x

$$(b - 2 \cdot (-1)) = 5 \Longrightarrow b + 2 = 5 \Longrightarrow b = 3$$

$$\lim_{x\to1^+} (x^2 + a) = \lim_{x\to1^-} (3 - 2x) \Longrightarrow 1 + a = 3 - 2 \Longrightarrow a = 1 - 1 = 0$$

مثال 6/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 6 - x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما x يقترب من 1. (تمهيدي 2005)

الحل/

$$L_1 = \lim_{x\to1^+} (6 - x) = 6 - 1 = 5$$

$$L_2 = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1 \neq L_1$$

للدالة غاية عندما x يقترب من 1

مثال 7/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 3 \\ x^2 - 8 & x \geq 3 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما x يقترب من 0 ، 3 ، 5.

الحل/

- عندما x يقترب من 0:

$\lim_{x\to0} (x - 2) = -2$ يوجد غاية للدالة

- عندما x يقترب من 3:

$$L_1 = \lim_{x\to3^+} (x^2 - 8) = 9 - 8 = 1$$

$$L_2 = \lim_{x\to3^-} (x - 2) = 3 - 2 = 1 = L_1$$

للدالة غاية عندما x يقترب من 3

- عندما x يقترب من 5:

$$\lim_{x\to5} (x^2 - 8) = 25 - 8 = 17$$

مثال 8/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما x يقترب من 2 ثم جد غاية الدالة عند $x \to -1$ و عند $x \to 4$.

الحل/ أ-

$$L_1 = \lim_{x\to2^+} (1 - x) = 1 - 2 = -1$$

$$L_2 = \lim_{x\to2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \neq L_1$$

∴ليس للدالة غاية

ب- الغاية عندما $x \to -1$: $\lim_{x\to-1} (1 - x) = 1 + 1 = 2$

ج- الغاية عندما $x \to 4$: $\lim_{x\to4} (x + 1) = 4 + 1 = 5$

حلول تمارين 1 – 2

1 – جد قيمة كل مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x+3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+1}{x+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}\ \lim\limits_{x\to -2}\frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{(x-3)} = \frac{-2}{(-2-3)} = \frac{2}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1)(x^2+1)$

$=(1+1)(1+1) = 4$ (وزاري 2013 دور اول)

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}$ **(وزاري 2011 دور اول)**

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+5)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+5)} = \frac{9+9+9}{3+5} = \frac{27}{8}$

6) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2}) = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\,(x^2+7x-8)}{3(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(x+8)}{3\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x+8)}{3(x+1)}$

$= \frac{1(1+8)}{3(1+1)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{(x-2)\cancel{(x+2)}(x^2+4)}$

$= \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{4+4+4}{-4(4+4)} = -\frac{12}{32} = -\frac{3}{8}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$ **(وزاري 2012 دور ثاني)**

$= \lim\limits_{x\to 1}[(\sqrt{x}+1)(x+1)] = 2\ .\ 2 = 4$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3} = \frac{1-9}{\sqrt{3}-3} = \frac{-8}{\sqrt{3}-3}$

في الكتاب طلب عندما x تقترب من 1 وهذا لا يجعل المقام صفر ويمكننا التعويض مباشرة ولكن في مثل هذه الاسئلة غالبا ما يطلب عندما x تقترب من 3 عندها سيصبح المقام صفر ونذهب الى التحليل كما مبين:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{3}(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}(x+\sqrt{3})(x+3)}{\sqrt{3}\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}}$

نحلل $(x-3)$ فرق بين مربعين

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})(3+3)}{\sqrt{3}} = \frac{2\ .\ \sqrt{3}\ .\ 6}{\sqrt{3}} = 12$

11) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{\sqrt{x+10}-3}$

نضرب بمرافق المقام:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{\sqrt{x+10}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+10}+3}{\sqrt{x+10}+3} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(x+10-9)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x(\sqrt{x+10}+3))$$

$= -1\,(\sqrt{9}+3) = -1(3+3) = -6$

2 – اذا كان $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$ جد قيمة a حيث $a \in R$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4 \implies \frac{16-8+6}{4+3} = 3a-4$$

$$\frac{14}{7} = 3a-4 \implies 2 = 3a-4 \implies 3a = 2+4 \implies a = \frac{6}{3} = 2$$

3 - اذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 8$ جد قيمة a حــــيث $a \in R$. **(وزاري 2011 دور اول)**

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 8 = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 8$$

$$\lim_{x\to a}(x+a) = 8 \implies a+a = 8 \implies 2a = 8 \implies a = 4$$

4 – اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx$ وكانت $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to -2} f(x) = 8$ جد قيمتي a و b الحقيقيتين.

(وزاري 2013 دور ثاني)

$$\lim_{x\to 1}(ax^2 + bx) = a + b = 5$$

$a + b = 5$ 1

$$\lim_{x\to -2}(ax^2 + bx) = 4a - 2b = 8$$

$4a - 2b = 8$ 2

نضرب المعادلة 1 بـ 2 ونجمع مع المعادلة 2:

$2a + 2b = 10$

$4a - 2b = 8$

$6a = 18$ بالجمع

$\therefore a = \frac{18}{6} = 3$

نعوض قيمة a في المعادلة 2 :

$4(3) - 2b = 8 \implies 12 - 2b = 8$

$2b = 12 - 8 \implies b = \frac{4}{2} \implies b = 2$

-5 لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x > 2 \\ 2 - 2x & x \le 2 \end{cases}$ هل للدالة f غاية عند 2 ؟ بين ذلك.ثم جد $\lim_{x\to 1} f(x)$.

a)

$L_1 = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 3) = 4 - 3 = 1$

$L_2 = \lim_{x\to 2^-} (2 - 2x) = 2 - 6 = -4 \neq L_1$ اذا ليس للدالة غاية عند 2

b)

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (2 - 2x) = 2 - 2\,.1 = 0$

6 - لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما $x \to 2$ ؟ بين ذلك.

الحل/

$L_1 = \lim\limits_{x\to2^+} (x^2+1) = 4 + 1 = 5$

$L_2 = \lim\limits_{x\to2^-} (2-x) = 2 - 2 = 0 \neq L_1$ اذاً ليس للدالة غاية عند 2

-7 لتكن $f(x) = \begin{cases} a+2x & x \leq -1 \\ 3-x^2 & x > -1 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ موجودة ، جد قيمة a حيث $a \in R$.

(وزاري 2012 دور اول)

الحل/ بما ان الغاية موجودة عندما x تقترب من 1- اذا غاية اليمين تساوي غاية اليسار:

$L_1 = L_2$

$\lim\limits_{x\to-1^+} (3-x^2) = \lim\limits_{x\to-1^-} (a+2x)$

$3-(-1)^2 = a - 2 \implies 3 - 1 = a - 2 \implies a = 2 + 2 = 4$

-8 لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x+a & x \geq 3 \\ x^2-b & x < 3 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ موجودة وان $f(\sqrt{2}) = 5$، جد قيمة $a , b \in R$.

الحل/

$f(\sqrt{2}) = x^2 - b = 5 \implies (\sqrt{2})^2 - b = 5 \implies 2 - b = 5 \implies b = 2 - 5$

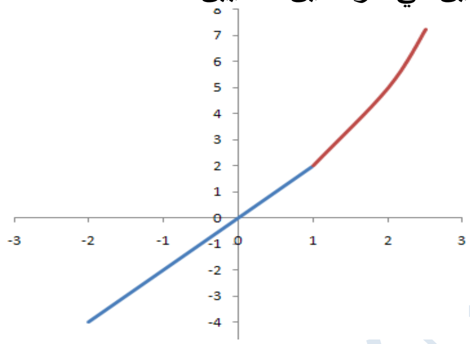
$b = -3$

بما ان $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ موجودة اذا غاية اليمين تساوي غاية اليسار.

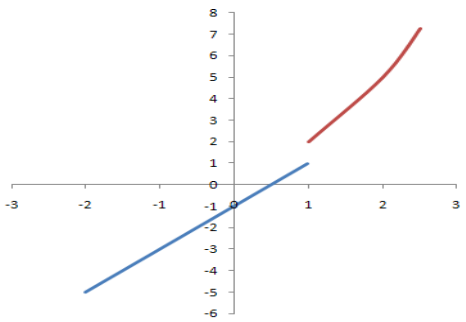
$\lim\limits_{x\to3^-} (x^2-b) = \lim\limits_{x\to3^+} (x^2+a) \implies 3^2 - (-3) = 9 + a$

$9 + 3 = 9 + a \implies a = 3$

2 - (الاستمرارية): تناولنا في الموضوع السابق الغايات وتعرفنا على الدوال المركبة وذكرنا ان في نقطة الالتقاء الافتراضية اذا كانت غاية اليمين تساوي غاية اليسار فان للدالة غاية عند هذه النقطة ولاحظنا ان هناك دوال تملك غاية واخرى لا تملك غاية وسنستفيد من هذه الموضوع الان حيث سنحدد هل ان الدالة مستمرة في نقطة معينة ام يوجد فراغ في المنحني كما مبين في الرسمين التاليين:



هذه الدالة مستمرة عندما x تساوي 1



هذه الدالة غير مستمرة عندما x تساوي 1

شروط الاستمرارية: اذا كانت f(x) دالة **وكان a ينتمي الى مجال الدالة** فاننا نقول ان الدالة مستمرة عند $x = a$ اذا تحققت الشروط الثلاث التالية:

1) $f(a)$ موجودة وحقيقية.
2) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وحقيقية.
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ اي ان غاية اليمين تساوي غاية اليسار
3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة/ اذا كانت الدالة لا تحوي قسمة او جذر للمتغير x فان مجال الدالة هو كل الاعداد الحقيقية.

مثال 1/ اذا كانت $f(x) = x^2+3$ هل ان f مستمرة عنـــد $x = 1$؟ **(وزاري 2012 دور ثالث)**

الحل/ مجال الدالة f هو R والواحد ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(1) = 1^2 + 3 = 4$
2) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2 + 3 = 4$
3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 4$

اذا f مستمرة عند $x=1$

مثال 2/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x<0 \\ x^2+1 & x\ge 0 \end{cases}$ هل f مستمرة عند $x = 0$. **(وزاري 2013 دور اول)**

الحل/ مجال الدالة f هو R والصفر ينتمي الى مجال الدالة.

ملاحظة/ بما ان الصفر ينتمي الى مجال الدالة $x \ge 0$ فاننا نطبق الشرط الاول على الدالة $x^2 + 1$:

1) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$
2) $L_1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2 + 1 = 1$ غاية اليمين:
$L_2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 . 0 + 3 = 3 \neq L_1$ غاية اليسار

اذا الدالة f غير مستمرة عند $x = 0$.

ملاحظة/ اذا لم يتحقق اي شرط فان الدالة غير مستمرة ولا داعي لاجراء باقي الشروط.

مثال 3/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 2-x & x<-1 \\ 2x^2+1 & x\ge -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة f عند $x = -1$.

الحل/ مجال الدالة f هو R و -1 ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$
2) $L_1 = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 2.(-1)^2 + 1 = 3$ غاية اليمين :
$L_2 = \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$ غاية اليسار :

$\because L_1 = L_2 = 3 \implies \therefore \lim_{x\to -1} f(x) = 3$

3) $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 3$

اذا الدالة f مستمرة عند $x = -1$.

مثال 4/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \ge -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$ (وزاري 2012 دور ثاني)

أ - ابحث استمرارية الدالة f عند $x = -1$.

ب - هل للدالة غاية عندما $x \to 4$ ؟ بين ذلك.

الحل/ أ – مجال الدالة f هو R والـ -1 ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(-1) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

2) $L_1 = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 3(-1) + 1 = -2$

$L_2 = \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = (-1)^2 = 1 \neq L_1$

اذا الدالة f غير مستمرة عند $x = -1$.

ب- الـ 4 تنتمي الى مجال الدالة $3x + 1$

1) $f(4) = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$

2) $\lim_{x\to 4} (3x+1) = 3(4) + 1 = 13$

3) $f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) = 13$

اذا يوجد للدالة غاية عندما x تقترب من 4

مثال 5/ ابحث استمرارية الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $x = 1$.

الحل/ اوسع مجال للدالة هو R عدى القيم التي تجعل المقام صفر:

$x + 1 = 0 \implies x = -1$

$\therefore$ مجال الدالة هو R عدى -1 وتكتب $R\backslash\{-1\}$ اذا 1 ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

اذا f مستمرة عند $x = 1$.

مثال 6/ ابحث استمرارية الدالة $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ عند $x = 1$.

الحل/ اوسع مجال للدالة هو R عدى القيم التي تجعل المقام صفر:

$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1$

مجال الدالة كل قيم R والـ 1 ينتمي الى مجال الدالة:

1) $f(1) = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

اذا f مستمرة عند $x = 1$.

مثال 7/ ابحث استمرارية الدالة $f(x) = |x + 2|$ عند $x = -2$.

الحل/ اوسع مجال للدالة هو R والـ -2 ينتمي الى مجال الدالة:

ملاحظة/ في الدوال التي تحوي قيم مطلقة نقوم بتجزئة الدالة الى قسمين الاول يحوي الدالة نفسها بدون علامة المطلق $(x + 2)$ والثاني يحوي الدالة مضروبة بـ -1 ونحسب مجالها حيث نساوي الدالة بالصفر ونحسب قيمة x:

$x + 2 = 0 \implies x = -2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -(x+2) & x < -2 \end{cases}$$

1) $f(-2) = -2 + 2 = 0$

2) $L_1 = \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -2 + 2 = 0$

$L_2 = \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -(-2+2) = 0 = L_1$

3) $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

اذا f مستمرة عند $x = -2$.

حلول التمارين 2-2

-1 لتكن $f(x) = x^3 + x^2 + 3$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$.

الحل/ مجال الدالة R

1) $f(3) = 3^3 + 3^2 + 3 = 27+9+3 = 39$

2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3^3 + 3^2 + 3 = 39$

3) $f(3) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 39$

اذا f مستمرة عند $x = 3$.

-2 لتكن $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ اثبت ان f مستمرة في مجالها.

الحل/

$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1$

∴ مجال الدالة كل قيم R واذا فرضنا ان a عدد حقيقي ينتمي الى R فان:

1) $f(a) = \frac{a^2}{a^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{a^2}{a^2+1}$

3) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{a^2}{a^2+1}$

اذا f مستمرة في مجالها .

-3 لتكن $f(x) = x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها.

الحل/ اوسع مجال للدالة هو R ولتكن a عدد حقيقي ينتمي الى R :

1) $f(a) = a^3$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^3$

3) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = a^3$

اذا f مستمرة في مجالها .

-4 لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x+1 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة f عند $x = -1$. (وزاري 2011 دور اول)

الحل/ مجال الدالة f هو R والعدد -1 ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

2) $L_1 = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

$L_2 = \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2 \neq L_1$

اذا الدالة f غير مستمرة عند $x = -1$.

-5 لتكن $f(x) = |x - 2|$ ابحث استمرارية الدالـــــة عنـــــد $x = 2$.

الحل/ مجال الدالة كل قيم R والـ 2 تنتمي الى مجال الدالة:

$x-2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = 2 - 2 = 0$

2) $L_1 = \lim_{x\to(2)^+} f(x) = 2 - 2 = 0$

$L_2 = \lim_{x\to(2)^-} f(x) = -(2-2) = 0 = L_1$

3) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 0$

اذا الدالة f مستمرة عند $x = 2$.

-6 لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \leq 2 \\ 1-x^2 & x > 2 \end{cases}$ اثبت ان f مستمرة عند $x = 2$. (وزاري 2012 دور اول)

الحل/ مجال الدالة f هو R والعدد 2 ينتمي الى مجال الدالة.

1) $f(2) = 1 - 2(2) = 1 - 4 = -3$

2) $L_1 = \lim_{x\to(2)^+} f(x) = 1 - (2)^2 = 1 - 4 = -3$

$L_2 = \lim_{x\to(2)^-} f(x) = 1 - 2(2) = -3 = L_1$

3) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = -3$

اذا الدالة f مستمرة عند $x = 2$.

-7 لتكن $f(x) = \begin{cases} ax+3 & x \geq 1 \\ 3x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ جد قيمة $a \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x = 1$.

الحل/ بما ان الدالة مستمرة عند $x = 1$ اذا غاية اليمين تساوي غاية اليسار:

$$\lim_{x\to(1)^+}(ax+3) = \lim_{x\to(1)^-}(3x^2+1)$$

$$a(1) + 3 = 3(1)^2 + 1$$

$$a + 3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad a = 4 - 3 = 1$$

-8 لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x+b & x \leq -1 \\ x^2+a & x > -1 \end{cases}$ جد قيمتي a و b الحقيقيتين اذا كانت f مستمرة عندما $x = -1$ وان $f(2) = 7$. (وزاري 2012 دور ثالث)

الحل/

$f(2) = 2^2 + a = 7 \quad \Longrightarrow \quad 4 + a = 7 \quad \Longrightarrow \quad a = 7 - 4 \quad \Longrightarrow \quad a = 3$

الدالة مستمرة عند $x = -1$ اذا غاية اليمين تساوي غاية اليسار.

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x^2+a) = \lim_{x\to(-1)^-}(2x+b)$$

$(-1)^2 + 3 = 2(-1) + b \quad \Longrightarrow \quad 1 + 3 = -2 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 1 + 3 + 2 \quad \Longrightarrow \quad b = 6$

ملزمة الرياضيات
السادس الادبي
2015 - 2016

الفصل الثالث
المشتقة

الأستاذ: أحمد الشمري
07704516937

المرسل للخدمات الطباعية
المنصور – مجاور جامع حي دراغ
07703458937

الفصل الثالث(الاشتقاق):

3- (المشتقة): تمثل المشتقة معادلة ميل المماس للدالة عند اي نقطة ويرمز لها $\frac{dy}{dx}$ او $f'(x)$ او y'

وقانونها هو:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

مثال 1/ اذا كان $f(x) = x^2$ جد $f'(2)$.

الحل/

القانون $$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

التطبيق $$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

نعوض $f(2+\Delta x)$ اي نستبدل كل رمز x بـ $2+\Delta x$ في الدالة f(x) وكذلك نعوض f(2) اي نستبدل كل رمز x في الدالة f(x) بـ 2 كما مبين:

التعويض $$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2-(2)^2}{\Delta x}$$

بما ان المقام يحوي Δx لا يمكننا تعويض قيمة صفر لذلك نلجأ الى التبسيط:

التبسيط $$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}$$

Δx عامل مشترك $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4+\Delta x) = 4+0 = 4$$

مثال 2/ باستخدام التعريف جد مشتقة الدالــة $f(x) = x^2+x+1$ عندما $x = 1$.

الحل/

القانون $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

التطبيق $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

التعويض $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+1-[1+1+1]}{\Delta x}$$

التبسيط $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+2\Delta x+\Delta x^2+1+\Delta x+1-3}{\Delta x}$$

Δx عامل مشترك $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} (3+\Delta x) = 3+0 = 3$$

مثال 3/ باستخدام التعريف جد مشتقة الدالــة $f(x) = \frac{1}{x}$.

الحل/

القانون $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$

التطبيق $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

نقوم بحساب قيمة ناتج البسط $f(x+\Delta x) - f(x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

التعويض $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}$

مشتقة الدالة $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\,\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\,(0)} = -\frac{1}{x^2}$

مثال 4/ باستخدام التعريف جد مشتقة الدالــة $f(x) = \sqrt{x}$

الحل/

القانون $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$

التعويض $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

نضرب بمرافق البسط $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$

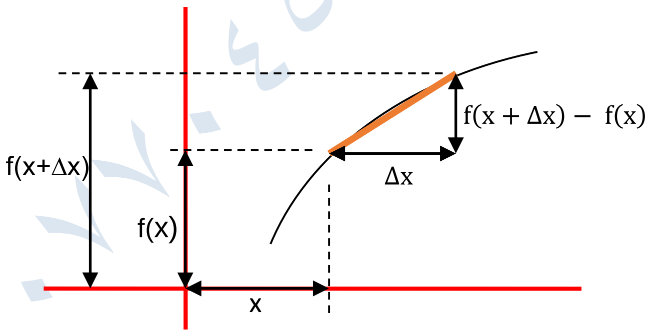
تبسيط $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x \,.(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \,.(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\,.(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

التفسير الهندسي للمشتقة: ان مشتقة الدالة عند نقطة معرفة تساوي ميل المماس لمنحني الدالة عند تلك النقطة وكذلك فان مشتقة الدالة عند اي قيمة لـ x تساوي معادلة ميل المماس للدالة عند اي نقطة كما مبين في الرسم التالي:

كلما كانت القيمة Δx صغيرة كلما كان ميل الخط المستقيم يمثل ميل المماس للدالة عند نقطة معينة واذا كانت Δx تقترب من الصفر فان ناتج الغاية يمثل ميل المماس ويطلق عليها تسمية المشتقة.



معادلة الخط المستقيم : $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث m: تمثل ميل المستقيم ، y_1 و x_1 احداثيات نقطة معلومة على المستقيم.

ملاحظة 1: اذا كان لدينا معادلة مستقيم بصيغــــة $(Ay + Bx + C = 0)$ فان ميل المستقيم يساوي سالب معامل x مقسوم على معامل y كما مبين: $m = \frac{-B}{A}$

ملاحظة2: ميل العمود على مستقيم تساوي مقلوب ميل المستقيم بعكس الاشارة.

مثال 5/ اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند هذه النقطة.

