Skriftlig Eksamen Matematik A 2017

Dato 18. Maj 2017

(Tilføjet/revideret af Matematikuniverset)

Tak til anonym!

Opgave 7

$with(Gym)$:

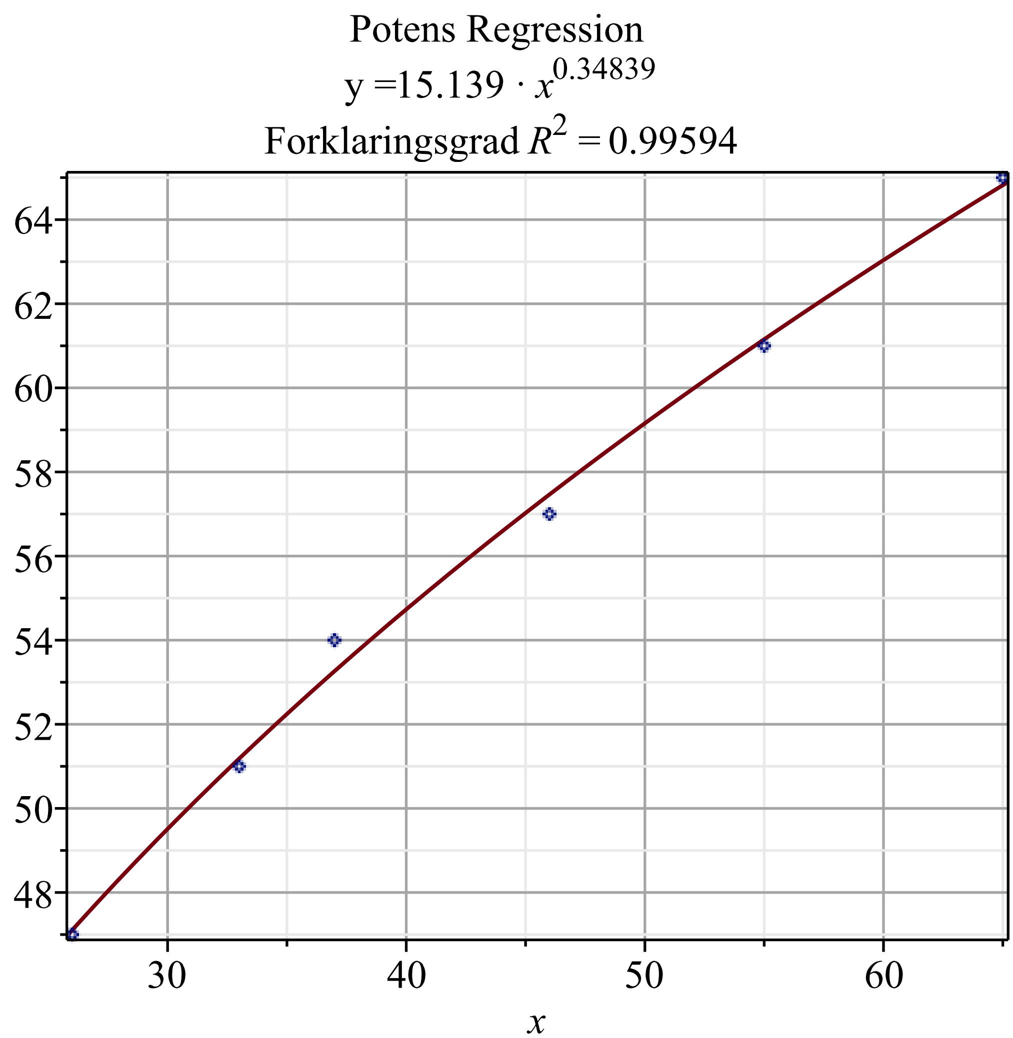
$\boldsymbol{a})$

Vi benytter potensregression, for at bestemme tallene a og b, da vi får oplyst at funktionen er af typen $f(x) = bx^a$

$X := [26, 33, 37, 46, 55, 65] = [26, 33, 37, 46, 55, 65]$

$Y := [47, 51, 54, 57, 61, 65] = [47, 51, 54, 57, 61, 65]$

$PowReg(X, Y)$



Vi får potensforskriften til $f(x) = 15,139\, x^{0,34839}$

$a = 0,34839$ og $b = 15,139$

b)

Vi får oplyst at $f(x)$ er radius i nedslagskrateret (målt i mm) og x er nedslagsenergi (målt i mJ)

For at bestemme nedslagsenergien en vanddråbe skal have, når nedslagskrateret har en radius på 48 *mm*, så bestemmes $f(x) = 48$

$f(x) := 15.139\, x^{0.34839} = x \rightarrow 15.139\, x^{0.34839}$

$f(x) = 48 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 27.44460855]]$

Når nedslagskrateret har en radius på 48 *mm*, så skal nedslagsenergien være 27, 4 *mJ*

c)

Vi vil bestemme hvor mange procent radius i neslagskrateret øges med, idet at neslagsenergien øges med 40 %.

