De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler.
Hver opgave afsluttes med symbolet ★ så læseren er klar over det. Dette gælder ikke underspøgsmålene fra opgaverne 7 op til 12. I dette opgavesæt anvendes Maple som hjælpe program.

Opgave 1

a) Andengradsligningen løses. Her benyttes diskriminantformlen, som de fleste læsere burde have styr på. Vi minder om formlen:

$$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \qquad d > 0$$

Dvs. der eksisterer to løsninger. Vi bestemmer x. Vi minder også om den formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Hermed er løsningerne:

$$x = -1 \vee x = -3$$

★

Opgave 2

a) Der er givet to punkter i et koordinatsystem.

$$P(2;9), \qquad Q(4;5)$$

For at bestemme denne lineære forskrift, anvendes formlerne for a og b.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-9}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dernæst bestemmes b:

$$b = y_1 - ax_1 = 9 - (-2) \cdot 2 = 9 + 4 = 13$$

Så forskriften er:

$$f(x) = -2x + 13$$

Som går igennem begge punkter.

★

Opgave 3

a) Der er givet oplysninger om vægten af en kasse. Kassen (b) vejer $480g$ og der er en del klodser (a), der vejer $8g$. Modellen er så:

$$V(k) = 8k + 480$$

Her er $V(k)$ kassen og k er klodser.

★

Opgave 4

a) Der er givet en tegning med to parabler P og Q. Begge er af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$

$Konstanter \backslash funktioner$	P	Q
a	$a > 0$	$a < 0$
b	$b = 0$	$b > 0$
c	$c > 0$	$c < 0$
d	$d < 0$	$d > 0$

For P har man:
Da parablen er positiv og symmetrisk er $a > 0$ og $b = 0$. Endelig ligger den i første og anden kvadrant, dvs. grafen ligger over x-aksen, og dermed er $c > 0$. Endelig ses det, at der ikke findes reelle løsninger $x \notin \mathbb{R}$, og derfor er $d < 0$.

For Q har man:
Det ses, at parablen er negativ og dermed må $a < 0$ og $b > 0$ eftersom der er en voksende tangent på Q ved skæring af y-aksen. Endelig ses det, at grafen har skæring i tredje og fjerde kvadrant dvs. under x-aksen og dermed er $c < 0$ til slut ses det, at $d > 0$ fordi der er to skæringspunkter og dermed er $x \in \mathbb{R}$.

★

Opgave 5

a) Der er givet en funktion $f(x) = 6x^2 + 4x - 3$ og der ønskes en stamfunktion for f som gennemløber P.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 6x^2 + 4x - 3\,dx = 2x^3 + 2x^2 - 3x + k$$

Da udnyttes punktet og k findes.

$$10 = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + k \Leftrightarrow$$
$$10 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 + k \Leftrightarrow$$
$$10 = 1 + k \Leftrightarrow$$
$$k = 9$$

Dermed er forskriften

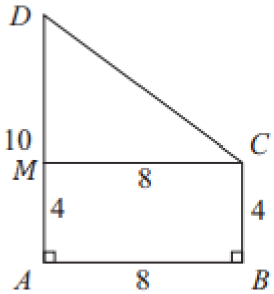
$$F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9$$

Som gennemløber punktet P.

★

Opgave 6

a) Figuren tegnes ind og tegnet detaljeret. Det ville være logisk at angive det hele i meter, så dette gøres.



Længden $|DC|$ bestemmes. Først har man, at $|DM| = |AD| - |AM| = 10 - 4 = 6$
Så:

$$|DM|^2 + |CM|^2 = |CD|^2$$

Heri indsættes tallene:

$$6^2 + 8^2 = |CD|^2 \Leftrightarrow |CD| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Arealet af indhegningen er:

$$A_{indhegning} = A_{trekant} + A_{firkant} = \left(\frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |DM|\right) + (|AB| \cdot |BC|) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 + 8 \cdot 4$$
$$= 24 + 32 = 56m^2$$

Omkredsen af indhegningen er:

$$O_{indhegning} = |BC| + |CD| + |AD| + |AB| = 4 + 10 + 10 + 8 = 32m$$

★

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler.
Samme afslutning med ⋆ gælder også i denne delprøve.