الحل/ نحسب قيمة $f'(2)$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

نحسب قيمتي $f(2+\Delta x)$ و $f(2)$:

$$f(2+\Delta x) = 2(2+\Delta x)^2 + 3(2+\Delta x) + 1 = 2(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) + 6 + 3\Delta x + 1$$

$$= 8 + 8\Delta x + 2\Delta x^2 + 6 + 3\Delta x + 1 = 11\Delta x + 2\Delta x^2 + 15$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 15$$

$$f(2+\Delta x) - f(2) = 11\Delta x + 2\Delta x^2 + 15 - 15 = 11\Delta x + 2\Delta x^2$$ نعوض حاصل الطرح في البسط

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(11 + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (11 + 2\Delta x) = 11 + 2 \cdot 0 = 11 = m$$ ميل المماس

من الدالة $f(x)$ عندما x_1 تساوي 2 نحسب قيمة y_1:

$$y_1 = f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 15$$

نعوض قيم x_1 و y_1 و m في معادلة المستقيم:

$$y - 15 = 11(x - 2) \Longrightarrow y - 15 = 11x - 22 \Longrightarrow y - 11x + 22 - 15 = 0$$

$y - 11x + 7 = 0$ معادلة المماس للمنحني عند النقطة 2

التطبيقات الفيزياوية للمشتقة: يمكننا الاستفادة من المشتقة في العديد من التطبيقات منها حركة الاجسام حسب القوانين التالية:

1) دالة الازاحة $f(t)$ تكون بدلالة الزمن.(تستخدم لتحديد بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة)

2) دالة السرعة $v(t)$ = مشتقة دالة الازاحة بالنسبة الى الزمن: $v(t) = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

3) دالة التعجيل $a(t)$ = مشتقة دالة السرعة بالنسبة الى الزمن: $a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

عند بداية الحركة $t = 0$ ، اقل واكبر واعلى واوطئ مسافة يصلها الجسم عندما $v(t) = 0$

اقل واكبر سرعة يصلها الجسم عندما $a(t) = 0$ ، الزمن دائما قيمته موجبة والسالب يهمل.

مثال 6/ لتكن $f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالامتار جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدأ الحركة.

الحل/ ان موقع الجسم بعد 2 ثانية يعني الازاحة $f(t)$ بعد مرور 2 ثانية ونحسبها مباشرة من الدالة:

$$f(2) = 2(2)^2 + 3 = 8 + 3 = 11\ m$$

بعد مرور ثانيتين فان الجسم يقطع مسافة 11 متر من نقطة البداية.

والان لحساب سرعة الجسم بعد مرور ثانيتين فاننا نقوم بحساب $v(t) = f'(2)$:

$$v(2) = f'(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t) - f(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(2+\Delta t)^2 + 3 - (2(2)^2 + 3)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) + 3 - 11}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8 + 8\Delta t + 2\Delta t^2 - 8}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(8 + 2\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (8 + 2\Delta t) = 8\ \frac{m}{sec}$$ سرعة الجسم بعد مرور ثانيتين

مثال 7/ لتكن $v(t) = 3t^2$ تمثل دالة السرعة لجسم بوحدات المتر والثانية ، جد التعجيل بعد 2 ثانية.

الحل/ التعجيل هو مشتقة دالة السرعة:

$$a(2) = v'(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t) - f(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(2+\Delta t)^2 - 3(2)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) - 12}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12 + 12\Delta t + 3\Delta t^2 - 12}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(12 + 3\Delta t)}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} (12 + 3\Delta t) = 12 + 3 \cdot 0 = 12 \ \frac{m}{sec^2} \quad \text{التعجيل}$$

حلول تمارين 1-3

-1 جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 5x$ باستخدام التعريف ثم احسب $f'(3)$ و $f'(0)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - (x^2+5x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - x^2 - 5x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x + 5)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 5) = 2x + 0 + 5$$

$$f'(x) = 2x + 5 \implies f'(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11 \implies f'(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

-2 جد المشتقة بطريقة التعريف لكل مما يأتي

a) ظطكج $f(x) = \frac{3}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

الحل/ (a

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نقوم بايجاد قيمة البسط:

$$f(x + \Delta x) = \frac{3}{x+\Delta x-1} \quad , \quad f(x) = \frac{3}{x-1}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{3}{x+\Delta x-1} - \frac{3}{x-1} = \left(\frac{3}{x+\Delta x-1} - \frac{3}{x-1}\right) = \frac{3(x-1) - 3(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x-3-3x-3\Delta x+3}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \frac{-3\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

نعوض في بسط القانون:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 \cdot \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3 \cdot \cancel{\Delta x}}{(x+\Delta x-1)(x-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} = \frac{-3}{(x-1)(x-1)} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

(b

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}.\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$ نضرب بمرافق البسط

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x.(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\Delta x.(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}.(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+0+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

-3 اذا كانت $f(x) = x^2 - 3x - 4$ جد $f'(x)$ مستخدما التعريف ثم جد معادلة المماس لمنحني الدالة عند $x=1$.

الحل/

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ القانون

نقوم بايجاد قيمة البسط:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - 4 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 4$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 4 - (x^2 - 3x - 4)$$

$$= \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x - \cancel{4} - \cancel{x^2} + \cancel{3x} + \cancel{4} = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x$$

نعوض في بسط القانون:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x-3)}{\Delta x}$$ عامل مشترك Δx

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x-3)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-3) = 2x-3$$

$m = f'(1) = 2.1 - 3 = -1$ ميل المماس عندما $x = 1$

نحسب قيمة y_1 عندما $x_1 = 1$ من الدالة $f(x)$:

$y_1 = f(1) = 1^2 - 3.1 - 4 = -6$

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-6) = -1(x - 1)$

$y + 6 = -x + 1$

$y + x + 5 = 0$ معادلة المماس عندما $x=1$

-4 جسم يتحرك وفق العلاقة حيث f الازاحة بالامتار معطاة بالدالة $f(t) = t^2 + 2t + 1$ ، جد سرعة الجسم بعد 3 ثواني من بدأ الحركة.

الحل/ السرعة بعد ثلاث ثواني هي $f'(3)$

$$f'(3) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(3+\Delta t)-f(3)}{\Delta t}$$

نحسب قيمة $f(3+\Delta t) - f(3)$:

$f(3) = 3^2 + 2.3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$

$f(3+\Delta t) = (3+\Delta t)^2 + 2(3+\Delta t) + 1 = 3^2 + 2.3.\Delta t + \Delta t^2 + 6 + 2\Delta t + 1$

$= 9 + 6\Delta t + \Delta t^2 + 6 + 2\Delta t + 1 = 16 + 8\Delta t + \Delta t^2$

$f(3+\Delta t) - f(3) = 16 + 8\Delta t + \Delta t^2 - 16 = 8\Delta t + \Delta t^2$

$$f'(3) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{8\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(8+\Delta t)}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t\to 0}(8+\Delta t) = 8 + 0 = 8 \frac{\text{متر}}{\text{ثانية}}$$

-5 اذا كانت السرعة معطاة بالعلاقة $v(t) = t^2 + t + 1$ م/ثا ، جد التعجيل عند $t = 1$ ثانية.

الحل/ التعجيل عندما $t = 1$ ثانية يساوي $v'(1)$:

$$v'(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(1+\Delta t) - v(1)}{\Delta t}$$

نحسب قيمة $v(1 + \Delta t)$ و $v(1)$:

$$v(1 + \Delta t) = (1 + \Delta t)^2 + (1 + \Delta t) + 1 = 1^2 + 2\,\Delta t + \Delta t^2 + 1 + \Delta t + 1$$

$$= 1 + 2\Delta t + \Delta t^2 + 1 + \Delta t + 1 = 3 + 3\Delta t + \Delta t^2$$

$$v(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$v(1 + \Delta t) - v(1) = 3 + 3\Delta t + \Delta t^2 - 3 = 3\Delta t + \Delta t^2$$

$$v'(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$$ التعويض

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(3 + \Delta t)}{\cancel{\Delta t}}$$ Δt عامل مشترك

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (3 + \Delta t) = 3 + 0 = 3 \ \frac{\text{متر}}{\text{ثانية}^2}$$ التعجيل عند $t = 1\ sec$

مبادىء الاشتقاق: تعلمنا في الموضوع السابق كيفية ايجاد مشتقة الدالة باستخدام التعريف والان سنتعلم كيفية ايجاد المشتقة باستخدام القواعد.

لتكن $f(x) = x^n$ فان مشتقة الدالة هي:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

مثال/ لتكن $f(x) = x^3$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مثال/ لتكن $f(x) = x$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

مثال/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ جد مشتقة الدالة:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

قوانين الاشتقاق:

1) مشتقة الثابت تساوي صفر:

مثال/ لتكن $f(x) = 12$ جد مشتقة الدالة: $f'(x) = 0$

2) مشتقة الثابت المضروب في دالة تساوي الثابت في مشتقة الدالة:

مثال/ لتكن $f(x) = 3x^2$ جد مشتقة الدالة: $f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$

مثال/ لتكن $f(x) = 2x^4$ جد مشتقة الدالة: $f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} = 8x^3$

3) مشتقة جمع او طرح دالتين يساوي جمع او طرح مشتقاتها:

مثال/ لتكن $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 1x^{1-1} + 0 = 3x^2 - 2x^1 + 1x^0 = 3x^2 - 2x + 1$$

مثال/ لتكن $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 2(3x^{3-1}) - 2(x)^{2-1} + 0 = 6x^2 - 2x$$

4) مشتقة الدالة المرفوعة الى اس تساوي الاس مضروب بالدالة مرفوعة للاس ناقص واحد في مشتقة داخل القوس:

مثال/ لتكن $f(x) = (x^2 - 2)^3$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3(x^2 - 2)^{3-1} \cdot (2x) = 6x(x^2 - 2)^2$$

مثال/ لتكن $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}$ جد مشتقة الدالة:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1} = (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^4 + 1)^{\frac{1}{4}-1} \cdot (4x^{4-1} + 0) = \frac{1}{4}(x^4 + 1)^{\frac{-3}{4}} \cdot (4x^3) = \frac{4\ x^3}{4\sqrt[4]{(x^4 + 1)^3}}$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4 + 1)^3}}$$

5) مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي مشتقة الاول في الثاني زائدا مشتقة الثاني في الاول:

مثال/ لتكن $f(x) = (x^2-2)(x+3)$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = (x^2 - 2)(x^{1-1} + 0) + (x+3)(2x^{2-1} - 0) = (x^2 - 2)(1) + (x + 3)(2x)$$

$$f'(x) = (x^2 - 2) + (2x^2 + 6x) = x^2 - 2 + 2x^2 + 6x = 3x^2 + 6x - 2$$

6) مشتقة قسمة دالتين يساوي (المقام في مشتقة البسط ناقص البسط في مشتقة المقام) تقسيم مربع المقام:

مثال/ لتكن $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ جد مشتقة الدالة:

$$f'(x) = \frac{(x+3)(2x)-(x^2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2}{x^2+6x+9} = \frac{x^2+6x}{x^2+6x+9}$$

مثال 1/ جد مشتقة كل مما يأتي:

a) $f(x)= (x^3 + x^2 + x +1)^5$

$$f'(x) = 5(x^3+x^2+x+1)^4 . (3x^2+2x+1)$$

b) $f(x)= \sqrt{x^2-2x+1}$ **(وزاري 2012 دور 1)**

$$f(x) = (x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-2x+1)^{-\frac{1}{2}} . (2x - 2) = \frac{1}{2}(x^2-2x+1)^{-\frac{1}{2}} . 2(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x-1)}} = \frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)}{|x-1|}$$

c) $f(x) = (\frac{x}{x+1})^4$ جد المشتقة عند $x=1$ وزاري 2012 دور 1

$$f'(x) = 4(\frac{x}{x+1})^3 (\frac{(x+1).1-x(1+0)}{(x+1)^2}) = 4(\frac{x}{x+1})^3 (\frac{x+1-x}{(x+1)^2})$$

$$f'(x) = 4(\frac{x}{x+1})^3 (\frac{1}{(x+1)^2}) = 4\frac{x^3}{(x+1)^3} (\frac{1}{(x+1)^2}) = \frac{4x^3}{(x+1)^5}$$

$$f'(1) = \frac{4 . 1^3}{(1+1)^5} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

مشتقة المشتقة : في كل الامثلة السابقة كنا نتعامل مع المشتقة الاولى للدالة ولكن في بعض التطبيقات نحتاج الى المشتقة الثانية (او الثالثة او الرابعة الخ) للدالة ونرمز لها باحد الرموز التالية:

$$y \quad \text{او} \quad f(x) \quad \text{او} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

مثال 3/ اذا كانت $y = x^4 + 5x^3 + 3$ جد y' و y

$$y' = 4x^3 + 15x^2 \Rightarrow y = 3.4x^2 + 2.15x = 12x^2 + 30x$$

مثال 4/ اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ جد $f(x)$ و $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f(x) = 12x + \frac{6x}{x^4}$$

حلول تمارين 3-2

1- جد باستخدام القواعد مشتقة كل من الدوال التالية عند العدد المؤشر ازائها:

a) $f(x)= x^3 -4x^2 + x - 1$, $x = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3. 1^2 - 8. 1 + 1 = -4$$

b) $f(x) = (4-x)(x^2+3)$, $x = 2$ **وزاري (2013 دور 1 و 2012 دور 3 و 2011 دور 1)**

$$f'(x) = (4-x) . 2x + (x^2+3) . (-1) = 8x - 2x^2 - x^2 - 3 = 8x - 3x^2 - 3$$

$$f'(2) = 8 . 2 - 3. 2^2 - 3 = 16 - 12 - 3 = 1$$

c) $f(x) = \dfrac{4-5x}{x^2+x+1}$, $x = -1$

$f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1)\,.\,(-5) - (4-5x)\,.\,(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-5x^2-5x-5 - (8x-10x^2+4-5x)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-5x^2-5x-5 - 8x+10x^2-4+5x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{5x^2-8x-9}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{5(-1)^2-8(-1)-9}{((-1)^2+(-1)+1)^2}$

$f'(-1) = \dfrac{5+8-9}{(1-1+1)^2} = \dfrac{4}{(1)^2} = 4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x = 0$

$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}-1}\,.\,2 = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2\,.0+1)^3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{(1)^3}} = -1$

e) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2+2}$, $x = -1$ (وزاري 2013 دور 1)

$f'(x) = 1 + \dfrac{0-3(2x)}{(x^2+2)^2} = 1 - \dfrac{6x}{(x^2+2)^2} = 1 - \dfrac{6(-1)}{((-1)^2+2)^2}$

$f'(-1) = 1 - \dfrac{6(-1)}{((-1)^2+2)^2} = 1 + \dfrac{6}{(1+2)^2} = 1 + \dfrac{6}{9} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

-2 اذا كانت $f(x) = (x^2-4)^4$ جد $f\ (x)$ و $f\ (x)$ عند $x = 2$.

الحل/ ايجاد $f\ (2)$:

$f(x) = (x^2-4)^4$

$f'(x) = 4(x^2-4)^3\,.\,2x = 8x(x^2-4)^3$

$f'(2) = 8\,.\,2\,.\,(2^2-4)^3 = 16\,.\,(4-4)^3 = 16\,.\,(0)^3 = 0$

ايجاد $f\ (2)$:

$f'(x) = 8x\,(x^2-4)^3$

$f\ (x) = 8x\,.\,3(x^2-4)^2\,.\,2x + 8(x^2-4)^3 = 48x^2\,.\,(x^2-4)^2 + 8(x^2-4)^3$

$f\ (2) = 48(2^2)\,.\,(2^2-4)^2 + 8(2^2-4)^3 = 48(4)\,.\,(0)^2 + 8(0)^3 = 0$

-3 اذا كانت $f(x) = (x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(x)$ و $f'(2)$.

الحل/

$f'(x) = \frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}-1}\,.\,(3x^2+6x) = \frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}\,.\,(3x^2+6x)$

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x^3+3x^2-3}\,.\,(3x^2+6x)$

$f'(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2^3+3\,.\,2^2-3}\,.(3.\,2^2+6.\,2) = \frac{3}{2}\sqrt{8+12-3}\,.\,(3.\,4+12)$

$f'(2) = \frac{3}{2}\sqrt{17}\,.\,(24) = 36\sqrt{17}$

التطبيقات الهندسية والفيزياوية باستخدام قواعد المشتقة:

مثال 1/ جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2-5x+2$ عند $x= 1$.

الحل/ تعريف الاحداثي y للنقطة عند $x = 1$

$y_1 = f(1) = 1^2 - 5(1) + 2 = -2$ النقطة ∴ $(1,-2)$

$f'(x) = 2x - 5 \implies f'(1) = 2(1) - 5 = -3 = m$ ميل المماس عند $x = 1$

معادلة المستقيم : $y - y1 = m (x - x_1)$

$y - (-2) = -3(x - 1) \implies y + 2 = -3x +3 \implies$ $y +3x -1 = 0$ ....معادلة المماس

مثال 2/ جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ عند $x= 5$. (وزاري 2012 دور 2)

الحل/ تعريف الاحداثي y للنقطة عند $x = 5$

$y_1 = f(5) = \sqrt[3]{5+3} = \sqrt[3]{8} = 2$ النقطة ∴ $(2 ، 5)$

$f(x) = (x+3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}-1}(1) = \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\,(x+3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

$f'(5) = \frac{1}{3\,(\sqrt[3]{5+3}\,)^2} = \frac{1}{3\,(\sqrt[3]{8}\,)^2} = \frac{1}{3\,(2\,)^2} = \frac{1}{3\,.4} = \frac{1}{12} = m$ ميل المماس عند $x = 5$

معادلة المستقيم : $y - y1 = m (x - x_1)$

$y - 2 = \frac{1}{12}(x - 5) \implies 12(y - 2) = (x -5) \implies 12y - 24 = x - 5$

$12y - x -19 = 0$ ....معادلة المماس

مثال 3/ جد معادلة المماس والعمود على المماس لمنحني الدالة $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$ عند $y= 5$.(وزاري 2013 دور 2)

الحل/ تعريف الاحداثي x للنقطة عند $y = 5$

$y_1 = f(x) = \frac{2x+1}{3-x} = 5$

$2x + 1 = 5(3 - x) \implies 2x + 1 = 15-5x \implies 2x + 5x = 15-1$

$7x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$ النقطة ∴ $(5 ، 2)$

$f'(x) = \frac{(3-x)\,.2-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{6-2x+2x+1}{(3-x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2}$

$f'(2) = \frac{7}{(3-2)^2} = \frac{7}{1} = 7 = m$ ميل المماس عند $x = 2$

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m (x - x_1)$

$y -5 = 7(x -2) \implies y - 5 = 7x - 14 \implies$ $y - 7x + 9 = 0$ ....معادلة المماس

ميل العمود على المماس = $m = \frac{-1}{7}$

$y - 5 = \frac{-1}{7}(x - 2) \implies 7(y - 5) = -1(x -2) \implies 7y - 35 = -x + 2$

$7y + x - 37 = 0$ ....معادلة العمود على المماس

مثال 4/ جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

توضيح/ في نقطة التقاطع مع محور الصادات او محور y فان $x = 0$ ونحسب قيمة y اما في نقطة التقاطع مع محور السينات او المحور x فان $y = 0$ ونحسب قيمة او قيم x.

الحل/ في نقطة تقاطع المنحني مع محور الصادات فان $x = 0$:

$y_1 = f(0) = 0^2 + 1 = 1$

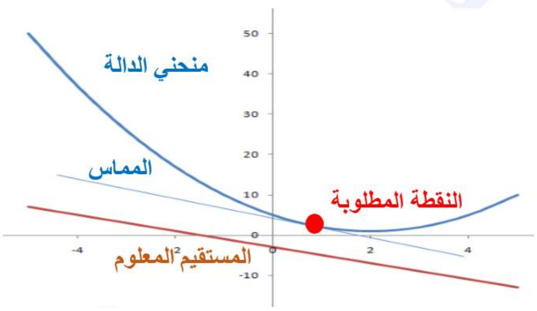
∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (0 ، 1)

$f'(x) = 2x \implies f'(0) = 2 . 0 = 0$ المماس خط افقي

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - 1 = 0\,(x - 0) \implies y - 1 = 0 \implies y = 1$ .... معادلة المماس

مثال 5/ جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$ **(وزاري 2013 دور اول)**



الحل/ ميل المستقيم يساوي سالب معامل x مقسوم على معامل y :

$m = \frac{-(2)}{1} = -2$ ميل المستقيم المعلوم

ميل المستقيم = ميل المماس للمنحني بالتوازي $f'(x) = 2x - 4 = -2$

$2x = 4 - 2 = 2 \implies x = 1$

$y = f(1) = 1^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$

اذا النقطة المطلوبة $y = 2$ و $x = 1$

مثال 6/ اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل المماس للمنحني عند $x = -1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة (-3،2) جد قيمة a و b. **(وزاري 2012 دور اول)**

الحل/

$f(x) = x^2 + ax + b \implies f'(x) = 2x + a$

ميل المماس عند $x = -1$ هو 4:

$f'(-1) = 2(-1) + a = 4 \implies -2 + a = 4 \implies a = 6$

النقطة ($x = -3$، $y = 2$) تنتمي للمنحني:

$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + b = 2 \implies 9 - 18 + b = 2 \implies b = 9 + 2 = 11$

مثال 7/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث s(t) تقاس بالامتار والدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد 5 دقائق من بدأ الحركة.

الحل/ بما ان المعادلة تستخدم الدقائق فاننا نعوض الرقم خمسة في المعادلة لتحديد الموقع:

$s(5) = 5^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1 = 125 + 75 + 20 + 1 = 221$ متر

دالة السرعة v(t) تساوي مشتقة دالة الازاحة s(t):

$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t + 4$

$v(5) = 3(5)^2 + 6(5) + 4 = 75 + 30 + 4 = 109\ \frac{\text{متر}}{\text{دقيقة}}$

دالة التعجيل a(t) تساوي مشتقة دالة السرعة v(t):

$a(t) = v'(t) = 6t + 6 \implies a(5) = 6(5) + 6 = 30 + 6 = 36\ \frac{\text{متر}}{\text{دقيقة}^2}$

مثال 8/ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلومتر والزمن بالساعة احسب:

1) السرعة بعد خمس ساعات.
2) بعده عندما تصبح سرعته صفرا.