Vi benytter formlen for potensvækst $r_y = \left(\left(1 + r_x\right)^a - 1 \right) \cdot 100$

Vi har da att vækstraten er 40 % dvs. $r_x = 0.4$

$r_y = \left((1 + 0.4)^{0.34839} - 1 \right) \cdot 100 = r_y = 12.43707690$

Idet at nedslagsenergien øges med 40 %, så øges radius i neslagskrateret med 12,44 %

Opgave 8

restart
with(*Gym*) :

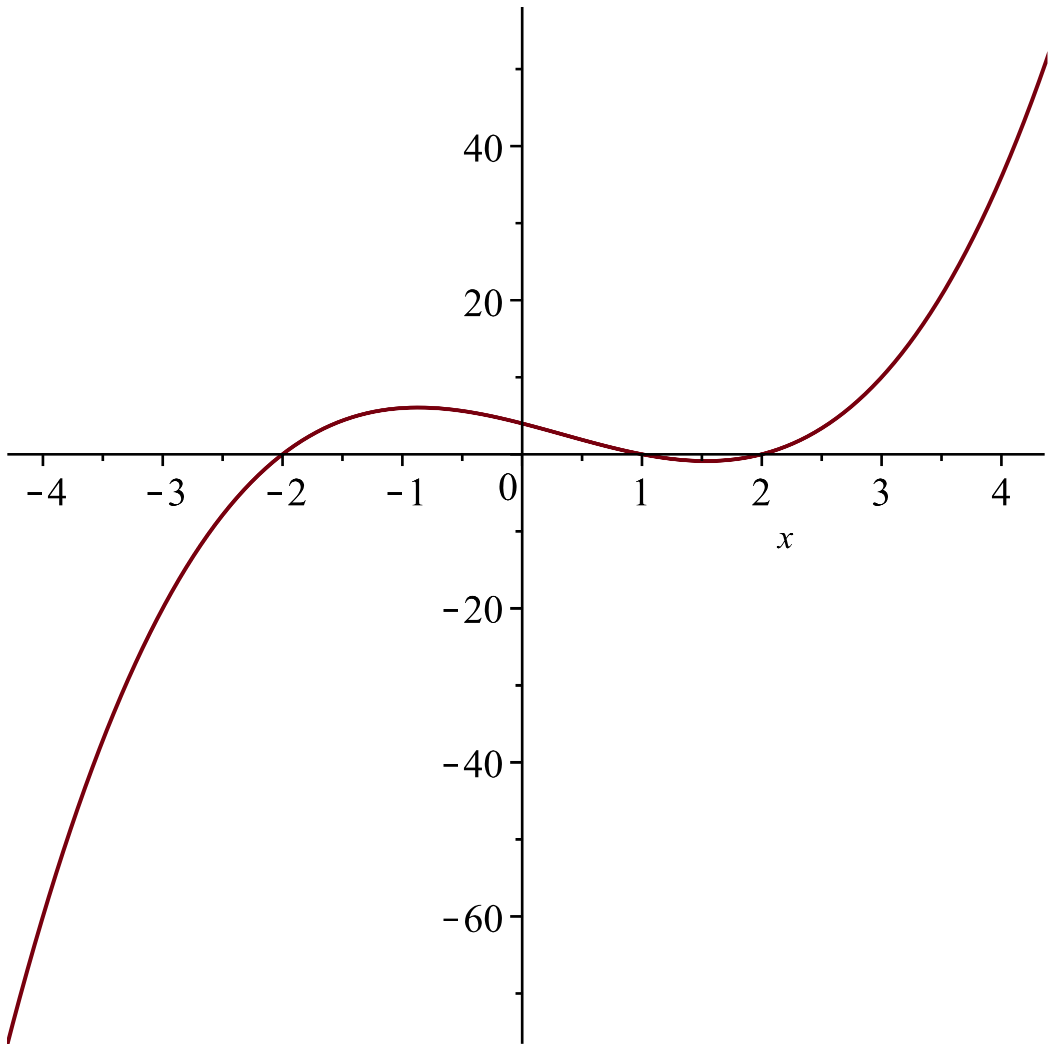
a)

Vi har fået givet funktionen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ og vil plotte den hvorefter funktionens nulpunkter bestemmes.