Opgave 7

a) Der er givet en tabel over gulerødder. Den totale mængde bestemmes.

$$2+6+8+9+11+6=42$$

Procentfordelingen bestemmes, dernæst de kumulerede frekvenser.

$$\frac{2}{42}\cdot 100\% = 4.761\%$$
$$\frac{6}{42}\cdot 100\% = 14.285\%$$
$$\frac{8}{42}\cdot 100\% = 19.047\%$$
$$\frac{9}{42}\cdot 100\% = 21.428\%$$
$$\frac{11}{42}\cdot 100\% = 26.190\%$$
$$\frac{6}{42}\cdot 100\% = 14.285\%$$

De kumulerede frekvenser bestemmes.:

Frekvenser (3 første)	4.761%	14.285%	19.047%
Kumulerede frekvenser	4.761%	19.046%	38.093%
Frekvenser (3 sidste)	21.428%	26.190%	14.285%
Kumulerede frekvenser	59.521%	85.711%	$99.996\% \approx 100\%$

I Maple kunne dette også gøres.

$with(Gym):$

$$obs := \begin{bmatrix} 155..160 & 2 \\ 160..165 & 6 \\ 165..170 & 8 \\ 170..175 & 9 \\ 175..180 & 11 \\ 180..185 & 6 \end{bmatrix}:$$

$frekvensTabel(obs)$

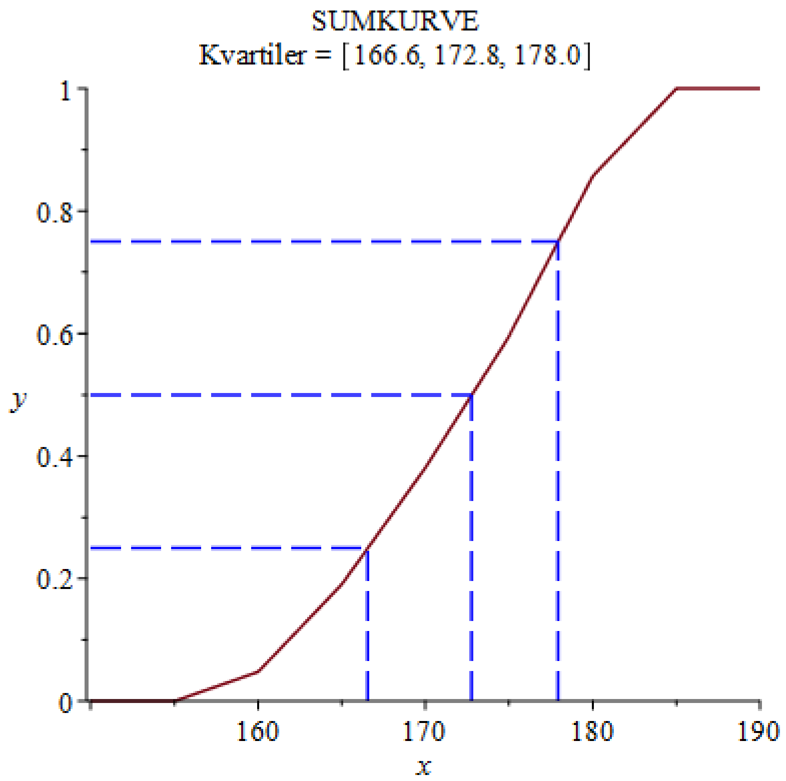
observation	hyppighed	frekvens	kumuleret
155 .. 160	2	4.762	4.76
160 .. 165	6	14.29	19
165 .. 170	8	19.05	38.1
170 .. 175	9	21.43	59.5
175 .. 180	11	26.19	85.7
180 .. 185	6	14.29	100

b) Sumkurven tegnes i Maple. (Med god vilje og god approksimation kan dette også lade sig gøre i hånden).