الحل/ 1) دالة السرعة v(t) تساوي مشتقة دالة الازاحة s(t):

$v(t) = s'(t) = 2t - 20 \implies v(5) = 2(5) - 20 = -10 \frac{\text{كيلومتر}}{\text{ساعة}}$

2) عندما تكون السرعة صفر نحسب قيمة t:

$v(t) = 2(t) - 20 = 0 \implies 2t = 20 \implies t = 10$ ساعة

نعوض الزمن عند السرعة 0 في دالة الازاحة لايجاد البعد:

$s(10) = 10^2 - 20(10) + 120 = 100 - 200 + 120 = 20$ كيلومتر

مثال 9/ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = \sqrt{2t+1}$ أوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته $\frac{1}{3}$ متر بالثانية. **(وزاري 2013 تمهيدي و 2012 دور 1)**

الحل/

$s(t) = \sqrt{2t+1} = (2t+1)^{\frac{1}{2}}$

دالة السرعة v(t) تساوي مشتقة دالة الازاحة s(t):

$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$

بما ان السرعة معلومة ويطلب الزمن نعوض في معادلة السرعة:

$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{3} \implies \sqrt{2t+1} = 3$ تربيع الطرفين

$2t + 1 = 9 \implies 2t = 8 \implies t = 4$ ثانية

مثال 10/ قذف جسم نحو الاعلى عن سطح الارض بازاحة معطاة وفق العلاقة $s(t) = 96t - 16t^2$ حيث ان s(t) الازاحة بالامتار و t بالثواني ، احسب:

1) سرعة الجسم بعد ثانيتين. **(وزاري 2011 دور اول)**

2) متى تصبح سرعته صفرا.

الحل/

1) دالة السرعة تساوي مشتقة دالة الازاحة:

$v(t) = s'(t) = 96 - 32t$

السرعة بعد ثانيتين:

$v(2) = 96 - 32(2) = 96 - 64 = 32 \frac{\text{متر}}{\text{ثا}}$

2) من دالة السرعة نحسب الزمن عند السرعة صفر:

$v(t) = 96 - 32t = 0 \implies 96 - 32t = 0 \implies 32t = 96 \implies t = \frac{96}{32} = 3$ ثانية

مثال 11/ اذا تحرك الجسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$ حيث s(t) بالامتار و t الزمن بالثانية ، احسب بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح تعجيله صفرا.

الحل/ دالة التعجيل تساوي المشتقة الثانية لدالة الازاحة:

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 18$

$a(t) = v'(t) = 6t - 12$

الزمن عندما التعجيل يساوي صفر: $a(t) = 6t - 12 = 0 \implies 6t = 12 \implies t = 2$ ثانية

عند t = 2 فان التعجيل يساوي صفر لذلك نحسب بعد الجسم:

$s(t) = 2^3 - 6(2)^2 + 18(2) + 12 = 8 - 24 + 36 + 12 = 32$ متر

سرعة الجسم عندما t = 2 من معادلة السرعة:

$v(t) = 3(2)^2 - 12(2) + 18 = 12 - 24 + 18 = 6 \frac{\text{متر}}{\text{ثا}}$

بعض تطبيقات المشتقة في الاقتصاد:

- x يمثل حجم الانتاج
- دالة الكلفة (الكلية) تكون بدلالة حجم الانتاج $c(x)$
- دالة الكلفة الحدية $c'(x) = MC$
- دالة معدل الكلفة (الكلية) $AC = \frac{\text{دالة الكلفة(الكلية)}}{x}$
- دالة معدل الكلفة الحدية $\frac{d}{dx}(AC) =$ مشتقة دالة معدل الكلفة

مثال 12/ لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما $c(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد:

a) دالة الكلفة الحدية.
b) دالة معدل الكلفة.
c) دالة معدل الكلفة الحدية.
d) حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة و الكلفة الكلية عند ذلك الانتاج.

الحل/

a) دالة الكلفة الحدية: $MC = c'(x) = 6x - 60$

b) دالة معدل الكلفة: $AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{3x^2 - 60x + 1200}{x}$

$$AC = 3x - 60 + \frac{1200}{x}$$

c) دالة معدل الكلفة الحدية: $\frac{d}{dx}(AC) = 3 - \frac{1200}{x^2}$

d) حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة و الكلفة الكلية عند ذلك الانتاج.

ملاحظة/ اقل معدل كلفة عندما $\frac{d}{dx}(AC)$ تساوي صفر حيث نحسب قيمة x ونعوضها دالة حجم الانتاج $c(x)$:

$$\frac{d}{dx}(AC) = 3 - \frac{1200}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{1200}{x^2} = 3 \Longrightarrow 1200 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{1200}{3} = 400 \Longrightarrow x = \pm 20 \Longrightarrow x = 20 \text{ unit}$$ حجم الانتاج عند اقل معدل كلفة

الكلفة الكلية لحجم الانتاج 20 من دالة $c(x)$:

$$c(x) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200 = 1200 - 1200 + 1200 = 1200$$

حلول تمارين 3-3

1- جد معادلة مماس المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ عند $x = 0$.

الحل/

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9 \Longrightarrow f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 9 = 9 = m$$

$y_1 = f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 5 = 5$		احداثيات النقطة $(0,5)$

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 5 = 9(x - 0) \Longrightarrow y - 5 = 9x$$

$y - 9x - 5 = 0$		معادلة المماس عند النقطة $x = 0$

2- جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحـــــني $y = (x-3)^3$ عند $x = 2$.

الحل/

$$f'(x) = 3(x-3)^2 \Longrightarrow f'(2) = 3(2-3)^2 = 3 = m$$

$y_1 = f(2) = (2-3)^3 = -1$　　احداثيات النقطة (2,-1)

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m (x - x_1)$

$y-(-1) = 3(x-2) \Longrightarrow y + 1 = 3x - 6$

معادلة المماس عند النقطة $x = 2$　　$y - 3x + 7 = 0$

ميل العمود على المماس = $\frac{-1}{3}$

$y-(-1) = \frac{-1}{3}(x-2) \Longrightarrow 3y + 3 = -x + 2 \Longrightarrow 3y + x + 1 = 0$

معادلة العمود على المماس عند النقطة $x = 2$

-3 جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x = -1$.　　(وزاري 2012 دور اول)

الحل/

$f'(x) = 3x^2 - 2 + \frac{-3(2x)}{(x^2+2)^2} = 3x^2 - 2 - \frac{6x}{(x^2+2)^2}$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 - \frac{6(-1)}{((-1)^2+2)^2} = 3 - 2 - 6(1+2)^2 = 3 - 2 + \frac{6}{9} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$y_1 = f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + \frac{3}{(-1)^2+2} = -1 + 2 + \frac{3}{1+2} = 2$　　احداثيات النقطة (-1,2)

معادلة المماس لمنحني الدالة عند نقطة معرفة:

$y - 2 = \frac{5}{3}(x-(-1)) \Longrightarrow 3y - 6 = 5x + 5 \Longrightarrow 3y - 5x - 11 = 0$ معادلة المماس

-4 جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات.

الحل/

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

المستقيم الموازي لمحور السينات ميله يساوي صفر

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$　　3 عامل مشترك

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Longrightarrow x = -1 \ , \ x = 3$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = -1 - 3 + 9 + 4 = 9$

$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = 27 - 27 - 27 + 4 = -23$

عند النقطتين (3 ,-23) و (-1,9) المماس يوازي محور السينات.

-5 جد نقطة على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عندما يكون مماس المنحني يوازي المستقيم $2x - y = 0$.

الحل/

من معادلة المستقيم نستخرج الميل　　$m = \frac{-2}{-1} = 2$

ميل المماس من مشتقة الدالة　　$f'(x) = 2x - 4$

ميل المماس = ميل المستقيم بالتوازي　　$2x - 4 = 2 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

$f(3) = 3^2 - 4 . 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$　　∴ احداثيات النقطة (3,2)

-6 جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان بعده بالامتار والزمن بالثواني معطى بالعلاقة $s(t) = \sqrt{2t^2 + 18}$
احسب بعده عندما تصبح السرعة 1 متر بالثانية.

الحل/

$s(t) = (2t^2 + 18)^{\frac{1}{2}}$

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}(2t^2+18)^{\frac{-1}{2}} . 4t = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$$

نحسب الزمن عند السرعة $v(t) = 1$:

$$1 = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}} \quad \Rightarrow \quad 2t = \sqrt{2t^2+18}$$ تربيع الطرفين

$$4t^2 = 2t^2 + 18 \quad \Rightarrow \quad 2t^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 3$$

$t = 3$ sec　　الزمن قيمة موجبة

الازاحة عند الزمن 3 ثانية:

$$s(3) = \sqrt{2(3)^2+18} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$$ متر

7- اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث ان s بعده بالامتار ، t الزمن بالثواني احسب:

(وزاري 2013 دور اول)

a) بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعته صفرا.

b) بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما يصبح التعجيل صفرا.

الحل/ a) نحسب الزمن عندما السرعة تساوي صفر:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(t^2 - 4t + 3) = 0$$ 3 عامل مشترك

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-1)(t-3) = 0 \quad \Rightarrow$$ $t = 1$ ثانية ، $t = 3$ ثانية

$s(1) = 1^3 - 6 .1^2 + 9. 1 + 7 = 1 - 6 + 9 + 7 = 11$ متر　　البعد عند $t = 1$

$s(3) = 3^3 - 6 .3^2 + 9. 3 + 7 = 27 - 54 + 27 + 7 = 7$ متر　　البعد عند $t = 3$

عند السرعة $v = 0$ فان الجسم يبعد عن نقطة بداية الحركة 11 متر و 7 متر

b) نحسب الزمن عندما التعجيل $= 0$:

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$ ثانية

$s(2) = 2^3 - 6 .2^2 + 9. 2 + 7 = 8 - 24 + 18 + 7 = 9$ متر

عند التعجيل $a = 0$ فان الجسم يبعد عن نقطة بداية الحركة 9 متر

8- لنفرض ان الكلفة الكلية لصنع x من وحدات سلعة ما هي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$ جد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50.

الحل/ الكلفة الحدية MC:

$$MC = c'(x) = 30 + \frac{-20}{x^2} = 30 - \frac{20}{x^2}$$

الكلفة الحدية عندما الانتاج يساوي 50 :

$$c'(50) = 30 - \frac{20}{50^2} = 30 - \frac{20}{2500} = 30 - \frac{1}{125} = \frac{3750-1}{125} = \frac{30 .125-1}{125} = \frac{3749}{125}$$

9- لتكن دالة الكلفة الكلية $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد دالة الكلفة الحدية ، دالة معدل الكلفة الكلية. (وزاري 2013 تمهيدي)

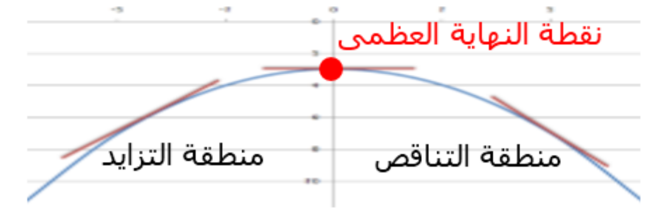
الحل/ دالة الكلفة الحدية MC :　$MC = c'(x) = x - 2$

دالة معدل الكلفة AC:

$$AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{x}{2} - 2 + \frac{5}{x}$$

النهايات العظمى والصغرى والنقاط الحرجة:

النهايات العظمى: هي النقاط التي تنتمي لمنحني الدالة ويكون فيها ميل المماس (المشتقة) يساوي صفر وميل المماس للنقاط السابقة موجب واللاحقة سالب كما مبين:



النهايات الصغرى: هي النقاط التي تنتمي لمنحني الدالة ويكون فيها ميل المماس (المشتقة) يساوي صفر وميل المماس للنقاط السابقة سالب واللاحقة موجب كما مبين:

النقاط الحرجة : هي النقاط التي يتحول فيها ميل المنحني من سالب الى موجب او بالعكس.

طريقة الحل/

1- ايجاد المشتقة لدالة المنحني.
2- مساواة المشتقة بالصفر وحساب قيم x
3- نعوض قيم x في الدالة f(x) لنحسب y لتحديد النقاط الحرجة.
4- تحديد اشارة $f'(x)$ قبل وبعد النقاط الحرجة.
5- تعريف مناطق التزايد ومناطق التناقص.

مثال 1/ جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد ومناطق التناقص للدوال التالية:

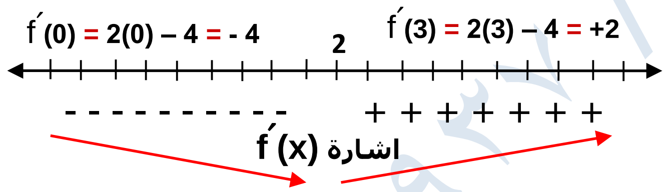
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 2x - 4 \Longrightarrow 2x - 4 = 0$ عند النقاط الحرجة الميل = 0

$2x = 4 \Longrightarrow x = 2$

$f(2) = 2^2 - 4.\,2 + 3 = -1$

نقطة حرجة (2,-1)



الدالة متزايدة في الفترة: $\{x : x \in R\ ,\ x > 2\}$

الدالة متناقصة في الفترة: $\{x : x \in R\ ,\ x < 2\}$

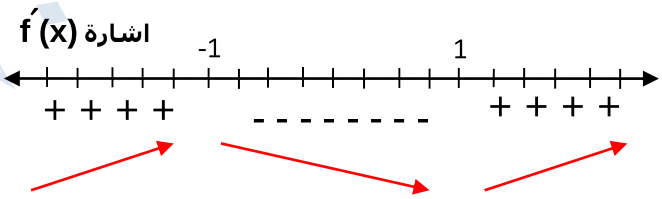
b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$

$f(1) = 1^3 - 3 + 2 = 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

النقاط الحرجة (1,0) و (-1,4).



الدالة متزايدة في الفترتين:

$\{x : x \in R\ ,\ x < -1\}$

$\{x : x \in R\ ,\ x > 1\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة (-1,1).

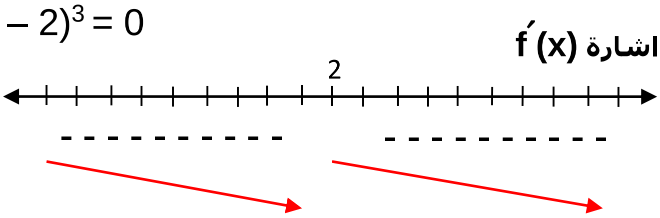
c) $f(x) = (2 - x)^3$

$f'(x) = 3(2 - x)^2 \,.\, (-1) = -3(2 - x)^2$

$-3(2 - x)^2 = 0 \Longrightarrow (2 - x)^2 = 0$ جذر الطرفين

$2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$f(2) = (2-2)^3 = 0$



النقطة الحرجة (2,0)

الدالة متناقصة في الفترتين:

$\{x : x \in R , x < 2\}$

$\{x : x \in R , x > 2\}$

مثال 2/ اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

الحل/

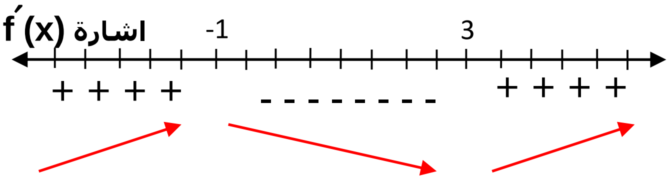
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = -1 \;,\; x = 3$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$

$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7 = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$

النقاط الحرجة : (12 ، 1-) و (20- ، 3)



الدالة متزايدة في الفترتين:

$\{x : x \in R , x < -1\}$

$\{x : x \in R , x > 3\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة (-1,3)

نقطة نهاية عظمى محلية (12 ، 1-)

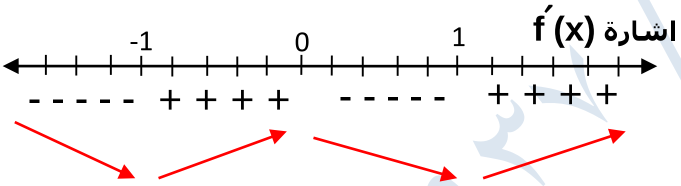
نقطة نهاية صغرى محلية (20- ، 3)

مثال 3/ اذا كان $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

$f'(x) = 4x^3 - 4x \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ عامل مشترك $4x$

$x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;,\; x = 1 \;,\; x = -1$

النقاط الحرجة : (1 ، 0) و (0 ، 1-) و (0 ، 1)



$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

الدالة متزايدة في الفترة $\{x : x \in R , x > 1\}$ وفي الفترة المفتوحة (-1 , 0).

الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R , x < -1\}$ وفي الفترة المفتوحة (0,1).

نقطة نهاية عظمى محلية (1 ، 0)

نقطة نهاية صغرى محلية (0 ، 1-) و (0 ، 1)

مثال 4/ لتكن $f(x) = x^3(-4+x)$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

$f(x) = x^3(-4+x) = -4x^3 + x^4 = x^4 - 4x^3$

الحل/

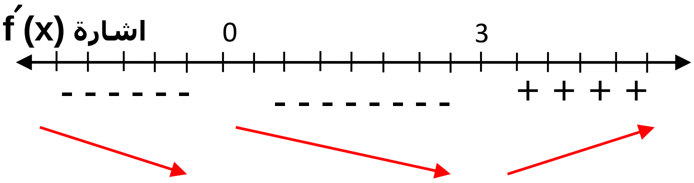
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Longrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Longrightarrow 4x^2(x-3) = 0$ عامل مشترك $4x^2$

$x^2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;,\; x = 3$

$f(0) = 0^4 - 4(0)^3 = 0$

$f(3) = 3^4 - 4(3)^3 = 81 - 108 = -27$

النقاط الحرجة : (0 ، 0) و (27- ، 3)



الدالة متزايدة في الفترة: $\{x : x \in R , x > 3\}$

الدالة متناقصة في الفترة: $\{x : x \in R , x < 0\}$

والفترة المفتوحة (0,3)

نقطة حرجة وليست نهاية (0 ، 0)

نقطة نهاية صغرى محلية (27- ، 3)

الدالة لا تملك نقطة نهاية عظمى.

مثال 5/ اذا كانت $f(x)= x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x = 1$ جد قيمة a وبين نوع النهاية.

الحل/ بما ان للدالة نهاية عند $x = 1$ فان الميل يساوي 0.

$f'(x) = 3x^2 + a \Longrightarrow f'(1) = 3.1^2 + a = 3 + a = 0 \Longrightarrow 3 + a = 0 \Longrightarrow a = -3$

اذا الدالة هي: $f(x)= x^3 - 3x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3(x^2-1) = 0$ 3 عامل مشترك

$(x^2-1) = 0 \Longrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 1 , x = -1$

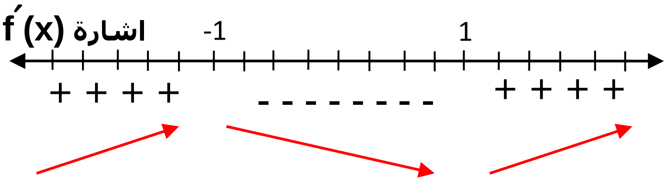
$f(1)= 1^3 -3 . 1 + 5 = 3$

$f(-1)= (-1)^3 - 3 . (-1) + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$

النقاط الحرجة: (1,3) و (-1,7)

الدالة متزايدة في الفترتين: $\{x:x \in R , x < -1\}$

و $\{x:x \in R , x > 1\}$



الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة (-1,1)

نقطة نهاية عظمى محلية (-1,7)

نقطة نهاية صغرى محلية (1,3)

اذا عند $x = 1$ تكون نهاية صغرى محلية.

مثال 6/ اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx$ تمتلك نهاية محلية عند النقطة (1,-2) فما قيمة كل من $a , b \in R$ وما نوع هذه النهاية.

الحل/ ذكر في السؤال ان الدالة تملك نقطة نهاية عند (1,-2) لذلك $f(1) = -2$:

$f(1) = a. 1^3 + b.1 = -2 \Longrightarrow a + b = -2$ .... u

بما ان الدالة تملك نهاية عند $x = 1$ فان الميل = صفر:

$f'(x) = 3ax^2 + b \Longrightarrow f'(1) = 3a.1^2 + b = 3a + b = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0$ v

نطرح المعادلة v من المعادلة u :

$3a + b = 0$

$a + b = -2$

$2a + 0 = 2$ بالطرح

$2a = 2 \Longrightarrow a = 1$

نعوض قيمة a في معادلة u لنحصل على b:

$a + b = -2 \Longrightarrow 1 + b = -2 \Longrightarrow b = -3$

اذا الدالة هي: $f(x) = x^3 -3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0$ عند النهايات المشتقة = 0

$3(x^2-1) = 0$ 3 عامل مشترك

$(x - 1)(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 1 , x = -1$

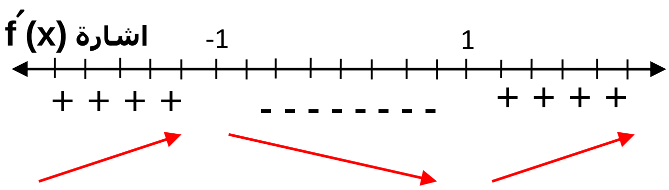
$f(1)= 1^3 -3 . 1 = -2$

$f(-1)= (-1)^3 - 3 . (-1) = -1 + 3 = 2$

النقاط الحرجة: (1,-3) و (-1,2)

الدالة متزايدة في الفترتين: $\{x:x \in R , x < -1\}$

$\{x:x \in R , x > 1\}$



الدالة متناقصة في الفترة $\{x:x \in R , -1 < x < 1\}$

نقطة نهاية عظمى محلية (-1,2)

نقطة نهاية صغرى محلية (1,-2)

اذا عند النقطة (1,-2) تكون نهاية صغرى محلية.