Først defineres $f(x)$, hvorefter $f(x)$ plottes vha. maple.

$f(x) := x^3 - x^2 - 4x + 4 = x \rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4$

$plot(f(x), x = -6..6)$



For at bestemme funktionens nulpunkter, så løses $f(x) = 0$, da nulpunkterne er der hvor grafen skærer x-aksen.

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = 2], [x = -2]]$

Koordinatsættene til $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ er $A(-2; 0)$, $B(1; 0)$ og $C(2; 0)$.

***b*)**

Tangentens ligning har den generelle formel $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Vi har fået givet funktionen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ og får oplyst at grafen for f går gennem punktet $P(3, f(3))$

Vores $x_0 := 3 = 3$

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = y = 17x - 41$

Tangentens ligning er $y = 17\,x - 41$

Opgave 9

restart
with(*Gym*) :

a)

Vi vil bestemme vinkel A
Vi har følgende oplysninger

$|AB| = 7$

$|AC| = 10$

Vinkel A < 90°

Arealet af trekant ABC = 30

I det at vi kun har fået opgivet to sidelængder, kan vinkel A bestemmes vha. formlen til en trekant idet vi har fået opgivet arealet til T = 30 og vinkel A isoleres.

$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin(A)$

$30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot Sin(A) \xrightarrow{\text{solve for A}} [[A = 58.99728087]]$

Vinkel A = 59

b)

For at bestemme omkredsen af trekant ABC, benytter vi maples trekantsolve

$trekantsolve(A = 58.99728087, b = 10, c = 7) =$
$\{B = 77.82552079, C = 43.17719831, a = 8.768635842\}$

$|BC| = 8, 77$

Vi kan nu bestemme omkredsen af trekant ABC ved $\mathrm{O} = |AB| + |AC| + |BC|$

$\mathrm{O} = 7 + 10 + 8.768635842 = \mathrm{O} = 25.76863584$

Omkredsen af trekant ABC er 25,77

Opgave 10

restart
with(*Gym*) :

Først opstilles en nulhypotese, hvorefter vi undersøger om laver en $\chi^2 - \mathit{test}$ vha. af maple.
Vi undersøger herefter om nulhypotesen må forkastes på et 5 % signifikansniveau.

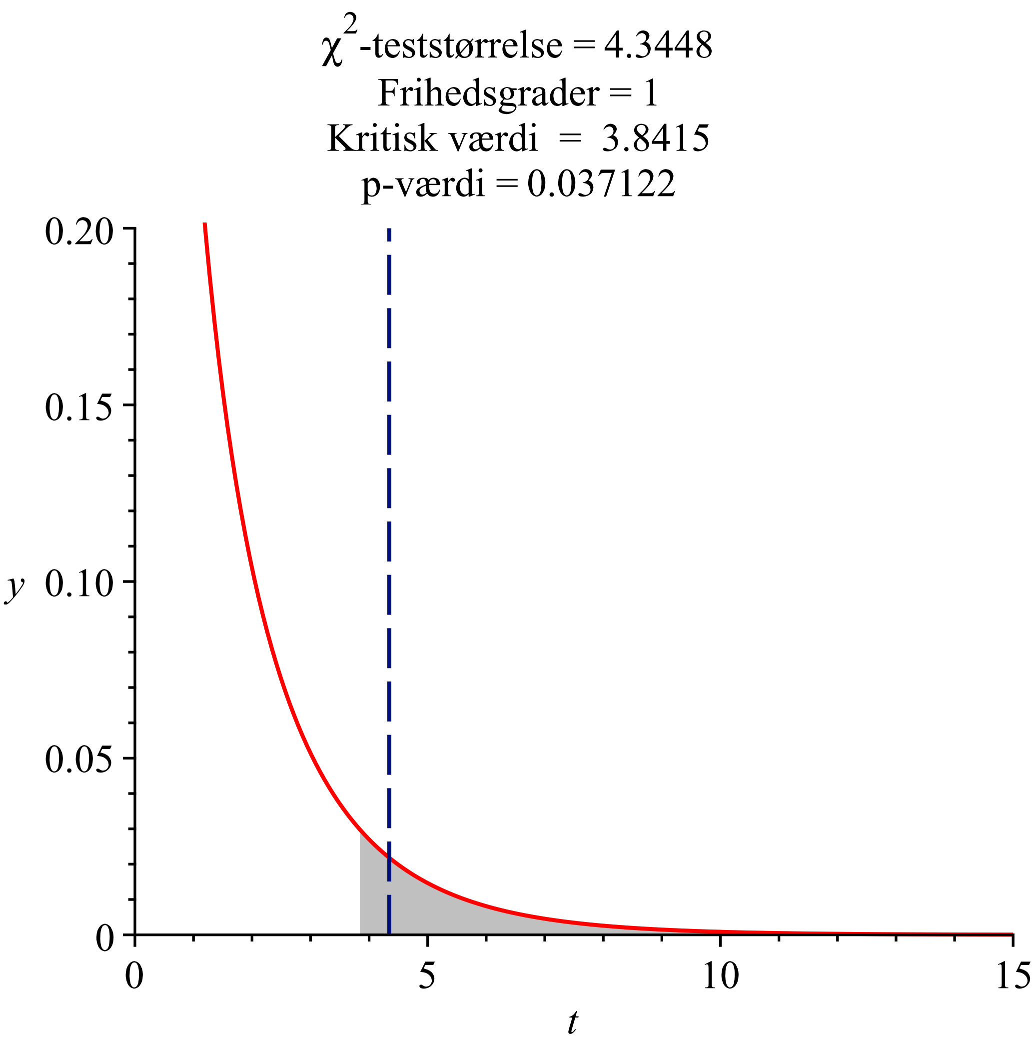
Nulhypotesen H_0: At artsfordelingen af to bestemte græshopper er uafhængige af habitat.