$kvartiler(obs)$

$$[166.56, 172.78, 177.95]$$

$plotSumkurve(obs)$



Dermed blev kvartilsættet samt sumkurven lavet over fordelingen af længderne af gulerødderne.

★

Opgave 8

a) Der er givet en tabel over mobil datatrafik samt årstal.
I Word (til venstre) og Maple (til højre) udføres der eksponentiel regression.

0	6533
1	11344
2	19415
3	30871
4	50727

$with(Gym):$
$L1 := [0, 1, 2, 3, 4]:$
$L2 := [6533, 11344, 19415, 30871, 50727]:$
$f(t) := ExpReg(L1, L2, t):$
$f(t)$

$$6722.85470766366\ 1.66534321462594^t$$

Eksponentiel regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0.9988355$

$$f(t) = 6722.855 \cdot 1.665343^t$$

Dvs. tallene er: $a = 1.665343$ og $b = 6722.855$

Dermed fandt man tallene a og b som ønskede.

b) År 2016 svarer til $t = 6$ så man har at:

$$f(t) = 6722.855 \cdot 1.665343^6 = 143408.838TB$$

Dernæst bestemmes r.

$$a = 1 + r$$

Her er $a = 1.665343$, så

$$1.665343 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.665343$$

Ganges med 100% og man har:

$$r = 0.665343 \cdot 100\% = 66.5343\%$$

Dvs. fra år 2010 og frem, stiger den mobile datatrafik med 66.5343%.

c) Her benyttes fordoblingskonstanten.

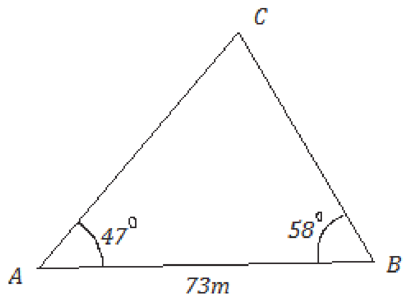
$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.665343)} = 1.359$$

Dvs. fordoblingstiden er 1.359år.

★

Opgave 9

a) Landinspektørens målinger samt skitsen tegnes ind.



Afstanden fra brønd A til C bestemmes via sinusrelationerne. Først bestemmes vinkel C.

$$\angle C = 180^o - \angle B - \angle A = 180^o - 58^o - 47^o = 75^o$$

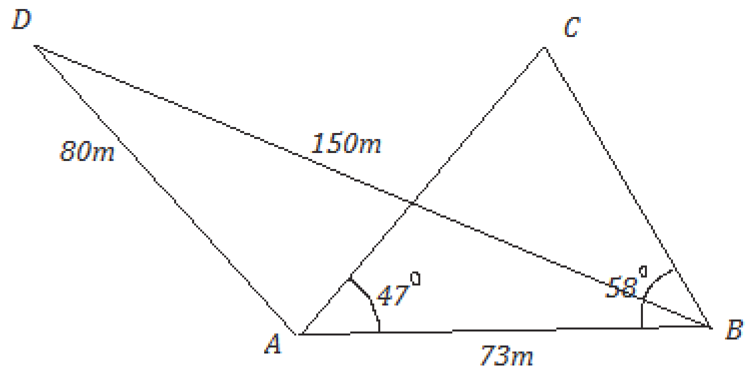
Så har man vinkel C. Nu anvendes sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(B)}{|AC|} = \frac{\sin(C)}{|AB|} \Leftrightarrow |AC| = \frac{\sin(B) \cdot |AB|}{\sin(C)}$$

Deri indsættes oplysningerne i formlen:

$$|AC| = \frac{\sin(58) \cdot 73}{\sin(75)} = 64.091$$

b) Skitsen tegnes så livet bliver lettere:



Det vides jo nu, at man har tre længder og ingen vinkler i trekanten ABD så med andre ord kan man anvende cosinusrelationerne for en vinkel. Man ønsker vinkel A, så denne bestemmes:

$$\angle A_{ABD} = \arccos\left(\frac{|AD|^2 + |AB|^2 - |BD|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |AB|}\right) = \arccos\left(\frac{80^2 + 73^2 - 150^2}{2 \cdot 80 \cdot 73}\right) = 157.246^o$$

★

Opgave 10

a) Der er givet en funktion over malaria virussen:

$$N(t) = \frac{709.8}{1 + 0.844 \cdot e^{-0.828 \cdot t}}$$

I Maple tegnes grafen. Her er $t = 2$ som svarer til år 2009, så man har:

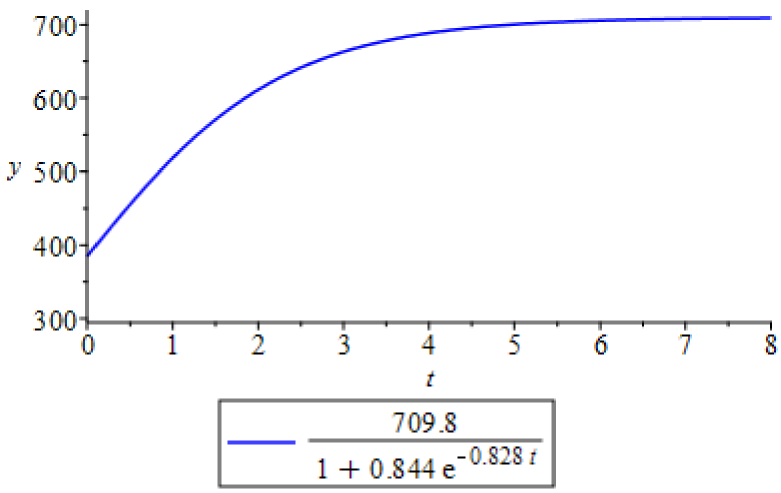
$$N(2) = \frac{709.8}{1 + 0.844 \cdot e^{-0.828 \cdot 2}} = 611.306$$

Så tegnes grafen:

$with(Gym):$

$N(t) := \frac{709.8}{1 + 0.844 \cdot \exp(-0.828 \cdot t)}:$

$plot(N(t), t = 0..8, y = 0..720, legend = [N(t)], color = ["Blue"])$



b) Her skal der løses en ligning.

$$N(t) = 700$$

Så man har:

$$\frac{709.8}{1 + 0.844 \cdot \mathrm{e}^{-0.828 \cdot t}} = 700$$

$$\Updownarrow \quad \textit{Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$

$$t = 4.950598$$

Dvs. ca. i år 2012 er antallet af smittede ca. 700 personer. I Maple kunne ligningen også løses:

$N(t) = 700$

$$\frac{709.8}{1 + 0.844\,\mathrm{e}^{-0.828\,t}} = 700$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 4.950598025]]$$

Så galt ser det ud.

c) Funktionen differentieres via Maple og $N'(3)$ bestemmes endvidere i Maple.

$N'(t)$

$$\frac{496.0309536\,\mathrm{e}^{-0.828\,t}}{\left(1 + 0.844\,\mathrm{e}^{-0.828\,t}\right)^2}$$

$N'(3)$

$$36.11032635$$

Dvs. i år 2010 steg antallet af smittede pr. år ca. 36 personer.