حلول تمارين 3-4

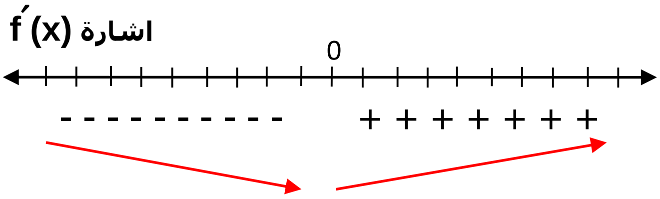
1) جد نقاط النهايات العظمى او الصغرى المحلية من الدوال التالية:

a) $f(x) = x^4-1$

$f'(x) = 4x^3 \implies 4x^3 = 0 \implies x = 0$

$f(0) = 0^4-1 = -1$

النقاط الحرجة : (-1 ، 0)



الدالة متزايدة في الفترة: $\{x:x \in R , x > 0\}$

الدالة متناقصة في الفترة : $\{x:x \in R , x < 0\}$

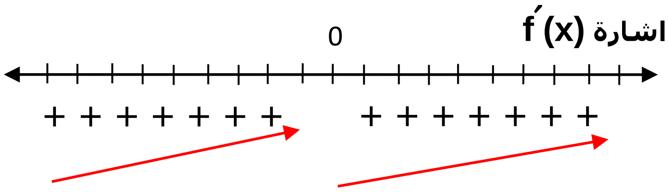
نقطة نهاية صغرى محلية (-1 ، 0)

b) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \implies 3x^2 = 0 \implies x = 0$

$f(0) = 0^3 = 0$

النقاط الحرجة : (0 ، 0)



الدالة متزايدة في الفترتين:

$\{x:x \in R , x > 0\}$

$\{x:x \in R , x < 0\}$

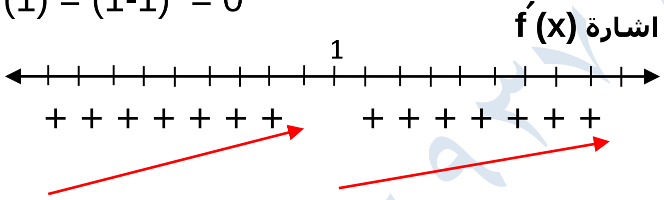
(0 ، 0) نقطة حرجة وليست نهاية

c) $f(x) =(x-1)^3$

$f'(x) =3(x-1)^2 \implies 3(x-1)^2 = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x-1 = 0 \implies x = 1$

$f(1) = (1-1)^3 = 0$

النقاط الحرجة : (0 ، 1)



الدالة متزايدة في الفترتين:

$\{x:x \in R , x > 1\}$

$\{x:x \in R , x < 1\}$

(0 ، 1) نقطة حرجة وليست نهاية

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ (وزاري 2011 دور اول)

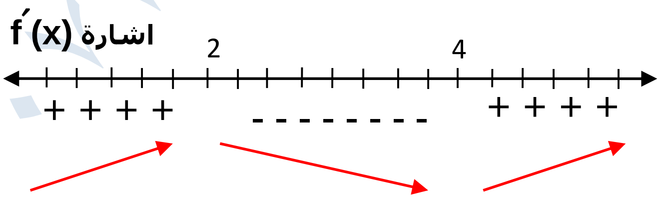
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \implies 3x^2 - 18x + 24 = 0 \implies x^2 - 6x + 8 = 0$ بالقسمة على 3

$(x-4)(x-2) = 0 \implies x = 4 \quad , \quad x = 2$

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$

النقاط الحرجة : (20 ، 2) و (16 ، 4)



الدالة متزايدة في الفترتين:

$\{x:x \in R , x < 2\}$

$\{x:x \in R , x > 4\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة (2,4)

نقطة نهاية عظمى محلية (20 ، 2)

نقطة نهاية صغرى محلية (16 ، 4)

e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 - 4x \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ 4x عامل مشترك

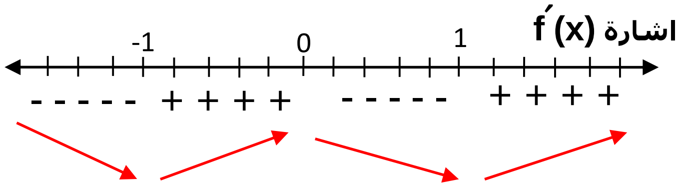
$x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow$ $x = 0 \;,\; x = 1 \;,\; x = -1$

$f(0) = 0^4 - 2(0)^2 - 3 = -3$

$f(1) = 1^4 - 2(1)^2 - 3 = -4$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 - 3 = -4$

النقاط الحرجة : (0 ، -3) و (1 ، -4) و (-1 ، -4)



الدالة متزايدة في الفترة $\{x : x \in R , x > 1\}$

وكذلك في الفترة المفتوحة $(-1 , 0)$.

الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R , x < -1\}$

وكذلك في الفترة المفتوحة $(0,1)$.

نقطة نهاية عظمى محلية (0 ، -3)

نقطة نهاية صغرى محلية (-1 ، -4) و (1 ، -4)

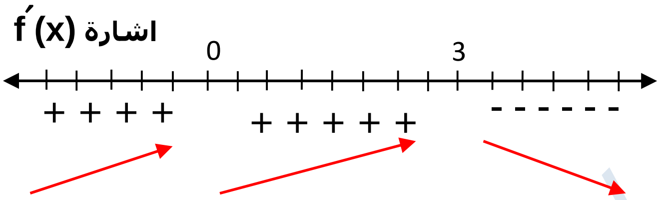
f) $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 \Longrightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 4x^2(3 - x) = 0$ $4x^2$ عامل مشترك

$4x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow f(0) = 5 + 4(0)^3 - 0^4 = 5$

$3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow f(3) = 5 + 4(3)^3 - 3^4 = 5 + 108 - 81 = 32$

النقاط الحرجة : (0 ، 5) و (3 ، 32)



الدالة متزايدة في الفترة: $\{x : x \in R , x < 0\}$

وكذلك في الفترة المفتوحة (0 ، 3)

الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R , x > 3\}$

نقطة نهاية عظمى محلية (3 ، 32)

نقطة حرجة في (0 ، 5)

g) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

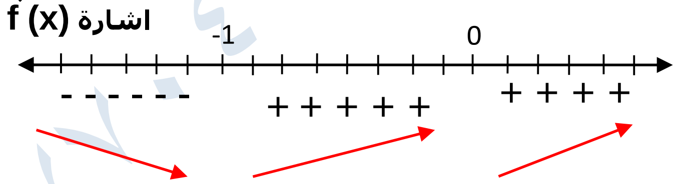
$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 \Longrightarrow 12x^3 + 12x^2 = 0 \Longrightarrow 12x^2(x + 1) = 0$ $12x^2$ عامل مشترك

$x = 0 \;,\; x = -1$

$f(0) = 3(0)^4 + 4(0)^3 = 0$

$f(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 = -1$

النقاط الحرجة : (0 ، 0) و (-1 ، -1)



الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R , x < -1\}$

الدالة متزايدة في الفترة $\{x : x \in R , x > 0\}$

وكذلك في الفترة المفتوحة $(-1 , 0)$.

نقطة نهاية صغرى محلية (-1 ، -1)

نقطة حرجة (0 ، 0)

2) اذا علمت ان النقطة (2,1) هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x) = a + (x-b)^2$ فجد قيمة $a , b \in R$.

(وزاري 2013 دور 2)

الحل/ عند النقطة (2,1) نهاية صغرى اذا $f'(2)=0$

$f'(x) = 2(x - b) \Longrightarrow f'(2) = 2(2 - b) = 0 \Longrightarrow 2(2 - b) = 0 \Longrightarrow 2 - b = 0 \Longrightarrow b = 2$

النقطة (2,1) تنتمي لمنحني الدالة $f(2) = 1$:

$f(2) = a + (2 - 2)^2 = 1 \Longrightarrow a + 0 = 1 \Longrightarrow a = 1$

ملاحظة/ لا داعي لايجاد مناطق التزايد والتناقص كون المطلوب هو ايجاد قيمة a و b فقط.

3) اذا كانت النقطة (1,4) نقطة حرجة للدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$ فما قيمة $a , b \in R$ وما نوع النقطة الحرجة؟
(وزاري 2012 دور 2)

الحل/ النقطة (1,4) حرجة اذا $f'(1)$ تساوي صفر

$f'(x) = a + 2bx \implies f'(1) = a + 2b = 0 \implies a + 2b = 0$ .... ❶

النقطة (1،4) تنتمي لمنحنى الدالة $f(1) = 4$:

$f(1) = 3 + a(1) + b(1)^2 = 4 \implies a + b = 4 - 3 \implies a + b = 1$ .... ❷

$a + 2b = 0$
$a + \ \ b = 1$
بالطرح
$0 + b = -1$
$\therefore \ b = -1$

نعوض قيمة b في معادلة ❷

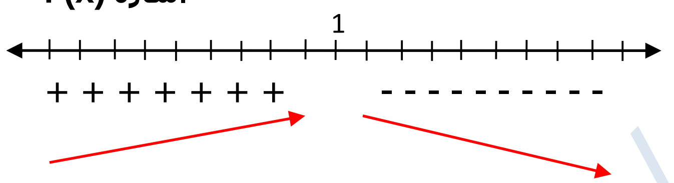
$a + \ b = 1 \implies a - 1 = 1 \implies a = 1 + 1 \implies \therefore \ a = 2$

$\therefore \ \ \mathbf{f(x) = 3 + 2x - x^2}$

$f'(x) = 2 - 2x \implies 2 - 2x = 0 \implies 2x = 2 \implies x = 1$

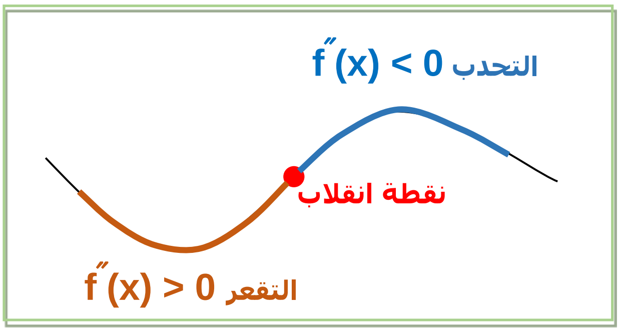
النقاط الحرجة (1,4)

اشارة $f'(x)$



الدالة متزايدة في الفترة $\{x:x \in R , x < 1\}$
الدالة متناقصة في الفترة $\{x:x \in R , x > 1\}$
النقطة (1,4) نهاية عظمى محلية

التقعر و التحدب ونقاط الانقلاب:



- يكون المنحني محدب في المنطقة اذا كانت المشتقة الثانية لكل نقاطها اقل من صفر.
- يكون المنحني مقعر في المنطقة اذا كانت المشتقة الثانية لكل نقاطها اكبر من صفر.
- نقاط الانقلاب تكون المشتقة الثانية عندها تساوي صفر او غير معرفة(قسمة على صفر او جذر زوجي لقيمة سالبة).

خطوات الحل/

1- ايجاد المشتقة الثانية للدالة.
2- حساب قيم x عندما المشتقة الثانية تساوي 0.
3- ايجاد قيم y من معادلة الدالة لكل قيم x.
4- استخدام خط الاعداد لتحديد اشارة المشتقة الثانية.

مثال 1/ جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ان وجدت.

الحل/

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2 \quad > 0$ الدالة مقعرة في مجالها ولا تحوي نقاط انقلاب

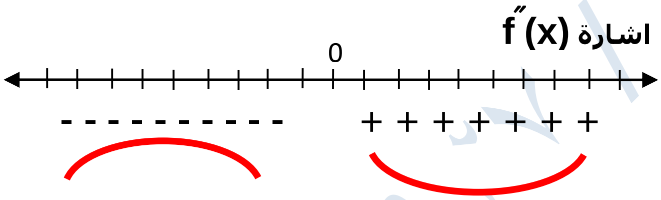
مثال 2/ لتكن $f(x) = x^3 - 3x + 2$ جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب ان وجدت.

الحل/

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow f''(x) = 6x \Longrightarrow 6x = 0$ عند نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر

$x = 0$

$f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = 2$



منطقة التحدب $\{x : x \in R , x < 0\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x > 0\}$

النقطة (0,2) هي نقطة انقلاب.

حلول التمارين 5-3

لكل من الدوال التالية عين ان وجدت نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب:

1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

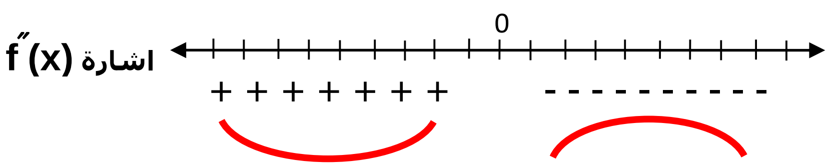
$f'(x) = 4x - 4$

$f''(x) = 4 \quad > 0$ الدالة مقعرة $\Longrightarrow$ لا توجد نقاط انقلاب الدالة مقعرة في مجالها

2) $f(x) = 3x - x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3 - 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = -6x$

$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ عند نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر

$f(0) = 3 \cdot 0 - 0^3 = 0$



منطقة التقعر $\{x : x \in R , x < 0\}$

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x > 0\}$

النقطة (0,0) هي نقطة انقلاب.

3) $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \Longrightarrow f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow 6x - 6 = 0 \Longrightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$

$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 = -2$

اشارة $f''(x)$

1

- - - - - - - - - - -   + + + + + + +

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x < 1\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x > 1\}$

النقطة $(1,-2)$ هي نقطة انقلاب.

4) $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4 \implies f''(x) = 20x^3 \implies 20x^3 = 0 \implies x = 0$

$f(0) = 20(0)^3 = 0$

اشارة $f''(x)$

0

- - - - - - - - - - -   + + + + + + +

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x < 0\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x > 0\}$

النقطة $(0,0)$ هي نقطة انقلاب.

5) $f(x) = (x-2)^3 + 3$ (وزاري 2012 دور 3)

$f'(x) = 3(x-2)^2 \implies f''(x) = 6(x-2)$

عند نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر اذا:

$6(x-2) = 0 \implies x - 2 = 0 \implies x = 2$

$f(2) = (2-2)^3 + 3 = 3$

اشارة $f''(x)$

2

- - - - - - - - - - -   + + + + + + +

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x < 2\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x > 2\}$

النقطة $(2,3)$ هي نقطة انقلاب.

6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

$f'(x) = x^3 - 3x \implies f''(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies 3x^2 - 3 = 0$ بالقسمة على 3

$(x^2 - 1) = 0 \implies (x^2 - 1) = 0 \implies (x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = 1 \ , \ x = -1$

$f(1) = \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{3}{2}(1)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1-6}{4} = \frac{-5}{4}$

$f(-1) = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{2}(-1)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1-6}{4} = \frac{-5}{4}$

اشارة $f''(x)$

-1   1

+ + + +   - - - - - -   + + + +

منطقة التحدب في الفترة المفتوحة$(-1,1)$

منطقة التقعر في الفترتين $\{x : x \in R , x > 1\}$

$\{x : x \in R , x < -1\}$

نقاط الانقلاب $(1, \frac{-5}{4})$ و $(-1, \frac{-5}{4})$.

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (وزاري 2013 دور 2)

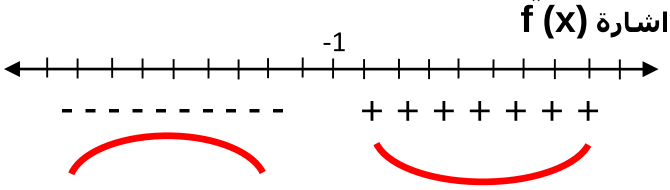
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \implies f''(x) = 6x + 6$

عند نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر اذا:

$6x + 6 = 0 \implies 6(x + 1) = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$

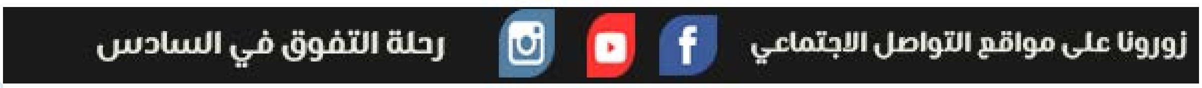
اشارة $f''(x)$



منطقة التقعر $\{x : x \in R ,\ x > -1\}$

منطقة التحدب $\{x : x \in R ,\ x < -1\}$

نقطة الانقلاب $(-1,0)$.



رسم الدوال: من خلال ما تعلمنا في موضوعي النهايات العظمى والصغرى والتقعر والتحدب يمكننا ان نرسم منحني اي دالة بصورة تقريبية من خلال الخطوات التالية:

1) نجد نقطة التقاطع مع محور الصادات اي نعوض $x = 0$ في الدالة $f(x)$.
2) نجد نقاط التقاطع مع محور السينات اي نعوض $f(x) = 0$ ونحسب قيم x.
3) تعيين النهايات العظمى والصغرى.
4) تعيين مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب.
5) نجد نقاط اخرى اذا احتجنا لها.

مثال 1/ ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل/(وزاري 2013 تمهيدي)

- **نقاط التقاطع مع المحورين:**

$f(0) = 0^2 + 4 . 0 + 3 = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(0,3)$

$f(x) = x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x + 3)(x + 1) = 0$

$x = -3 \quad , \quad x = -1$

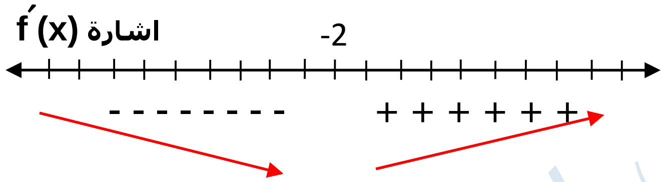
نقط التقاطع مع محور السينات هي $(-3,0)$ و $(-1,0)$

- **النهايات العظمى والصغرى:**

$f'(x) = 2x + 4 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = -4 \quad \Longrightarrow \quad x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 4 . (-2) + 3 = -1$

نقطة حرجة $(-2,-1)$



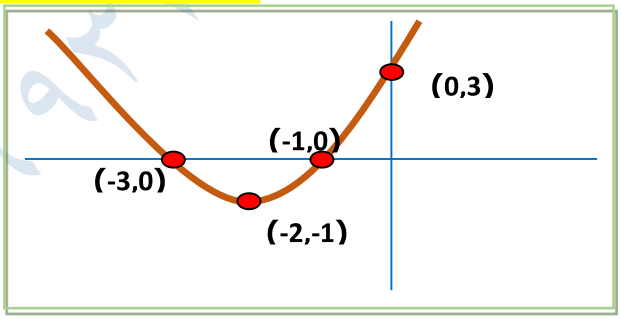
منطقة التزايد $\{x : x \in R , x > -2\}$

منطقة التناقص $\{x : x \in R , x < -2\}$

النقطة $(-2,-1)$ نهاية صغرى محلية.

- **التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:**

$f''(x) = 2$ لا توجد نقاط انقلاب والدالة مقعرة في مجالها



مثال 2/ ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$.

- **نقاط التقاطع مع المحورين:**

$f(0) = 0^3 - 3 . 0 = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(0,0)$

$f(x) = x^3 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0$

$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = \sqrt{3} \quad , x = -\sqrt{3}$

نقط التقاطع مع محور السينات: $(0,0)$ و $(\sqrt{3},0)$ و $(-\sqrt{3},0)$

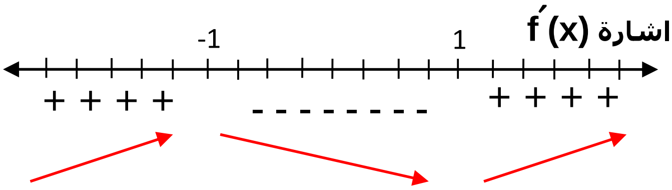
- **النهايات العظمى والصغرى:**

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1$

$x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3.1 = -2$
$f(-1) = (-1)^3 - 3\,(-1) = 2$

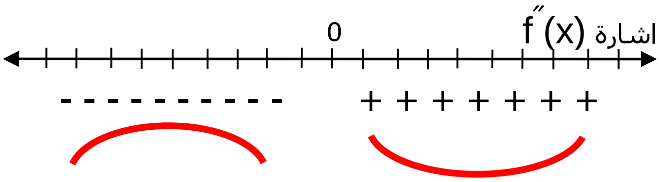
النقاط الحرجة $(1.-2)$ و $(-1,2)$



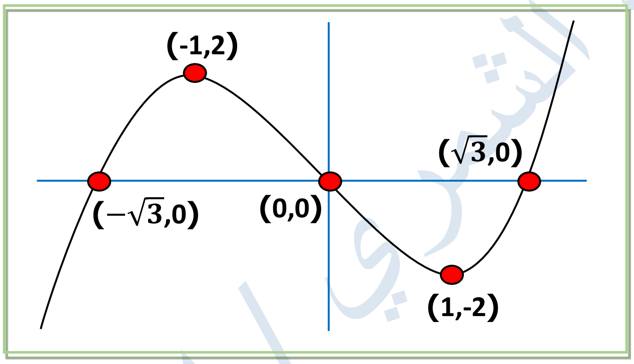
الدالة متزايدة في الفترتين: $\{x:x \in R\ ,\ x < -1\}$
$\{x:x \in R\ ,\ x > 1\}$
الدالة متناقصة في الفترة $\{x:x \in R\ ,\ -1 < x < 1\}$
نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,2)$
نقطة نهاية صغرى محلية $(1,-2)$

- التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

$f''(x) = 6x \quad \Longrightarrow \quad 6x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$
$f(0) = 0^3 - 3(0) = 0$



منطقة التحدب $\{x:x \in R\ ,\ x < 0\}$
منطقة التقعر $\{x:x \in R\ ,\ x > 0\}$
النقطة $(0,0)$ هي نقطة انقلاب.



مثال 3/ ارسم منحني الدالة $f(x) = (x+1)^3-1$
الحل/ نقاط التقاطع مع المحورين:

$f(0) = (0+1)^3-1 = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(0,0)$

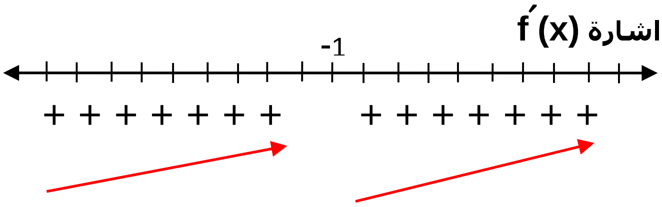
$f(x) = (x+1)^3-1= 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^3-1= 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^3 = 1$
$x+1 = 1$ الجذر التكعيبي للطرفين
$x = 1 - 1 = 0$

نقط التقاطع مع محور السينات $(0,0)$

- النهايات العظمى والصغرى:

$f'(x) = 3(x+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad 3(x+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2 = 0$
$x+1 = 0$ الجذر التربيعي للطرفين
$x = -1$
$f(-1) = ((-1) +1)^3-1 = 0 -1 = -1$

النقاط الحرجة $(-1,-1)$



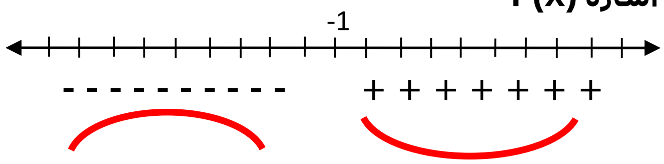
الدالة متزايدة في مجالها
النقطة $(-1,-1)$ نقطة حرجة

- **التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:**

$f''(x) = 6(x+1) \implies 6(x+1) = 0 \implies x+1 = 0 \implies x = -1$

$f(-1) = -1$

اشارة $f''(x)$

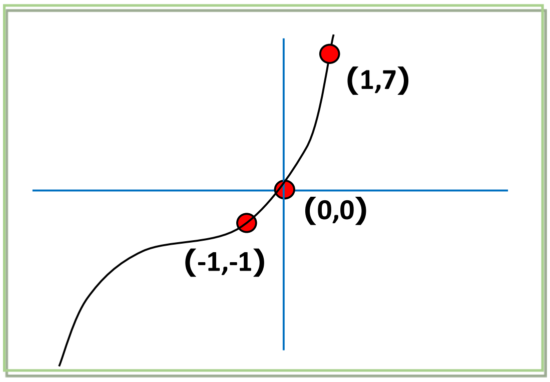


منطقة التحدب $\{x : x \in R,\ x < -1\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R,\ x > -1\}$

(-1,-1) نقطة انقلاب.

ملاحظة/ بما اننا لم نحصل على عدد كاف من النقاط لرسم الدالة فيمكننا اضافة نقاط من خلال اختيار قيم تقريبية لـ x وحساب قيمة y من الدالة كما مبين:



x	$y = (x+1)^3-1$
0	0
1	7
2	26
-1	-1
-2	-2

حلول التمارين 3-6

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدوال التالية:

1) $f(x) = 4 - 6x - x^2$ (وزاري 2013 دور اول)

$f(0) = 4 - 6.0 - 0^2 = 4$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (0,4)

$f(x) = 4 - 6x - x^2 = 0 \implies 4 - 6x - x^2 = 0$　المعادلة لا يمكن حلها باستخدام التجربة.

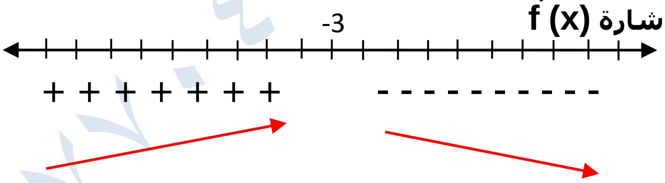
- النهايات العظمى والصغرى:

$f'(x) = -6 - 2x = 0$　في النهايات المشتقة تساوي صفر

$-6 - 2x = 0 \implies 2x = -6 \implies x = -3$

$f(-3) = 4 - 6(-3) - (-3)^2 = 4 + 18 - 9 = 13$

اشارة $f'(x)$



الدالة متزايدة في الفترة: $\{x : x \in R,\ x < -3\}$

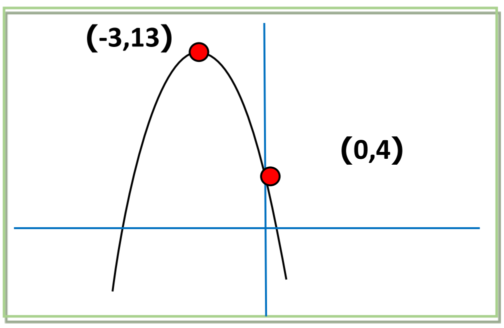
الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R,\ x > -3\}$

نقطة نهاية عظمى محلية (-3,13)

- التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

$f''(x) = -2 \quad < 0$

بما ان المشتقة الثانية اقل من صفر اذا الدالة محدبة في مجالها ولا تحوي نقاط انقلاب.



2) $f(x) = 3x - x^3$ (1 دور 2011 و 2 دور 2012)

$f(0) = 3.0 - 0^3 = 0$

نقط التقاطع مع محور الصادات هي (0,0)

$f(x) = 3x - x^3 = 0 \implies 3x - x^3 = 0 \implies x(3 - x^2) = 0$

$3x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0 \implies x = 0 \quad , \quad x = \sqrt{3} \quad , \quad x = -\sqrt{3}$

نقاط التقاطع هي $(0,0)$ و $(\sqrt{3},0)$ و $(-\sqrt{3},0)$

- النهايات العظمى والصغرى:

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ في النهايات المشتقة تساوي صفر

$3 - 3x^2 = 0 \implies 1 - x^2 = 0$ نقسم على 3

$(1 - x)(1 + x) = 0 \implies x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(1) = 2$

$f(-1) = -2$

اشارة $f'(x)$

-1		1

- - - - - -		+ + + + +		- - - - - -

النقاط الحرجة $(1,2)$ و $(-1,-2)$

الدالة متزايدة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

الدالة متناقصة في الفترتين $\{x : x \in R , x > 1\}$

$\{x : x \in R , x < -1\}$

نقطة نهاية عظمى محلية $(1,2)$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-1,-2)$

التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب: في نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر

$f''(x) = -6x \implies -6x = 0 \implies x = 0$

$f(0) = 3(0) - 0^3 = 0$

اشارة $f''(x)$

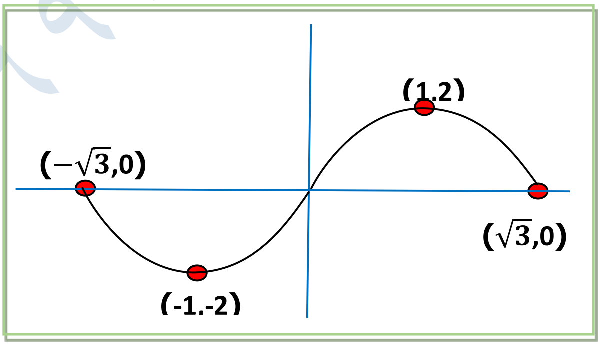
0

+ + + + + + +		- - - - - - - - - -

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x > 0\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x < 0\}$

$(0,0)$ نقطة انقلاب.



3) $f(x) = (x - 1)^3$

$f(0) = (0 - 1)^3 = -1$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(0,-1)$

$f(x) = (x - 1)^3 = 0 \implies (x - 1)^3 = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$

نقاط التقاطع مع محور السينات هي $(1,0)$

- النهايات العظمى والصغرى:

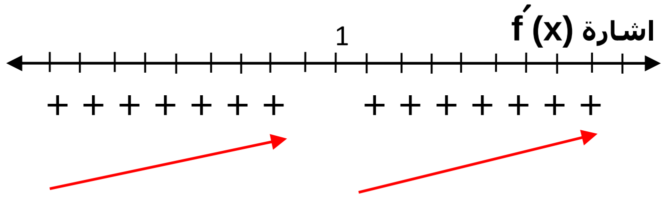
$f'(x) = 3(x - 1)^2 \implies 3(x - 1)^2 = 0 \implies (x - 1)^2 = 0$ قسمة الطرفين على 3

$x - 1 = 0$ الجذر التربيعي للطرفين

$x = 1$

$f(1) = (1 - 1)^3 = 0$

الدالة متزايدة في مجالها والنقطة (1,0) نقطة حرجة



- التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

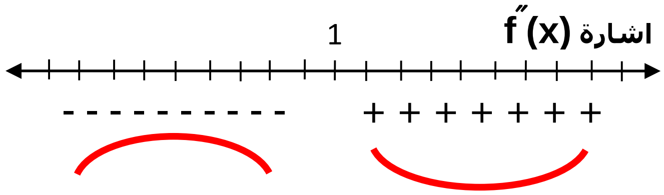
$f''(x) = 6(x - 1) \Longrightarrow 6(x - 1) = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

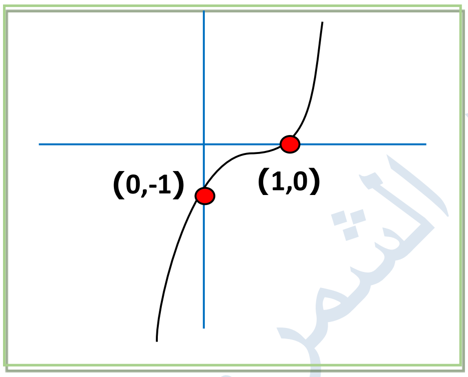
$f(1) = 0$

منطقة التحدب $\{x : x \in R , x < 1\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R , x > 1\}$

(1,0) نقطة انقلاب.





4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$f(0) = 0^3 - 2(0)^2 + 1 = 1$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (0,1)

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \implies x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

لا يمكن تحليل المعادلة لذلك نهمل نقاط التقاطع مع محور السينات.

- النهايات العظمى والصغرى:

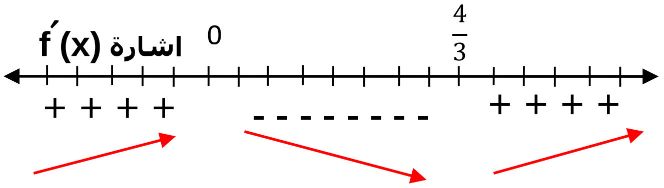
في النهايات المشتقة تساوي صفر $f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$

$3x^2 - 4x = 0 \implies x(3x-4) = 0 \implies x = 0$

$3x - 4 = 0 \implies 3x = 4 \implies x = \frac{4}{3}$

$f(0) = 1$

$f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3})^3 - 2(\frac{4}{3})^2 + 1 = \frac{64}{27} - 2\frac{16}{9} + 1 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 1 = \frac{64-96+27}{27} = \frac{-5}{27}$



الدالة متزايدة في الفترتين: $\{x : x \in R , x < 0\}$

$\{x : x \in R , x > \frac{4}{3}\}$

الدالة متناقصة في الفترة $\{x : x \in R , 0 < x < \frac{4}{3}\}$

نقطة نهاية عظمى محلية (0,1)

نقطة نهاية صغرى محلية $(\frac{4}{3}, \frac{-5}{27})$

- التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

في نقاط الانقلاب المشتقة الثانية تساوي صفر $f''(x) = 6x - 4 = 0$

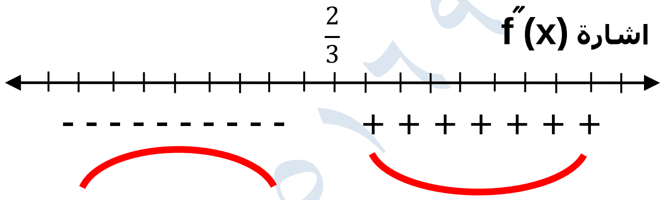
$6x - 4 = 0 \implies 6x = 4 \implies x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

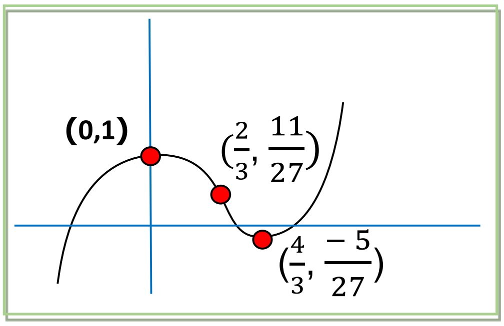
$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{8}{27} - 2\frac{4}{9} + 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{8-24+27}{27} = \frac{11}{27}$

مناطق التحدب $\{x : x \in R , x < \frac{2}{3}\}$

مناطق التقعر $\{x : x \in R , x > \frac{2}{3}\}$

نقطة الانقلاب $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$



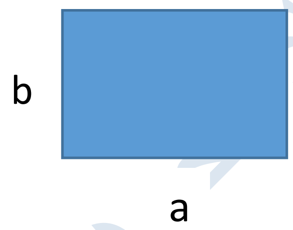


تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى:

1- نعرف المتغيرات.
2- نعرف دالة القيمة المطلوبة باكبر او اقل ما يمكن.
3- نوحد المتغيرات في دالة القيمة المطلوبة بدلالة متغير واحد.
4- نستخرج مشتقة دالة القيمة.
5- نساوي المشتقة بالصفر لاستخراج قيمة المتغير (اذا ظهرت اكثر من قيمة للمتغير نذهب الى خط الاعداد)
6- نحسب قيمة المتغير الاخر ان وجد.
7- نحسب دالة القيمة اذا طلب ذلك.

مثال 1/ جد ابعاد اكبر مساحة لقطعة ارض مستطيله محيطها 60 متر.

الحل/ نفرض ابعاد قطعة الارض a و b ومساحتها A



محيط المستطيل 60

$2(a + b) = 60$

$a + b = 30$

$b = 30 - a$

$A = a . b$

$A = a . b = a . (30 - a) = 30a - a^2$

$A' = 30 - 2a$

$A' = 0$ المشتقة تساوي صفر عند النهايات

$30 - 2a = 0 \Longrightarrow 2a = 30 \Longrightarrow a = 15$ متر

$b = 30 - a = 30 - 15 \Longrightarrow b = 15$ متر

مثال 2/ جد عددين مجموعهما يساوي 20 اذا كان:

a) حاصل ضربهما اكبر ما يمكن.
b) مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن.

الحل/

a) نفرض العدد الاول هو x والعدد الثاني هو z وان حاصل ضرب العددين هو y بذلك تكون دالة y هي:

$y = x . z$

$x + z = 20$ مجموع العددين يساوي 20

$z = 20 - x$

نعوض z في دالة y:

$y = x . z = x . (20 - x) \Longrightarrow y = 20x - x^2$

$y' = 20 - 2x$

$y' = 0 \Longrightarrow 20 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 20 \Longrightarrow x = 10$

$z = 20 - 10 \Longrightarrow z = 10$

b) نفرض العدد الاول هو x والعدد الثاني هو z وان حاصل مجموع مربعي العددين هو y بذلك تكون دالة y هي:

$y = x^2 + z^2$

بما ان مجموع العددين يساوي 20 فان:

$x + z = 20$

$z = 20 - x$

نعوض في دالة y:

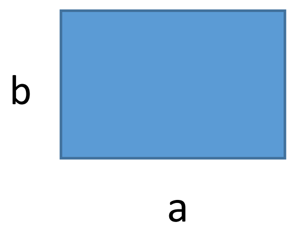
$y = x^2 + z^2 = x^2 + (20 - x)^2 = x^2 + 400 - 40x + x^2 = 2x^2 - 40x + 400$

$y' = 4x - 40 \Longrightarrow y' = 0 \Longrightarrow 4x - 40 = 0 \Longrightarrow 4x = 40 \Longrightarrow x = 10$

$z = 20 - 10 \Longrightarrow z = 10$

مثال 3/ جد ابعاد اكبر مستطيل محيطه 40 متر.**(وزاري 2011 دور 1)**

الحل/ نفرض مساحة المستطيل A وابعاده a و b :



محيط المستطيل 40

$2(a + b) = 40$

$a + b = 20$

$b = 20 - a$

$A = a \cdot b$

$A = a \cdot b = a \cdot (20 - a) = 20a - a^2$

$A' = 20 - 2a$

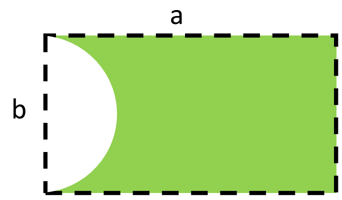
$A' = 0 \implies 20 - 2a = 0 \implies 2a = 20$

$a = 10$ متر

$b = 20 - a = 20 - 10 \implies b = 10$ متر

مثال 4/ من مستطيل محيطه 120 سم قطعت منطقة على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين للمستطيل ، جد ابعاد ذلك المستطيل لكي تكون المساحة المتبقية منه بعد القطع اكبر ما يمكن.**(وزاري 2012 دور 2)**

الحل/ نفرض ابعاد المستطيل a و b ومساحته بعد القطع A:



محيط المستطيل يساوي 120

$2(a + b) = 120$

$a + b = 60$

$a = 60 - b$

$A_1 = a \cdot b$ **مساحة المستطيل الكلية قبل القطع**

$A_2 = \frac{11\,b^2}{28}$ **مساحة نصف دائرة قطرها b**

$A = A_1 - A_2 = a \cdot b - \frac{11\,b^2}{28} = (60 - b) \cdot b - \frac{11\,b^2}{28}$

$A = 60b - b^2 - \frac{11\,b^2}{28} = 60b - \frac{39\,b^2}{28}$

$A' = 60 - \frac{78b}{28} = 60 - \frac{39b}{14}$

$A' = 0 \implies 60 - \frac{39b}{14} = 0 \implies \frac{39b}{14} = 60$

$b = \frac{14\ .\ 60}{39} = \frac{14\ .\ 20}{13} = \frac{280}{13}$ متر **طول الضلع الصغير**

$a = 60 - b = 60 - \frac{280}{13} = \frac{780-280}{13} = \frac{500}{13}$ متر **طول الضلع الكبير**

مثال 5/ جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن. **(وزاري 2013 تمهيدي)**

الحل/ نفرض العدد a وزيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه y

$y = 3a^2 - a^3$

ملاحظة/ نجد هنا ان دالة القيمة المطلوبة تحوي متغير واحد هو a اذا يمكننا ان نشتق مباشرة.

$y' = 6a - 3a^2$

$y' = 0 \implies 6a - 3a^2 = 0 \implies 3a(2 - a) = 0 \implies a = 0$ تهمل

$\therefore\ a = 2$

مثال 6/ جد العدد الذي يكون الفرق بين اربعة امثاله و مربعه اكبر ما يمكن.

الحل/ نفرض العدد هو a ونفرض الفرق بين اربعة امثاله ومربعه هو y

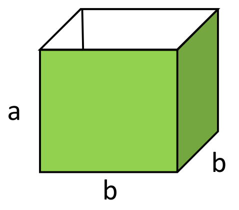
$y = 4a - a^2 \implies y' = 4 - 2a \implies y' = 0 \implies 4 - 2a = 0$

$2a = 4 \implies a = 2$

مثال 7/ يراد صنع حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه 864 متر مكعب اوجد **اقل مساحة** من الالواح يمكن ان تستخدم في صنعه.

الحل/ نفرض ابعاد القاعدة b والارتفاع a ومساحـــــة الالواح هي A :

مساحة الالواح تساوي مساحة الاسطح الجانبية الاربعة زائدا مساحة القاعدة لانه بدون غطاء:



من حجم الصندوق

$V = ab^2 = 864$

$a = \frac{864}{b^2}$

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
1	

$A = 4ab + b^2 = 4(\frac{864}{b^2})b + b^2 = \frac{3456}{b} + b^2$

$A' = -\frac{3456}{b^2} + 2b = 0 \implies 2b = \frac{3456}{b^2}$

$b^3 = \frac{3456}{2} = 1728 \implies b = 12\ m$

$a = \frac{864}{12^2} = \frac{864}{144} = 6\ m$

نعوض قيمة a و b في الدالة A :

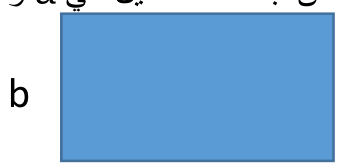
$A = 4 . 12 . 6 + 12^2$

$A = 288 + 144$

$A = 432\ m^2$ اقل مساحة من الالواح

مثال 8/ جد **اقل محيط** ممكن لمستطيل مساحته 100 سم^2.

الحل/ نفرض ابعاد المستطيل هي a و b ومحيطه S



مساحة المستطيل 100

$a . b = 100$

$b = \frac{100}{a}$

$S = 2(a + b) = 2(a + \frac{100}{a}) = 2a + \frac{200}{a}$

$S' = 2 - \frac{200}{a^2}$

$S' = 0 \implies 2 - \frac{200}{a^2} = 0 \implies \frac{200}{a^2} = 2$

$a^2 = 100 \Rightarrow a = \pm 10$

$\therefore a = 10\ cm^2$ لا يوجد بعد بالسالب

$b = \frac{100}{a} = \frac{100}{10} = 10\ cm^2$

$S = 2(a + b) = 2(10 + 10) \implies S = 40\ cm$ اقل محيط ممكن للمستطيل

مثال 9/ اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة معينة هي $c(x) = \frac{1}{9}x^2 + 6x + 100$ جد حجم الانتاج الذي عنده يكون معدل الكلفة اقل ما يمكن.

الحل/ اقل معدل كلفة عند $Ac' = 0$:

$Ac = \frac{c(x)}{x} = \frac{\frac{1}{9}x^2 + 6x + 100}{x} = \frac{1}{9}x + 6 + \frac{100}{x}$

$Ac' = \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2}$

$Ac' = 0 \implies \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2} = 0 \implies \frac{100}{x^2} = \frac{1}{9} \implies x^2 = 900 \implies x = \pm 30$

$\therefore x = 30$

اقل معدل كلفة عندما يكون حجم الانتاج = 30 وحدة

حلول التمارين 3-7

-1 جد عددين مجموعهما 15 وحاصل ضرب احدهما بمربع الاخر اكبر ما يمكن. (وزاري 2013 دور اول)

الحل/ نفرض العدد الاول x والعدد الثاني z:

$x + z = 15 \implies z = 15 - x$

$y = z \cdot x^2 = (15 - x) \cdot x^2 = 15x^2 - x^3$

$y' = 30x - 3x^2 = 0 \implies 30x - 3x^2 = 0 \implies 3x(10 - x) = 0$ عامل مشترك $3x$

$x = 0 \ , x = 10 \implies \therefore \ x = 10$

$z = 15 - x = 15 - 10 = 5$

-2 ما العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن.

الحل/ نفرض العدد x وزيادته على مربعه y :

$y = x - x^2$

$y' = 1 - 2x = 0 \implies 1 - 2x = 0 \implies 2x = 1 \implies \therefore x = \frac{1}{2}$

-3 جد عددين موجبين مجموعهما 15 وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر اكبر ما يمكن.