★

Opgave 11

a) Funktionen er givet.

$$f(x) = \ln(x) + x^3 - 4x, \qquad x > 0$$

Da differentieres funktionen.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 3x^2 - 4$$

Så udnyttes punktet P. Man har

$$f(2) = \ln(2) + 2^3 - 4 \cdot 2 = \ln(2)$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^2 - 4 = 8.5$$

Dermed er tangentligningen:

$$y = 8.5(x - 2) + \ln(2)$$

Eller

$$y = \frac{17}{2}x + \ln(2) - 17$$

b) Monotoniforholdene bestemmes. Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$\frac{1}{x} + 3x^2 - 4 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -1.263763 \quad \vee \quad x = 0.2637626 \quad \vee \quad x = 1$$

Der huskes, at $x > 0$ så den negative løsning forkastes. Derfra bestemmes monotoniforholdene:

<u>**Metode 1:** Monotonilinje</u>

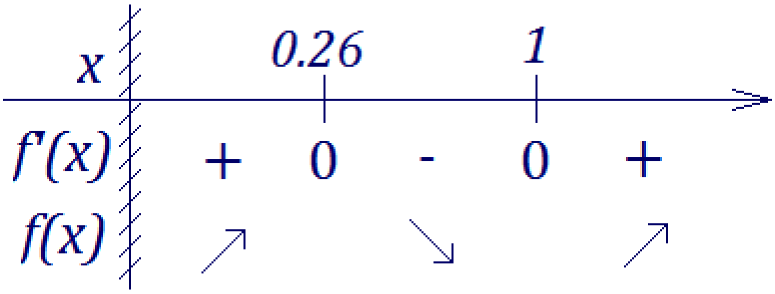
Vi vælger tal som er forskellige fra $f'(x) = 0$ og indsætter i $f'(x)$.

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$$

$$f'(2) = \frac{17}{2}$$

Dernæst tegnes monotoniskemaet.



Den linje med skrå minilinjer angiver, at $x > 0$.

Dermed må konklusionen være, at:

$f(x)$ er voksende i intervallet $(0; 0.26]$ og $[1; \infty)$ samt aftagende i intervallet $[0.26; 1]$.

<u>**Metode 2:** Dobbelte afledede</u>

Som skrevet findes den dobbelte afledede:

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + 6x$$

Indsættes rødderne fra ligningen $f'(x) = 0$ i $f''(x)$ fås:

$$f''(0.26) = \frac{-1}{0.26^2} + 6 \cdot 0.26 = -13.232, \qquad -13.232 < 0 \quad \textit{lokalt maksimum}$$

$$f''(1) = \frac{-1}{1^2} + 6 \cdot 1 = 5, \qquad 5 > 0 \quad \textit{lokalt minimum}$$

Dermed er konklusionen:

$f(x)$ er voksende i intervallet $(0; 0.26]$ og $[1; \infty)$ samt aftagende i intervallet $[0.26; 1]$.

★

Opgave 12

a) Givet funktionen:
$$f(x) = (x^2 - 6x + 5) \cdot (1 + a^2 \cdot x^2)$$
Heri indsættes $a = 2$ i forskriften.
$$f_1(x) = (x^2 - 6x + 5) \cdot (1 + 4 \cdot x^2)$$
Her løses ligningen $f_1(x) = 0$
$$(x^2 - 6x + 5) \cdot (1 + 4 \cdot x^2) = 0$$
$$\Updownarrow \quad \text{Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.}$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = 5$$
Her benyttes $x = 1$ til bestemmelse af arealet.
$$M = \int_0^1 4x^4 - 24x^3 + 21x^2 - 6x + 5\,dx = \left[\frac{4}{5}x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 5x\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{5} \cdot 1^5 - 6 \cdot 1^4 + 7 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 0 = \frac{19}{5} = 3.8$$
Hermed blev M bestemt.

b) Nu skal man bestemme a så $M = 40$. I Maple bestemmes værdien a.

$f(x) := (x^2 - 6x + 5) \cdot (1 + a^2 \cdot x^2) :$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 40$
$$\frac{11}{30}a^2 + \frac{7}{3} = 40$$
$\xrightarrow{\text{solve for a}}$
$$\left[\left[a = \frac{1}{11}\sqrt{12430}\right], \left[a = -\frac{1}{11}\sqrt{12430}\right]\right]$$
$evalf[5](\%)$
$$[[a = 10.135], [a = -10.135]]$$
Dvs. for $a = 10.135$ fås arealet af M til at være 40.

★