الحل/ نفرض العدد الاول a والعدد الثاني b:

$a + b = 15 \Rightarrow b = 15 - a$

$y = a^3 \cdot b^2 = a^3 \cdot (15 - a)^2 = a^3 \cdot (225 - 30a + a^2) = 225a^3 - 30a^4 + a^5$

$y' = 675a^2 - 120a^3 + 5a^4$

$y' = 5a^2(135 - 24a + a^2)$ عامل مشترك $5a^2$

$y' = 0 \Rightarrow 5a^2(135 - 24a + a^2) = 0$

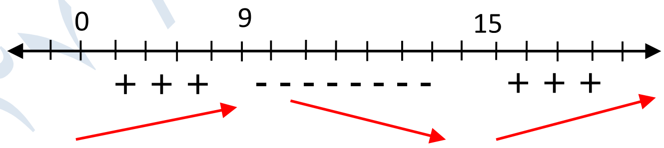
$a = 0$

$a^2 - 24a + 135 = 0$

$(a - 15)(a - 9) = 0$

$a = 15 \ , \ a = 9$

3	135
3	45
3	15
5	5



$\therefore a = 9$

$b = 15 - a = 15 - 9 = 6$

-4 جد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن. (وزاري 2012 دور 3)

الحل/ نفرض العدد الاول a والعدد الثاني b وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر y:

$a + b = 10$

$b = 10 - a$

$y = a^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot (10 - a)^2 = a^2 \cdot (100 - 20a + a^2) = 100a^2 - 20a^3 + a^4$

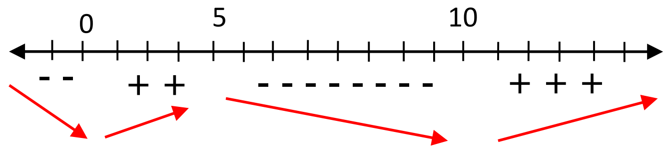
$y' = 200a - 60a^3 + 4a^3$

عامل مشترك $4a$

$y' = 4a(50 - 15a + a^2)$

$y' = 0 \implies 4a(50 - 15a + a^2) = 0 \implies a = 0$

$a^2 - 15a + 50 = 0 \implies (a - 5)(a - 10) = 0 \implies a = 5 \ , \ a = 10$



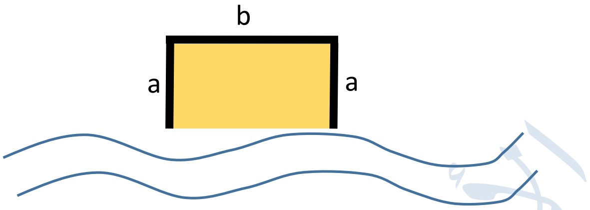
$\therefore a = 5$ نهاية عظمى

$b = 10 - a = 10 - 5 = 5$

5- قطعة ارض مستطيله الشكل يحدها نهر من احد جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله 100 متر.

الحل/ نفرض ابعاد الارض كما مبين بالرسم ومحيط الارض هو S

الجهة التي يحدها نهر لا تحتاج لسياج لذلك نحسب المحيط S بالمعادلة التالية:



من محيط الارض

$S = 2a + b = 100$

$b = 100 - 2a$

$A = a \,.\, b = a \,.\, (100 - 2a) = 100a - 2a^2$

$A' = 100 - 4a$

$A' = 0 \implies 100 - 4a = 0$

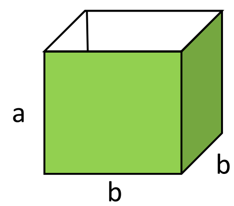
$4a = 100 \implies a = 25\ m$

$b = 100 - 2a = 100 - 2.25 = 50\ m$

$A = a \,.\, b = 25 \,.\, 50 = 1250\ m^2$

6- حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة وحجمه $108m^3$ جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن. **(وزاري 2012 دور اول)**

الحل/ ليكن طول ضلع القاعدة b والارتفاع a



الحجم $= ab^2 = 108$

$a = \frac{108}{b^2}$

$A = 4ab + b^2 = 4(\frac{108}{b^2})b + b^2 = 4\frac{108}{b} + b^2$

$A' = -4\frac{108}{b^2} + 2b = 2(b - 2\frac{108}{b^2})$

$A' = 0 \implies 2(b - 2\frac{108}{b^2}) = 0$

$b - 2\frac{108}{b^2} = 0 \implies b = 2\frac{108}{b^2}$

$b^3 = 2 \,.\, 108 = 216$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$b = \sqrt[3]{2^3 \,.\, 3^3} = 2 \,.\, 3 \implies b = 6\ m$

$a = \frac{108}{6^2} = \frac{108}{36} = 3\ m$

$A = 4 \,.\, 6 \,.\, 3 + 6^2 = 72 + 36$

$A = 108\ m^2$ اقل مساحة من الالواح

7- اطلقت رصاصة الى الاعلى وكان ارتفاعها(m) متر في نهاية t من الثواني بحيث $m = 224t - 16t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل اليه الرصاصة.

الحل/توضيح/المطلوب حساب اكبر قيمة لـ m وهي عندما تكون مشتقة m تساوي صفر:

$m = 224t - 16t^2$

$m' = 224 - 32t$

عند اعلى نقطة المشتقة = صفر

$m' = 0 \implies 224 - 32t = 0 \implies 32t = 224 \implies t = \frac{224}{32} = 7$ ثانية

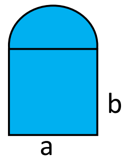
عند الزمن 7 ثانية نهاية عظمى اذا نحسب الارتفاع m عند الزمن 7 ثانية:

$m = 224 \,.\, 7 - 16(7)^2 = 1568 - 784 = 784$ متر

اعلى ارتفاع تصل اليه الرصاصة 784 متر

8- نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل m8 جد ابعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن. **(وزاري 2013 دور 2)**

الحل/ نفرض ابعاد المستطيل a و b ومساحة النافذة A



$2(a + b) = 8$

$a + b = 4$

$b = 4 - a$

$A = a\,.\,b + \frac{11\,a^2}{28} = a.(4 - a) + \frac{11\,a^2}{28} = 4a - a^2 + \frac{11\,a^2}{28}$

$A' = 4 - 2a + \frac{11\,a}{14}$

$A' = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 - 2a + \frac{11\,a}{14} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 + \frac{-28a + 11\,a}{14} = 0$

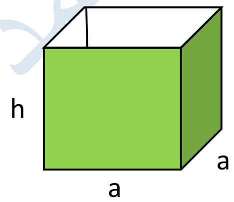
$4 - \frac{17a}{14} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{17a}{14} = 4 \quad \Longrightarrow \quad 17a = 56$

$a = \frac{56}{17} m$

$b = 4 - a = 4 - \frac{56}{17} = \frac{68-56}{17} = \frac{12}{17} m$

-9 في ورشة للنجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل بدون غطاء ، جد ابعاد الصندوق لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان مجموع محيط قاعدته وارتفاعه 90 m.

الحل/ نفرض ان طول ضلع القاعدة هو a وارتفاع الصندوق هو h:



مجموع محيط قاعدة الصندوق وارتفاعه 90 متر:

$90 = 4a + h$

$h = 90 - 4a$

$V = a^2\,.\,h$

$V = a^2\,.(90 - 4a)$

$V = 90a^2 - 4a^3$

$V' = 180a - 12a^2$

$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad 180a - 12a^2 = 0$

$12a(15 - a) = 0$

$a = 0$ تهمل

$a = 15\ m$

$h = 90 - 4a = 90 - 4\,.\,15 = 90 - 60$

$h = 30m$

-10 اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما هي $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 40$ جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة اقل ما يمكن.

الحل/ اقل معدل كلفة عند $Ac' = 0$:

$Ac = \frac{c(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 40}{x}$

$Ac = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{40}{x}$

$Ac' = \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2}$

$Ac' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2} = 0$

$\frac{40}{x^2} = \frac{1}{2}$

$x^2 = 80$

2	80
2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$x = \sqrt{80} = \sqrt{16\,.\,5} = 4\sqrt{5}$ حجم الانتاج

ملزمة الرياضيات
السادس الادبي
2016 - 2015

الفصل الرابع
التكامل

الأستاذ: أحمد الشمري
07704516937

المرسل للخدمات الطباعية
المنصور – مجاور جامع حي دراغ
07703458937

الفصل الرابع(التكامل): وهو عملية عكس الاشتقاق وهناك نوعين من التكامل الاول التكامل غير المحدد والثاني التكامل المحدد.

التكامل غير المحدد: الغرض منه استنتاج الدالة من خلال مشتقتها ويرمز له:

$$f(x) = \int f'(x)\,.\,dx$$

اذا فرضنا ان المشتقة يعبر عنها بالدالة $f'(x) = x^n$ فان عملية تكاملها ينتج $f(x)$ وكما مبين:

$$f(x) = \int x^n.\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث يمثل الرمز c ثابت عددي يتم استنتاجه من خلال معطيات اخرى.

مثال 1/ اذا كانت الدالة $f(x)$ تمر بالنقطة $(1,0)$ ومشتقتها هي $f'(x) = x^3$ جد تلك الدالة.

الحل/

$$f(x) = \int f'(x)\,.\,dx = \int x^3\,.\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c \implies f(x) = \frac{x^4}{4} + c$$

الدالة تمر بالنقطة $(1,0)$ اذا $f(1) = 0$:

$$f(1) = \frac{1^4}{4} + c = 0 \implies \frac{1}{4} + c = 0 \implies c = -\frac{1}{4}$$

اذا الدالة هي: $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$

مثال 2/ جد تكامل الدالة $f(x) = 1$.

الحل/ اذا كان احد الحدود لا يحوي المتغير x فان ذلك يعني ان المتغير x مرفوع للاس صفر كما مبين:

$f(x) = 1 = 1.\,x^0 = x^0$

$$\int x^0\,.\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

قواعد التكامل المحدد:

1- تكامل دالة في ثابت يساوي الثابت في تكامل الدالة:

$$\int [a * f'(x)]\,.\,dx = a * \int f'(x)\,.\,dx$$

2- تكامل مجموع او طرح دالتين يساوي مجموع او طرح تكامل كل دالة:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3- تكامل دالة مرفوعة للقوة n في مشتقة داخل القوس تساوي الدالة مرفوعة للاس n+1 مقسومة على n+1:

$$\int [f(x)]^n\,.\,f'(x)\,.\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال 3/ جد كل من التكاملات التالية:

1) $\int (3x^2 + 5).\,dx = 3\int x^2.\,dx + 5\int x^0.\,dx = 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^1}{1} + c = x^3 + 5x + c$

2) $\int (x^2 + 1)(2x - 3).\,dx$

ملاحظة/بما ان القوس الثاني لا يمثل مشتقة داخل القوس الاول نفتح الاقواس:

$$= \int (x^2+1)(2x-3).dx = \int (2x^3+2x-3x^2-3).dx$$

$$= 2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} - 3x + c \quad = \frac{x^4}{2} + x^2 - x^3 - 3x + c$$

3) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right).dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3\,(x)^{\frac{-2}{3}} - 1\right).dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - x + c = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - 9\,x^{\frac{1}{3}} - x + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 9\,\sqrt[3]{x} - x + c$$

4) $\int \frac{x^4-8x}{x-2}dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}dx = \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$$= \int x(x^2+2x+4)dx = \int (x^3+2x^2+4x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + c$$

5) $\int (x^3+7)^5.x^2.dx$

مشتقة داخل القوس الاول هي $3x^2$ وبما ان x^2 موجود خارج القوس نضرب الدالة بـ $\frac{3}{3}$ كما مبين:

$$= \frac{3}{3}\int (x^3+7)^5.x^2.dx = \frac{1}{3}\int (x^3+7)^5.3x^2.dx$$

لدينا دالة $(x^3+7)^5$ مضروبة بمشتقة داخل القوس اذا نطبق القاعدة الثالثة:

$$= \frac{1}{3}.\frac{(x^3+7)^6}{6} + c = \frac{(x^3+7)^6}{18} + c$$

6) $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int (x^2-4x+5)^{-2}.(x-2)dx$

ملاحظة/ مشتقة داخل القوس الاول هي: (2x-4) = 2(x-2)

وبما ان (x-2) موجودة خارج القوس فاننا نطبق القاعدة الثالثة بعد ان نضرب التكامل بـ $\frac{2}{2}$

$$= \frac{2}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}.(x-2)dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}.2(x-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2(x^2-4x+5)} + c$$

7) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}}dx = \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}.\ x^3dx$

لنحصل على مشتقة داخل القوس نضرب بـ $\frac{-4}{-4}$ كما مبين:

$$= \frac{-4}{-4}\int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}.\ x^3dx = \frac{1}{-4}\int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}.\ (-4x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{-4}.\frac{(5-x^4)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = \frac{1}{-4}.\frac{5}{4}(5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c = \frac{-5}{16}\sqrt[5]{(5-x^4)^4} + c$$

$$8)\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,.dx$$

(وزاري 2013 تمهيدي)

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,.dx$$ عامل مشترك x^3

$$= \int x\,.\sqrt[3]{(3-5x^2)}\,.dx = \int x\,.(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}.dx$$

مشتقة داخل القوس $-10x$ اذا نضرب بـ $\frac{-10}{-10}$

$$= \frac{-10}{-10}\int x\,.(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}.dx = \frac{1}{-10}\int(-10x)\ (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}.dx$$

نطبق القاعدة الثالثة:

$$= \frac{1}{-10}\,.\,\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{40}\,.\,\sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$$

$$9)\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}} = \int (x^2-14x+49)^{\frac{-1}{5}}\,.dx = \int ((x-7)(x-7))^{\frac{-1}{5}}\,.dx$$

$$= \int ((x-7)^2)^{\frac{-1}{5}}\,.dx = \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}\,.dx$$

مشتقة داخل القوس 1 وهو موجود ضمنيا خارج القوس اذا نطبق القاعدة الثالثة:

$$= \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\,.\,\sqrt[5]{(x-7)^3} + c$$

$$10)\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}dx$$

نحلل البسط فرق بين مربعين:

$$= \int \frac{((3x^2-4)-4)((3x^2-4)+4)}{x^2}dx = \int \frac{(3x^2-8)(3x^2)}{x^2}dx = \int 3\,.(3x^2-8)\,.dx$$

$$= 3\int (3x^2-8)\,.dx = 3\left(\frac{3x^3}{3} - 8x\right) + c = 3x^3 - 24x + c$$

$$11)\int \sqrt{z^2+3z+2}\,.dx$$

ملاحظة مهمة/ بما ان التكامل بدلالة dx اي ان اي رمز عدى الـ x يعتبر عدد ثابت وفي هذا المثال فان الرمز z يمثل عدد ثابت لذلك يمكننا ان نخرجه من عملية التكامل حسب القاعدة الاولى:

$$= \sqrt{z^2+3z+2}\,.\int x^0\,.dx = (\sqrt{z^2+3z+2}\,).x + c$$

حلول التمارين 1-4

جد تكاملات كل مما يأتي:

$$1)\int (6x^2-4x+3)dx$$ (وزاري 2013 دور 1)

$$= \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c = 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$$

$$2)\int (3x-1)(x+5)dx$$ (وزاري 2011 دور 1)

$$= \int (3x^2 - x + 15x - 5)dx = \int (3x^2 + 14x - 5)dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 5x + c = x^3 + 7x^2 - 5x + c$$

3) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2 dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}(x + 2\sqrt{x} + 1)dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

4) $\int \frac{x^3+27}{x+3} dx$

$$= \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} dx = \int (x^2 - 3x + 9)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

5) $\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5} dx = \frac{1}{5}\int \left(\frac{x^3}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}\right) dx$

$$= \frac{1}{5}\int (x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-5})\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-4}}{-4}\right) + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{x} - \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{4x^4}\right) + c = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}\right) + c$$

6) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}} dx = \int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}} . (x^2+2)\,dx$

مشتقة داخل القوس $(3x^2+6)$ اذا نضرب بـ $\frac{3}{3}$:

$$= \frac{3}{3}\int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}} . (x^2+2)\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}} . (3x^2+6)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{3} . \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2} + c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2} + c$$

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2\right) . x^{\frac{-1}{3}}\, dx$

مشتقة داخل القوس $(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})$ اذا نضرب $\frac{2}{3} . \frac{3}{2}$:

$$= \frac{2}{3} . \frac{3}{2}\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2\right) . x^{\frac{-1}{3}}\, dx = \frac{3}{2}\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2\right) . \left(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}\right) dx = \frac{3}{2} . \frac{(x^{\frac{2}{3}}+2)^2}{2} + c$$

$$= \frac{3}{4} . \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^2 + c$$

طريقة ثانية للحل:

$$= \int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} . x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{3}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{3}}\right) dx$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 3\sqrt[3]{x^2} + c$$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}} = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+8)(x+8)}} = \int \frac{]dx}{\sqrt[5]{(x+8)^2}} = \int (x+8)^{\frac{-2}{5}} dx$

مشتقة داخل القوس تساوي 1 :

$$= \frac{(x+8)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{(x+8)^3} + c$$

9) $\int \sqrt[7]{2x^9 - 3x^7}\, dx = \int \sqrt[7]{x^7(2x^2 - 3)}\, dx$ عامل مشترك x^7

$$= \int x\sqrt[7]{2x^2 - 3}\, dx$$

$$= \int x(2x^2 - 3)^{\frac{1}{7}} dx$$

مشتقة داخل القوس 4x اذا نضرب بـ $\frac{4}{4}$:

$$= \frac{1}{4}\int 4x(2x^2 - 3)^{\frac{1}{7}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2 - 3)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{32}\sqrt[7]{(2x^2 - 3)^8} + c$$

10) $\int (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (3x^2 + x^{\frac{-1}{2}})dx$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x^3 + 2\sqrt{x} + c$$

11) $\int \frac{y\, dx}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}$

بما ان المطلوب هو التكامل للمتغير x كونه وضع الرمز dx اذا يعامل الرمز y على انه ثابت وبذلك يكون التكامل كما مبين:

$$= \frac{y}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}\int dx = \frac{y}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}(x + c) = \frac{y \cdot x}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}} + c$$

ان المقدار $\frac{y}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}$ يمثل قيمة ثابتة واذا ضربناه بالثابت c فان الناتج سيكون ثابت جديد يمكننا ان نعتبره c.

12) $\int \frac{x^4-16}{x+2} dx$ (وزاري 2013 دور 2)

$$= \int \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x + 2} dx = \int \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x + 2} dx$$

$$= \int (x - 2)(x^2 + 4)\, dx = \int (x^3 + 4x - 2x^2 - 8)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - 8x + c = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - 8x + c$$

13) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\, dx$

رحلة التفوق في السادس

$$= \int (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$$

14) $\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\, dx = \int (1-3x)^{\frac{2}{5}}\, dx$

مشتقة داخل القوس 3- اذا نضرب ب $\frac{-3}{-3}$:

$$= \frac{1}{-3}\int (1-3x)^{\frac{2}{5}}(-3)\, dx = \frac{1}{-3} \cdot \frac{(1-3x)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \sqrt[5]{(1-3x)^7} + c = -\frac{5}{21} \cdot \sqrt[5]{(1-3x)^7} + c$$

15) $\int x^2 . \sqrt{x^3+4}\, dx = \int x^2 . (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\, dx$

مشتقة داخل القوس $3x^2$ اذا نضرب ب $\frac{3}{3}$:

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2 . (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} . \frac{2}{3} . \sqrt{(x^3+4)^3} + c$$

$$= \frac{2}{9} . \sqrt{(x^3+4)^3} + c$$

16) $\int x(\sqrt{x^3}+4)\, dx = \int (x.\sqrt{x^3} + 4x)\, dx = \int (x.x^{\frac{3}{2}} + 4x)\, dx = \int (x^{\frac{5}{2}} + 4x)\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{4x^2}{2} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + 2x^2 + c$$

التطبيقات الهندسية للتكامل غير المحدد:

اذا اردنا ايجاد دالة من خلال مشتقتها الاولى فاننا نتبع الخطوات التالية:

1- نكامل الدالة ونضيف الثابت c.

2- نبحث عن نقطة (x,y) تنتمي لمنحني الدالة ونعوضها لنحسب قيمة الثابت c.

اذا اردنا ايجاد دالة من خلال مشتقتها الثانية بمعلومية ميل ونقطة فاننا نتبع الخطوات التالية:

1- نكامل الدالة لنحصل على $f'(x)$ ونضيف ثابت تكامل k.

2- نبحث عن نقطة فيها الاحداثي x معلوم وميل المماس معلوم
(عند النهايات والنقاط الحرجة الميل = 0)

3- نعوض قيمة الميل بدل من $f'(x)$ وقيمة x في الدالة لنجد قيمة k.

4- نكامل $f'(x)$ لنحصل على $f(x)$ ونضيف ثابت التكامل c.

5- نعوض النقطة المعلومة (x,y) لنجد قيمة ثابت التكامل c.

اذا اردنا ايجاد دالة من خلال مشتقتها الثانية بمعلومية نقطتين تنتميان للدالة فاننا نتبع الخطوات التالية:

1- نكامل الدالة لنحصل على $f'(x)$ ونضيف ثابت تكامل k.

2- نكامل $f'(x)$ لنحصل على $f(x)$ ونضيف ثابت التكامل c.

3- نعوض النقطتين المعلومتين لنحصل على معادلتين بمجهولين k ، c.

4- نحل المعادلات لنجد قيمة c , k.

مثال 1/ اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة (x,y) من نقاطه هو $3x^2 - 2x + 1$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (2,3).

الحل/ بما ان مشتقة الدالة تمثل ميل المماس عند اي نقطة اذا:

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f(x) = \int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 - x^2 + x + c$

الدالة تمر بالنقطة (2,3) اذا $f(2) = 3$:

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 + c = 3 \implies 8 - 4 + 2 + c = 3$

$6 + c = 3 \implies c = 3 - 6 = -3 \implies \therefore f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$

مثال 2/ منحني ميله عند كل نقطة (x,y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$ جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة (0,7).

الحل/(وزاري 2012 دور 2)

$f'(x) = x\sqrt{x^2+9}$

$f(x) = \int x\sqrt{x^2+9}\, dx = \int x\,(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, dx$ نضرب بـ $\frac{2}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\,(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} + c$

الدالة تمر بالنقطة (0,7) اذا $f(0) = 7$:

$f(0) = \frac{1}{3}\sqrt{(0^2+9)^3} + c = 7$

$\frac{1}{3}\sqrt{9^3} + c = 7 \implies \frac{1}{3}(\sqrt{9})^3 + c = 7 \implies \frac{1}{3}(3)^3 + c = 7 \implies 9 + c = 7$

$c = 7 - 9 = -2 \implies \therefore f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} - 2$

مثال 3/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x,y) من نقاطه هو 2x - 4 وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3).

الحل/ ميل المماس هي مشتقة الدالة:

$f'(x) = 2x - 4$

$f(x) = \int (2x - 4)\, dx = \frac{2x^2}{2} - 4x + c = x^2 - 4x + c$

ملاحظة/قيمة النهاية تمثل الاحداثي y لنقطة النهاية التي تنتمي لمنحني الدالة ، لذلك نحسب قيمة x عند النهاية الصغرى للمنحني وبما ان ميل المماس عند هذه النهاية يساوي صفر اي المشتقة عند النهاية تساوي صفر اذا:

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies 2x = 4 \implies \therefore x = 2$

النقطة (2,-3) نهاية صغرى للدالة اي انها تنتمي للدالة اذا $f(2) = -3$:

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + c = -3 \implies 4 - 8 + c = -3 \implies c = 4 - 3 = 1$

$\therefore\ f(x) = x^2 - 4x + 1$

مثال 4/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة (x,y) من نقطه هو $x^2 - x - 2$ وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات.

الحل/ميل المماس هو مشتقة الدالة:

$f'(x) = x^2 - x - 2$

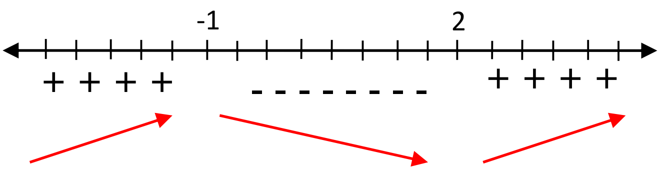
$f(x) = \int (x^2 - x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$

بما ان النهاية العظمى تنتمي لمحور السينات اذا قيمة y عندها تساوي 0 .
المشتقة عند النهايات تساوي صفر :

$f'(x) = x^2 - x - 2 = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \quad , \quad x = -1$

توجد نهايتين لمنحنى الدالة نقوم بفحص اشارة المشتقة لتحديد النهاية العظمى:



عند $x = -1$ نهاية عظمى.

النقطة $(-1 , 0)$ تنتمي لمنحنى الدالة اذا $f(-1) = 0$:

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + c = 0$$

$$\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2+3-12}{6} = \frac{-7}{6}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{7}{6}$$

مثال 5/ جد الدالة التي تحقق $\frac{d^2y}{d^2x} = 12x^2 - 2$ ، $\frac{dy}{dx} = 5$ عند النقطة $(1,2)$.

الحل/ من خلال المشتقة الثانية نكامل مرتين لنحصل على الدالة:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (12x^2 - 2)\, dx = 4x^3 - 2x + c_1$$

عند النقطة $(1,2)$ فان $\frac{dy}{dx} = 5$:

$$4(1)^3 - 2(1) + c_1 = 5 \quad \Longrightarrow \quad 4 - 2 + c_1 = 5 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 3$$

$$y = \int (4x^3 - 2x + 3)\, dx = x^4 - x^2 + 3x + c_2$$

النقطة $(1,2)$ تنتمي لمنحنى الدالة:

$$2 = 1^4 - 1^2 + 3 + c_2 \quad \Longrightarrow \quad 2 = 1 - 1 + 3 + c_2$$

$$c_2 = 2 - 3 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad y = x^4 - x^2 + 3x - 1$$

مثال 6/ جد معادلة المنحنى الذي مشتقته الثانية $(6x)$ ويمر بالنقطتين $(1,6)$ ،$(-1,6)$.

الحل/

$$y'' = 6x$$

$$y' = \int (6x)\, dx = 3x^2 + c_1$$

$$y = \int (3x^2 + c_1)\, dx = x^3 + c_1x + c_2$$

نعوض النقطة $(1,6)$ في الدالة:

$$1 + c_1 + c_2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad c_1 + c_2 = 6-1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 + c_2 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نعوض النقطة $(-1,6)$ في الدالة:

$$-1 - c_1 + c_2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad -c_1 + c_2 = 6 + 1 \quad \Longrightarrow \quad -c_1 + c_2 = 7 \quad \ldots\ldots (2)$$

بالجمع بين 1 و 2:

$$c_1 + c_2 = 5$$
$$-c_1 + c_2 = 7$$

بالجمع

$0 \quad + 2c_2 = 12$

$c_2 = 6$

نعوض في معادلة 1 لنحصل على c_1:

$c_1 = 5 - c_2 \implies c_1 = 5 - 6 \implies c_1 = -1 \implies \quad \therefore \; y = x^3 - x + 6$

مثال 7/ اذا كان ميل منحني عند (x,y) هو $ax - 3x^2$ وكان المستقيم $9x - y - 4 = 0$ مماسا عند $(1,5)$ ، جد معادلته.

الحل/ ميل منحني عند (x,y) هو مشتقة الدالة:

$y' = ax - 3x^2$

ملاحظة/ بما ان المشتقة تحوي الثابت a فاننا نقوم بتعريف قيمته اولا .

$m = \frac{-9}{-1} = 9$ ميل المماس

ملاحظة/ ميل المستقيم من المعادلة يساوي سالب معامل x على معامل y.

ميل المماس عند النقطة $(1,5)$ يساوي مشتقة الدالة عند تلك النقطة :

$y' = ax - 3x^2 \implies 9 = a(1) - 3(1)^2 \implies 9 = a - 3 \implies a = 9 + 3 = 12$

$\therefore \; y' = 12x - 3x^2$

$y = \int (12x - 3x^2)\, dx = 6x^2 - x^3 + c$

النقطة $(1,5)$ تنتمي لمنحني الدالة:

$5 = 6(1)^2 - (1)^3 + c \implies 5 = 6 - 1 + c \implies c = 0$

$\therefore \; y = 6x^2 - x^3$

مثال 8/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة هو $(ax^2 - 6x - 9)$ وللمنحني نقطة انقلاب $(1,-6)$.

الحل/ ميل المماس يساوي مشتقة الدالة:

$y' = ax^2 - 6x - 9$

عند نقاط الانقلاب $(1,-6)$ المشتقة الثانية للدالة تساوي صفر:

$y = 2a(1) - 6 = 0$

$2a - 6 = 0 \implies 2a = 6 \implies a = 3 \implies \quad \therefore \; y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y = \int (3x^2 - 6x - 9)\, dx = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

النقطة $(1,-6)$ تنمي لمنحني الدالة:

$-6 = 1^3 - 3(1)^2 - 9(1) + c \implies -6 = 1 - 3 - 9 + c \implies c = 11 - 6 = 5$

$\therefore \; y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

التطبيق الاقتصادي للتكامل غير المحدد:

دالة الايراد الكلي $M(v)$ حيث v يمثل حجم الانتاج.

دالة الايراد الحدي = $M'(v)$.

دالة السعر = $\frac{M(v)}{\text{الكمية المباعة}}$

اذا كل الانتاج يباع فان الكمية المباعة = حجم الانتاج.

اذا حجم الانتاج = 0 فان الايراد الكلي = 0.

التكلفة الثابتة هي التكلفة عندما الانتاج = 0

مثال 9/ اذا كانت دالة الايراد الحدي هي: $M' = 8 - 6v - 2v^2$ حيث v حجم الانتاج ، جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر.

الحل/ دالة الايراد تساوي تكامل دالة الايراد الحدي:

$$M(v) = \int (8 - 6v - 2v^2)\, dv = 8v - 3v^2 - \frac{2v^3}{3} + c$$

عندما حجم الانتاج $v = 0$ فان الايراد الكلي $M(v) = 0$:

$$M(0) = 8(0) - 3(0)^2 - \frac{2(0)^3}{3} + c = 0 \implies \therefore \quad c = 0$$

$$\therefore \quad M = 8v - 3v^2 - \frac{2v^3}{3}$$

نفرض ان كل ما ينتج يباع اي ان الكمية المباعة = v

$$\text{دالة السعر} = \frac{M(v)}{\text{الكمية المباعة}} = \frac{8v - 3v^2 - \frac{2v^3}{3}}{v}$$

$$\text{دالة السعر} = 8 - 3v - \frac{2v^2}{3}$$

مثال 10/ اذا كانت دالة التكلفة الحدية T' هي $T' = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الانتاج ، جد دالة التكلفة الكلية علما ان $T = 65$ عندما الانتاج يساوي صفر. **(وزاري 2013 دور 1)**

الحل/

$$T = \int (2 + 60v - 5v^2)\, dv = 2v + 30v^2 - \frac{5v^3}{3} + c$$

عند الانتاج = صفر فان $T = 65$:

$$65 = 2(0) + 30(0)^2 - \frac{5(0)^3}{3} + c \implies c = 65$$

$$\therefore \quad T = 2v + 30v^2 - \frac{5v^3}{3} + 65$$

حلول تمارين 2-4

1- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة (1,3). **(2011 دور 1)**

الحل/ ميل المماس يساوي المشتقة:

$$y' = \frac{-2}{x^3}$$

$$y = \int \left(\frac{-2}{x^3}\right) dx = -2\int (x^{-3})dx = -2\,\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$y = \frac{1}{x^2} + c$$

النقطة (1,3) تنتمي لمنحني الدالة:

$$3 = \frac{1}{1^2} + c \implies c = 3 - 1 = 2 \implies \therefore \quad y = \frac{1}{x^2} + 2$$

2- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هو $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها 10.

الحل/ ميل المماس يساوي المشتقة:

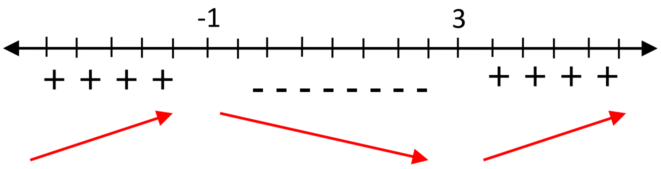
$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$y = \int (3x^2 - 6]x - 9)dx = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

عند النهاية العظمى $y = 10$ وميل المماس يساوي صفر:

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \implies 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \implies 3(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \quad , \quad x = -1$



النهاية العظمى عند النقطة (10 , 1-)

$10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c \implies 10 = -1 - 3 + 9 + c \implies c = 5$

$\therefore \quad y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

-3 جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية = 6x -2 وكان ميله عند النقطة (2,5) يساوي (1-).

(وزاري 2013 تمهيدي و 2013 دور 2)

الحل/

$y'' = 6x - 2$

$y' = \int (6x - 2)\, dx' = 3x^2 - 2x + c$

ميل المماس عند النقطة (2,5) يساوي (1-):

$-1 = 3(2)^2 - 2(2) + c \implies -1 = 12 - 4 + c \implies c = -9 \implies$

$\therefore \quad y' = 3x^2 - 2x - 9$

$y = \int (3x^2 - 2x - 9)\, dx = x^3 - x^2 - 9x + c$

النقطة (2,5) تنتمي لمنحني الدالة:

$5 = 2^3 - 2^2 - 9(2) + c \implies 5 = 8 - 4 - 18 + c \implies c = 19$

$\therefore \quad y = x^3 - x^2 - 9x + 19$

-4 منحني يمر بالنقطتين (3-,2) ، (1,9-) وميله عند (x,y) يساوي ax-5 جد معادلته. **(وزاري 2012 دور 3)**

الحل/ ميل المماس يساوي المشتقة:

$y' = ax - 5$

$y = \int (ax - 5)dx = \frac{ax^2}{2} - 5x + c$

النقطة (3-,2) تقع على المنحني:

$-3 = \frac{a(2)^2}{2} - 5(2) + c \implies -3 = 2a - 10 + c \implies -2a - c = -10 + 3$

$-2a - c = -7$ 1

النقطة (1,9-) تقع على المنحني:

$9 = \frac{a(-1)^2}{2} - 5(-1) + c \implies 9 = \frac{a}{2} + 5 + c \implies \frac{a}{2} + c = 9 + 5$

$\frac{a}{2} + c = 4$ نضرب الطرفين بـ 4

$2a + 4c = 16$ 2

بالجمع بين 1 و 2 :

$$\begin{array}{r} -2a - c = -7 \\ 2a + 4c = 16 \\ \hline 0 + 3c = 9 \end{array}$$ بالجمع

$3c = 9 \implies c = 3$

من معادلة 1 نستخرج قيمة a:

$-2a - c = -7 \implies -2a - 3 = -7 \implies -2a = -7 + 3 = -4 \implies a = 2$

$\therefore \quad y = x^2 - 5x + 3$

5- اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M' = 12 - 8v + v^2$ فأوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ما ينتج يباع. **(وزاري 2013 دور 1)**

الحل/

$$M(v) = \int (12 - 8v + v^2)\, dv = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3} + c$$

اذا كان حجم الانتاج v يساوي صفر فان الايراد يساوي صفر:

$$0 = 12(0) - 4(0)^2 - \frac{(0)^3}{3} + c \implies c = 0$$

$$\therefore \quad M = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3}$$

بما ان كل ما ينتج يباع: دالة السعر $= \dfrac{12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3}}{v} = 12 - 4v - \dfrac{v^2}{3}$

6- اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $T' = 1000 - 5v$ حيث v حجم الانتاج ، فاوجد دالة التكلفة الكلية مع العلم ان التكلفة الثابتة = 150.

الحل/

$$T = \int (1000 - 5v)\, dv = 1000v - \frac{5v^2}{2} + c$$

عند الانتاج = صفر فان T = 150:

$$150 = 1000(0) - \frac{5(0)^2}{2} + c \implies c = 150$$

$$\therefore \quad T = 1000v - \frac{5v^2}{2} + 150$$

رحلة التفوق في السادس

التكامل المحدد: يستخدم التكامل المحدد في حساب المساحة بين المنحنيات وفيه نستخدم نفس قواعد التكامل الغير محدد ولكننا لا نضيف الثابت c لناتج التكامل ويرمز للتكامل المحدد بـ:-

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

حيث نطلق على a الحد الاسفل وعلى b الحد الاعلى للتكامل.

اذا فرضنا ان الدالة g(x) هي مشتقة الدالة f(x) فان عملية حساب قيمة التكامل المحدد تتم عن طريق القانون التالي:

$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$$

اي ان التكامل المحدد للدالة g(x) من a الى b يساوي ناتج طرح قيمة الدالة f(a) من قيمة الدالة f(b).

مثال 1/ جد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)dx$

$= [x^3 + x^2 - 2x]_1^2$ نقوم اولا بحساب التكامل للدالة ولا نظيف الثابت c

نقوم بتعويض الحد الاعلى للتكامل 2 ومن ثم اشارة الطرح وبعده نعوض الحد الاسفل للتكامل 1:

$= [2^3 + 2^2 - 2(2)] - [1^3 + 1^2 - 2(1)] = [8 + 4 - 4] - [1 + 1 - 2] = 8 - 0 = 8$

ناتج التكامل المحدد دائما يكون قيمة عددية كونه يمثل المساحة بين منحني الدالة التي قمنا بتكاملها ومحور السينات او الصادات.

2) $\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 2x .\ (x^2+16)^{-\frac{1}{2}}\ .dx = [\frac{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_0^3 = [2\sqrt{x^2+16}\,]_0^3$

$= \left[2\sqrt{3^2+16}\right] - \left[2\sqrt{0^2+16}\right] = \left[2\sqrt{25}\right] - \left[2\sqrt{16}\right] = 2.5 - 2.4 = 2$

3) $\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx = \int_4^0 (x^2-2x)(x-1)dx$

مشتقة داخل القوس الاول 2x-2 اذا نضرب بـ $\frac{2}{2}$:

$= \frac{1}{2}\int_4^0 (x^2-2x).2(x-1)dx = \frac{1}{2}\int_4^0 (x^2-2x).(2x-2)dx = \frac{1}{2}[\frac{(x^2-2x)^2}{2}]_4^0$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(0^2-2(0))^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{(4^2-2(4))^2}{2}\right] = 0 - \frac{(16-8)^2}{4} = -\frac{(8)^2}{4} = -\frac{64}{4} = -16$

4) $\int_1^{125} (\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}})dx = \int_1^{125} (\frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}-1}}{x^{\frac{2}{3}}})dx = \int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}.\ x^{-\frac{2}{3}}.dx$

مشتقة داخل القوس $\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$ اذا نضرب بـ $\frac{3}{3}$:

$= 3\int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}.\ \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}.dx = 3[\frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_1^{125} = [2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}]_1^{125}$

$= \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{125}-1)^3}\right] - \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\right] = [2\sqrt{(5-1)^3}] - [2\sqrt{(0)^3}]$

$= 2\sqrt{(4)^3} = 2\sqrt{16.4} = 2.4.2 = 16$

5) $\int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})dx = \int_1^4 (x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})dx = [2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^4 = [2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}]_1^4$

$= [2\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{4^3}] - [2\sqrt{1} + \frac{2}{3}\sqrt{1^3}] = [4 + \frac{2}{3}8] - [2 + \frac{2}{3}]$

$= 4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{6}{3} + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$

6) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان: $\int_0^a (2x-1)dx = 42$

الحل/

$\int_0^a (2x-1)dx = [x^2 - x]_0^a = [a^2 - a] - [0^2 - 0] = a^2 - a$

$\therefore \quad a^2 - a = 42$

$a^2 - a - 42 = 0 \implies (a-7)(a+6) = 0 \implies a = 7 \text{ or } a = -6$

7) $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2 + 12x + 36}\,.dx = \int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)(x+6)}\,.dx$

$= \int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)^2}\,.dx = \int_{-6}^{-5} (x+6)^{\frac{2}{3}}\,.dx = [\frac{3}{5}(x+6)^{\frac{5}{3}}]_{-6}^{-5} = [\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+6)^5}]_{-6}^{-5}$

$= \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-5+6)^5}\right] - \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-6+6)^5}\right] = \frac{3}{5}$

8) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_a^2 (3+2x)dx = 6$

الحل/

$\int_a^2 (3+2x)dx = [3x + x^2]_a^2 = [3(2) + 2^2] - [3a + a^2]$

$= 6 + 4 - 3a - a^2 = 10 - 3a - a^2 = 6$

$10 - 3a - a^2 - 6 = 0$ نضرب بـ -1

$a^2 + 3a - 4 = 0 \implies (a+4)(a-1) = 0 \implies a = -4 \text{ or } a = 1$

حلول التمارين 4-3

جد تكاملات كلا مما يأتي:

1) $\int (2x+5)(x+1)dx = \int (2x^2 + 2x + 5x + 5)dx = \int (2x^2 + 7x + 5)dx$

$= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x + c$

2) $\int_{-1}^1 (x+3)(x-2)dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 3x - 6)dx = \int_{-1}^1 (x^2 + x - 6)dx$

$= [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x]_{-1}^1 = \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 6\right] - \left[\frac{-1^3}{3} + \frac{-1^2}{2} + 6\right]$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 - \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{2}{3} - 12 = \frac{-34}{3}$

3) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)dx$ (دور 1 ودور 3 2012)

$= \int (x + 5\sqrt{x})dx = \int (x + 5x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

4) $\int_0^4 \sqrt{x}(x+1)^2dx$ **(وزاري 2011 دور 1)**

$$= \int_0^4 \sqrt{x}(x^2+2x+1)dx = \int_0^4 (x^{\frac52}+2x^{\frac32}+x^{\frac12})dx = [\tfrac27 x^{\frac72}+\tfrac45 x^{\frac52}+\tfrac23 x^{\frac32}]_0^4$$

$$= [\tfrac27 4^{\frac72}+\tfrac45 4^{\frac52}+\tfrac23 4^{\frac32}] - [\tfrac27 0^{\frac72}+\tfrac45 0^{\frac52}+\tfrac23 0^{\frac32}] = [\tfrac27 2^7+\tfrac45 2^5+\tfrac23 2^3]$$

$$= [\tfrac27\,128+\tfrac45 32+\tfrac23\,8] = \frac{256}{7}+\frac{128}{5}+\frac{16}{3} = \frac{3840+2688+560}{105} = \frac{7088}{105}$$

5) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2dx$

$$= \int \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx = \int x^{\frac12}(x+4x^{\frac12}+4)dx = \int (x^{\frac32}+4x+4x^{\frac12})dx$$

$$= \frac25 x^{\frac52}+2x^2+8x^{\frac32}+c = \frac25\sqrt{x^5}+2x^2+8\sqrt{x^3}+c$$

6) $\int_{-1}^0 \frac{x^3-27}{x-3}dx = \int_{-1}^0 \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}dx = \int_{-1}^0 (x^2+3x+9)dx$

$$= [\tfrac13 x^3+\tfrac32 x^2+9x]_{-1}^0 = \left[\tfrac13 0^3+\tfrac32 0^2+9\,.\,0\right] - \left[\tfrac13(-1)^3+\tfrac32(-1)^2+9(-1)\right]$$

$$= -\left[-\tfrac13+\tfrac32-9\right] = \frac13-\frac32+9 = \frac{2-9+54}{6} = \frac{47}{6}$$

7) $\int \frac{x^4-1}{x-1}dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}dx$

$$= \int (x+1)(x^2+1)dx = \int (x^3+x+x^2+1)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x+c$$

8) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **(وزاري 2013 دور 1 و تمهيدي)**

$$= \int_0^1 x\,(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac12\int_0^1 2x\,(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx = [2(x^2+1)^{\frac12}]_0^1$$

$$= [2(1^2+1)^{\frac12}] - [2(0^2+1)^{\frac12}] = [2(2)^{\frac12}] - [2] = 2\sqrt2-2$$

9) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx = \int (x^2+1)(x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}}\,dx$

$$= \frac13\int 3(x^2+1)(x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac13\,.\,\frac32(x^3+3x+1)^{\frac23}+c$$

$$= \frac12\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}+c$$

10) $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 3.(3x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= \frac{1}{3}[\frac{3}{5}(3x-1)^{\frac{5}{3}}]_0^3 = \frac{1}{5}[(3x-1)^{\frac{5}{3}}]_0^3 = [\frac{1}{5}(3.3-1)^{\frac{5}{3}}] - [\frac{1}{5}(3.0-1)^{\frac{5}{3}}]$

$= [\frac{1}{5}(8)^{\frac{5}{3}}] - [\frac{1}{5}(-1)^{\frac{5}{3}}] = [\frac{1}{5}(2)^5] - [\frac{1}{5}(-1)^5] = \frac{1}{5} . 32 + \frac{1}{5} = \frac{33}{5}$

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{-2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)dx = \int (x^{\frac{-1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}})dx$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + c$

12) $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{-1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}dx$

$= 2\int \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}dx = 2.\frac{3}{4}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{2} . \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^4} + c$

13) $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2x^5+b^2}}\,dx = \int x^4(a^2x^5+b^2)^{\frac{-1}{5}}\,dx = \frac{1}{5a^2}\int 5a^2x^4(a^2x^5+b^2)^{\frac{-1}{5}}\,dx$

$= \frac{1}{5a^2}.\frac{5}{4}(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4a^2}\sqrt[5]{(a^2x^5+b^2)^4} + c$

14) $\int_0^8 \sqrt{x^2-14x+49}\,dx$ **(وزاري 2013 دور 3)**

$= \int_0^8 \sqrt{(x-7)(x-7)}\,dx = \int_0^8 \sqrt{(x-7)^2}\,dx = \int_0^8 |x-7|\,dx$

الدالة المطلقة تتكون من دالتين لكل منها مجال يتصلان عندما y = 0 :

$x-7 = 0 \implies x = 7$

$|x-7| = \begin{cases} x-7 & x \geq 7 \\ 7-x & x < 7 \end{cases}$

يتم تقسيم التكامل من 0 الى 7 للدالة (7-x) ومن 7 الى 8 للدالة (x-7) كما مبين:

$= \int_0^7 (7-x)\,dx + \int_7^8 (x-7)\,dx$

$= [7x - \frac{x^2}{2}]_0^7 + [\frac{x^2}{2} - 7x]_7^8 = \left[\left[7.7 - \frac{7^2}{2}\right] - 0\right] + \left[\left[\frac{8^2}{2} - 7.8\right] - \left[\frac{7^2}{2} - 7.7\right]\right]$

$= \left[49 - \frac{49}{2}\right] + \left[\left[\frac{64}{2} - 56\right] - \left[\frac{49}{2} - 49\right]\right] = \left[\frac{49}{2}\right] + \left[[32-56] + \left[\frac{49}{2}\right]\right]$

$= \frac{49}{2} + \left[-24 + \frac{49}{2}\right] = \frac{49}{2} - 24 + \frac{49}{2} = 25$

15) $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9} = \int \frac{dx}{(2x-3)(2x-3)} = \int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \int (2x-3)^{-2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int 2.(2x-3)^{-2}\,dx \;= \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2(2x-3)} + c$

16) $\int_{-1}^{1}\sqrt[5]{3x^5-2x^7}\,dx \;= \int_{-1}^{1}\sqrt[5]{x^5(3-2x^2)}\,dx \;= \int_{-1}^{1} x\,.\sqrt[5]{(3-2x^2)}\,dx$

$= \int_{-1}^{1} x.(3-2x^2)^{\frac{1}{5}}\,dx \;= \frac{1}{-4}\int_{-1}^{1}(-4x).(3-2x^2)^{\frac{1}{5}}\,dx$

$= \frac{1}{-4}\left[\frac{5}{6}(3-2x^2)^{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^{1} \;= \frac{1}{-4}\left(\left[\frac{5}{6}(3-2)^{\frac{6}{5}}\right]-\left[\frac{5}{6}(3-2)^{\frac{6}{5}}\right]\right) \;= \frac{1}{-4}(0) = 0$

17) $\int \sqrt[3]{2x^5-7x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(2x^2-7)}\,dx \;= \int x.\sqrt[3]{2x^2-7}\,dx$

$= \int x.(2x^2-7)^{\frac{1}{3}}\,dx \;= \frac{1}{4}\int 4x.(2x^2-7)^{\frac{1}{3}}\,dx \;= \frac{1}{4}\,.\frac{3}{4}(2x^2-7)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2-7)^4} + c$

18) جد قيمة $b \in R$ اذا علمت ان:

$\int_{1}^{b}(13-4x)dx \;= 9$

الحل/

$\int_{1}^{b}(13-4x)dx \;= [(13x-2x^2)]_{1}^{b} \;= [(13b-2b^2)]-[(13-2)] = 13b-2b^2-11 = 9$

$13b-2b^2-11-9 = 0 \;\Longrightarrow\; 13b-2b^2-20 = 0$ نضرب بـ -1 ونرتب الحدود

$2b^2-13b+20 = 0 \;\Longrightarrow\; (2b-5)(b-4) = 0$

$b = 4$ or $2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

المساحة تحت المنحني :

- المساحة بين المنحني ومحور السينات للفترة من a الى b:

1- اذا كانت المنطقة فوق محور السينات $f(x)>0$ فان المساحة تساوي: $A = \int_a^b f(x)dx$

2- اذا كانت المنطقة اسفل محور السينات $f(x)<0$ فان المساحة تساوي: $A = -\int_a^b f(x)dx$

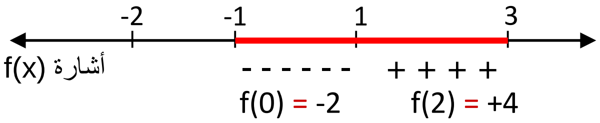
مثال 1/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 + x - 2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3]$.

الحل/ الفترة المعطاة من 1- الى 3

1- نحدد نقاط التقاطع مع محور السينات عندما $y= 0$:

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0 \implies x = -2 \quad , x = 1$$

2- نحدد اشارة $f(x)$:



المنطقة تحوي جزء سالب للفترة من 1- الى 1 وجزء موجب للفترة من 1 الى 3 اذا:

$A_1 = \int_1^3 (x^2 + x - 2)$ المنطقة الموجبة

$$A_1 = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3\right] - \left[\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} - 2(1)\right]$$

$$A_1 = \left[9 + \frac{9}{2} - 6\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right] = \frac{15}{2} + \frac{7}{6} = \frac{90+14}{12} = \frac{104}{12} = \frac{26}{3} \text{ unit}^2$$

$A_2 = -\int_{-1}^{1} (x^2 + x - 2)dx$ المنطقة السالبة

$$A_2 = -[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_{-1}^{1} = -\left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1\right] + \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right]$$

$$A_2 = -\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right] + \left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$$

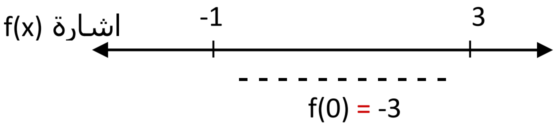
$$A_2 = -\frac{2}{3} + 4 = \frac{-2+12}{3} = \frac{10}{3} \text{ unit}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{26}{3} + \frac{10}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ unit}^2$$

مثال 2/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ محور السينات والمستقيمين $x = 3$ و $x = -1$.

الحل/ (وزاري 2011 دور 1)

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = 3 \quad , x = -1$$



المنطقة تقع بالكامل اسفل محور السينات اذا:

$$A = -\int_a^b f(x) = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = -[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x]_{-1}^{3}$$

$$A = -\left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3\right] + \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1)\right]$$

$$A = -[9 - 9 - 9] + \left[\frac{-1}{3} - 1 + 3\right] = 9 + 2 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3} = \frac{33-1}{3} = \frac{32}{3} \text{ unit}^2$$

مثال 3/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = 3x^2 - 3$ ومحور السينات وعلى الفترة [-2,3].

الحل/

$3x^2 - 3 = 0 \implies 3(x^2 - 1) = 0 \implies (x^2 - 1) = 0$

$(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 1 \quad , x = -1$

أشارة f(x) : -2 , -1 , 1 , 3

+ + + + + + + - - - - - + + + + + + +

f(-3) = +   f(0) = -   f(2) = +

$A_1 = \int_{-2}^{-1} (3x^2 - 3)\, dx$ المنطقة الموجبة

$A_1 = [x^3 - 3x]_{-2}^{-1} = [(-1)^3 - 3(-1)] - [(-2)^3 - 3(-2)] = -1 + 3 + 8 - 6 = 4 \text{ unit}^2$

$A_2 = -\int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\, dx$ المنطقة السالبة

$A_2 = -[x^3 - 3x]_{-1}^{1} = -[(1)^3 - 3(1)] + [(-1)^3 - 3(-1)] = -1 + 3 - 1 + 3 = 4 \text{ unit}^2$

$A_3 = \int_{1}^{3} (3x^2 - 3)\, dx$ المنطقة الموجبة

$A_3 = [x^3 - 3x]_{1}^{3} = [(3)^3 - 3(3)] - [(1)^3 - 3(1)] = 27 - 9 - 1 + 3 = 20 \text{ unit}^2$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 4 + 20 = 28 \text{ unit}^2$

مثال 4/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات .

الحل/ بما انه لم يحدد الفترة اذا نحسب لنقاط التقاطع مع محور السينات.

$x^3 - x = 0 \implies x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \quad , x = 1 , x = -1$

اشارة f(x) : -1 , 0 , 1

+ + + + - - - - -

$f(\frac{-1}{2}) = +$ $f(\frac{1}{2}) = -$

$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$ المنطقة الموجبة

$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right]$

$A_1 = 0 - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} \text{ unit}^2$

$A_2 = -\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$ المنطقة السالبة

$A_2 = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right] + \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}\right] = -\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] + 0 = \frac{1}{4} \text{ unit}^2$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$

مثال 5/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$ و $x = 0$.

الحل/ (وزاري 2013 تمهيدي)

$\sqrt{x+1} = 0 \implies x + 1 = 0$ تربيع الطرفين

$x = -1$

اشارة f(x) : -1 , 0 , 3

- - - - - - - + + + + + + + + + + +

f(-2) = -   f(0) = +

$A = \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\, dx = \int_{0}^{3} (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$A = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{3} = \left[\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$A = \left[\frac{2}{3}(2)^3\right] - \left[\frac{2}{3}(1)^3\right] = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ unit}^2$

المساحة بين منحنى دالتين: اذا كان لدينا دالتين f(x) و g(x) واردنا حساب المساحة بين منحني الدالتين للفترة من a الى b:

1- لتكن: $R(x) = f(x) - g(x)$

2- نحدد نقاط التقاطع بين الدالتين عندما $R(x) = 0$.

3- نحدد اشارة $R(x)$ على خط الاعداد.

4- اذا كانت اكبر من صفر فان:

$$A = \int_a^b R(x)\,dx$$

5- اذا كانت $R(x)$ اقل من صفر فان:

$$A = -\int_a^b R(x)\,dx$$

مثال 1/ جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $y = f(x) = x$ ، $y = g(x) = x^3$

الحل/(وزاري 2013 دور 1و2)

1- لتكن: $R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = x - x^3 = 0 \implies x - x^3 = 0 \implies x(1-x^2) = 0$

$x(1-x)(1+x) = 0 \implies x = 0 \ , \ x = -1 \ , \ x = 1$

2- نحدد اشارة $R(x)$:

ملاحظة/ ان الفترة المراد حساب مساحتها محصورة بين نقاط تقاطع الدالتين مع بعضهما:

اشارة $R(x)$: -1 ، 0 ، 1

- - - - - ++ + +

$A_1 = -\int_{-1}^{0}(x - x^3)\,dx$

$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx$ ندخل اشارة السالب الى التكامل

$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right]$

$A_1 = 0 - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}\,\text{unit}^2$

$A_2 = \int_0^1(x - x^3)\,dx = \int_0^1(x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right]$

$A_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] - 0 = \frac{1}{4}\,\text{unit}^2$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,\text{unit}^2$

مثال 2/ لتكن $y = f(x) = x$ وعلى الفترة [-1,1] ولتكن $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة [-1,1] جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين. **(وزاري 2012 دور 2)**

الحل/

لتكن: $R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = x - \sqrt[3]{x} \implies x - \sqrt[3]{x} = 0 \implies x = \sqrt[3]{x}$ تكعيب الطرفين

$x^3 = x \implies x^3 - x = 0 \implies x(x^2-1) = 0$

$x(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 0 \ , \ x = -1 \ , \ x = 1$

اشارة $R(x)$: -1 ، 0 ، 1

+ + + + + - - - -

بما ان فترتي الدالتين من 1- الى 1 تقع كلها ضمن منطقتي الدالتين فاننا نحسب المساحات من 1- الى 1:

$A_1 = \int_{-1}^{0}(x - x^{\frac{1}{3}})dx$ المنطقة الموجبة

$A_1 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^2}{2} - \frac{3}{4}\left(0^{\frac{4}{3}}\right)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{3}{4}\left(-1\right)^{\frac{4}{3}}\right] = 0 - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4}\,\text{unit}^2$

$A_2 = -\int_0^1 \left(x - x^{\frac{1}{3}}\right) dx$ المنطقة السالبة

$A_2 = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$ $A_2 = \left[\frac{3}{4}\left(1^{\frac{4}{3}}\right) - \frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{3}{4}\left(0^{\frac{4}{3}}\right) - \frac{0^2}{2}\right]$

$A_2 = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right] - 0 = \frac{1}{4}\,\text{unit}^2$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,\text{unit}^2$

حلول التمارين 4-4

1- جد المساحة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 2$ و $x = -2$ حيث $y = f(x) = x^3 - 4x$

الحل/ (وزاري 2012 دور 3)

$x^3 - 4x = 0 \implies x(x^2 - 4) = 0 \implies x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0 \quad , x = 2 \; , x = -2$

اشارة f(x) -2 0 2

+ + + + - - - - -

$f(-1) = +$ $f(1) = -$

$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx$ المنطقة الموجبة

$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{0^4}{4} - 2(0^2)\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] = 0 - [4 - 8] = 4\,\text{unit}^2$

$A_2 = -\int_0^2 (x^3 - 4x)dx$ المنطقة السالبة

$A_2 = -\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = -\left[\frac{2^4}{4} - 2(2^2)\right] + \left[\frac{(0)^4}{4} - 2(0^2)\right] = -[4 - 8] + 0 = 4\,\text{unit}^2$

$A = A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8\,\text{unit}^2$

2- جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,1]$

الحل/

$x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 1) = 0 \implies x^2(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0 \quad , x = 1 \; , x = -1$

اشارة f(x) -1 0 1

- - - - - - - - - - - -

$f(\frac{-1}{2}) = -$ $f(\frac{1}{2}) = -$

$A = -\int_{-1}^{1} (x^4 - x^2)dx$

$A = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\left[\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3}\right] + \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$

$A = -\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{-1}{5} - \frac{-1}{3}\right] = \frac{-1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}\,\text{unit}^2$

3- جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

الحل/

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-2)(x-1) = 0$

$x = 0 \quad , x = 2 \, , x = 1$

اشارة f(x)　0　1　2

+ + + +　　- - - - -

$f(\frac{1}{2}) = +$　　$f(\frac{3}{2}) = -$

$A_1 = -\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$

$A_1 = -[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2]_1^2$

$A_1 = -\left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right] + \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right] = -4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4} \text{ unit}^2$

$A_2 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = [\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2]_0^1$

$A_2 = \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2\right] = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4} \text{ unit}^2$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$

4- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x$ والمستقيمين $x = 5$ ، $x = 2$.

الحل/ لتكن: $R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x$

$x - 1 = \frac{1}{4}x^2$　　تربيع الطرفين

$4x - 4 = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$

اشارة R(x)　2　5

- - - - - - - - -

$A = -\int_2^5 (\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x)\, dx$

$A = \int_2^5 (\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1})\, dx$　نتخلص من السالب

$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right) dx = [\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}]_2^5$

$A = \left[\frac{5^2}{4} - \frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2^2}{4} - \frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{25}{4} - 8(\frac{2}{3}) - [\frac{4}{4} - \frac{2}{3}]$

$A = \frac{25}{4} - \frac{16}{3} - \frac{4}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{4} - \frac{14}{3} = \frac{63-56}{12} = \frac{7}{12} \text{ unit}^2$

5- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12$ ، $y = x^2$. (وزاري 2012 دور 1)

الحل/ لتكن : $f(x) = x^4 - 12$ و $g(x) = x^2$ و $R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = [(x^4 - 12) - x^2]$

$x^4 - 12 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^4 - x^2 - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \quad , x = -2$

$x^2 + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -3$ تهمل لعدم وجود عدد حقيقي مربعه سالب

اشارة R(x)

-2 ———— 2

- - - - - - - - - -

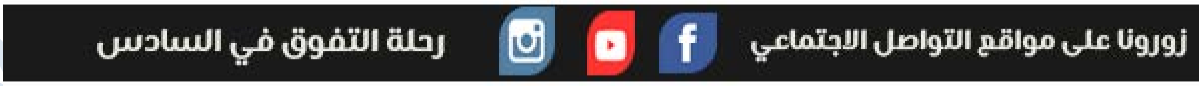
$$A = -\int_{-2}^{2}[(x^4 - 12) - x^2]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{2}[x^2 - (x^4 - 12)]\,dx = \int_{-2}^{2}(x^2 - x^4 + 12)\,dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 12x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} + 12\,(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{5} + 12(-2)\right]$$

$$A = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24 - \left[\frac{-8}{3} - \frac{-32}{5} - 24\right] = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + 24$$

$$A = \frac{16}{3} - \frac{64}{5} + 48 = \frac{80-192+720}{15} = \frac{608}{15}\ \text{unit}^2$$



الأمثلة الاثرائية

الفصل الاول:

س/ بكم طريقة يمكن ان يجلس 10 طلاب في اربع مقاعد فقط. **(وزاري 2012 دور ثاني)**

س/ كم كلمة مكونة من ثلاثة احرف يمكن تكوينها باستخدام الحروف العربية فقط بدون تكرار الحرف في الكلمة نفسها؟

س/ كم كلمة يمكن تكوينها من ثلاثة حروف من احرف كلمة زيزفون (بمعنى او بدون معنى) دون السماح بتكرار الحروف في الكلمة الواحدة. (وزاري 2013 دور ثالث)

س/ كم عدد الكلمات المكونة من ثلاثة احرف والتي يمكن انشائها من حروف كلمة بغداد (بمعنى او بدون معنى) بدون تكرار الحرف في الكلمة الواحدة.

س/ بكم طريقة يمكن ان يجلس 10 طلاب في اربع مقاعد فقط. **(وزاري 2012 دور ثاني)**

س/ اذا كان عدد الاسئلة في ورقة الامتحان 6 اسئلة والمطلوب الاجابة عن خمسة اسئلة فبكم طريقة يمكن ذلك؟(وزاري 2012 دور ثالث)

س/ صندوق يحوي 10 كرات حمراء و 5 كرات خضراء وثلاث كرات بيضاء يراد سحب 5 كرات على ان تكون ضمن السحبة كرتين حمراء وكرة واحدة خضراء فكم طريقة لذلك؟(وزاري 2012 دور ثاني)

س/جد قيمة n اذا كان $\binom{n+1}{4} = 6\binom{n}{2}$ ؟ **(وزاري 2012 دور ثاني)**

س/ اذا كان عدد الاسئلة في ورقة الامتحان 6 اسئلة والمطلوب الاجابة عن خمسة اسئلة فبكم طريقة يمكن ذلك؟(وزاري 2012 دور ثالث)

س/ في مفكوك $(4x^2 + \frac{1}{x^2})^{15}$ اوجد قيمة x التي تجعل الحدين الاوسطين متساويين.

س/ في مفكوك $(1+x)^n$ اذا كان الحد السادس عشر يساوي الحد السادس والعشرون اوج قيمة n.

س/ بكم طريقة يمكن ان يقف فيها تسعة طلاب بشرط ان يقف مراقب الصف و مشرف الصف في البداية:

س/اذا كان مفكوك $(x+y)^{2n}$ يحوي في احد حدوده المتغير x مرفوع للاس 8 والمتغير y مرفوع للاس 2 اوجد قيمة n.

الفصل الثاني:

س/ جد قيمة كل غاية من الغايات التالية:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-100}-10}{x^2} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25} \;,\; \lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} \;,\; \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \;,\; \lim_{x\to-3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-100}-10}{x^2} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \;,\; \lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x} \;,\; \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x^2-8}$$

س/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x > -1 \\ 2-x & x \le -1 \end{cases}$ اثبت ان $\lim_{x\to-1} f(x)$ غير موجودة و $\lim_{x\to-2} f(x) = 4$.

س/ اذا كانت $f(x) = ax^3 - bx + 1$ وكانت $\lim_{x\to2} f(x) = 19$ والنقطة (1,4) تمر بالمنحني جد قيمة a وb .

س/ اذا كانت $f(x) = ax^2 + 3bx + 5$ وكانت $\lim_{x\to-1} f(x) = 3$ $\lim_{x\to1} f(x) = 9$ جد قيمة a و b .

الفصل الثالث:

س/ اذا كانت $f(x) = (x^2 - 3)^4$ جد $f'(x)$ و $f''(x)$ عند $x = 2$. **(وزاري 2013 تمهيدي و 2012 دور2)**

س/ رمى لاعب كرة صلدة نحو الاعلى بازاحة $s(t) = 224t - 16t^2$ من الامتار في نهاية t من الثواني ، احسب اقصى ارتفاع تصله الكرة.**(وزاري 2012 دور 2)**

س/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة $(4x + 1)$ ويمر بالنقطة (-1,3). 2005 تمهيدي

س/ تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث s بالامتار و t بالثواني ، جد بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح التعجيل صفرا.

س/ جد $\frac{dy}{dx}$ لما يأتي:

1) $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{(x^3 + 1)}$

2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

3) $y = (2x - 5)^5$

الفصل الرابع:

س/ جد ناتج التكامل:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-16x+64}}$ **(وزاري 2013 دور 2)**

1) $\int \frac{x^3+3x^2}{x+3}\,dx$ **(وزاري 2011 دور 1)**

2) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{2x^3+6x+5}}\,dx$ **(وزاري 2005 تمهيدي)**

3) $\int (5x + \frac{2}{x^2})\,dx$ **(وزاري 2005 تمهيدي)**

4) $\int \frac{ax^2+1}{\sqrt[3]{ax^3+3x+1}}\,dx$ **(وزاري 2012 دور 2)**

5) $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$ **(وزاري 2012 دور 1)**