$$Obs := \begin{bmatrix} 345 & 112 \\ 410 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 345 & 112 \\ 410 & 96 \end{bmatrix}$$

forventet(*Obs*)

$$\begin{bmatrix} 358.29 & 98.708 \\ 396.71 & 109.29 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ChiKvadratUtest(*Obs*)



Her ses det at vores p-værdi er under 5 % samt at χ^2 − teststørrelse er 4,35, hvilket er over den kritiske værdi på 3,84.

Dermed er nulhypotesen sand i og med at χ^2 − teststørrelse er over den kritiske værdi.

Opgave 11

restart
with(*Gym*) :

a)

Vi vil bestemme arealet af den trekant punkter O, B og A danner.

Vi har fået opgivet punkterne O(0, 0, 0), A(14, 0, 24) og B(0, 10, 20)

For at bestemme arealet af trekant ABO, kan vi beregne krydspoduktet $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ mellem to vektorer som har samme startpunkt. Da krydsproduktet er et udtryk for arealet af et parallelogram og dermed vil arealet af trekant ABC være $\frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Vi starter med at bestemme to vektorer, som har samme startpunkt.

$$\overrightarrow{OA} := \langle 14 - 0, 0 - 0, 24 - 0 \rangle = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \langle 0 - 0, 10 - 0, 20 - 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Vi beregner krydsproduktet af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -240 \\ -280 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} := \langle -240, -280, 140 \rangle$
Vi indsætter i formlen.

$$\frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 197.23$$

Arealet af glasfladen OAB er 197,23dm^2.

b)

Den generelle formel for linjens parameterfremstilling er $l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, t \in R$

For at kunne opstille linjens parameterfremstilling, skal man kende et punkt samt en retningsvektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ til linjen.

Vi får oplyst at linjen l går gennem punkter O$(0, 0, 0)$ og $B(0, 10, 20)$, vi vælger punktet B.

Da vi tidligere har bestemt $\overrightarrow{OB}$, og disse to punkter går gennem linjen, så er $\overrightarrow{OB} = \vec{r}$

$$\vec{r} = \langle 0, 10, 20 \rangle = \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Vi indsætter vores oplysninger i den generelle formel til linjens parameterfremstilling.

Linjens parameterfremstilling er $l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}, t \in R$

c)

(Tilføjet af Matematikuniverset)
Vi bestemmer den spidse vinkel mellem parameterfremstillingen og $xy-planen$. ($z = 0$). Så vi skal faktisk bruge normalvektoren til planen, og den er:

$\overrightarrow{n_{xy-planen}} := \langle 0, 0, 1 \rangle$

$$\vec{n}_{xy-planen} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Man kan derfor bruge vinklen mellem retningsvektoren og normalvektoren, som er:

$\overrightarrow{OB}$ = retningsvektor

$\overrightarrow{n_{xy-planen}}$ = normalvektor

Vi får:

$$w := invCos\left(\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{n_{xy-planen}}}{len\left(\overrightarrow{OB}\right)\cdot len\left(\overrightarrow{n_{xy-planen}}\right)}\right)$$

$$w := 26.56505120 \tag{5.2}$$

Men dette er jo fra normalvektoren, så vinklen mellem parameterfremstillingen og planen er:
$v = 90 - w$

$$v = 63.43494880 \tag{5.3}$$

Og dermed er det den ønskede spidse vinkel mellem parameterfremstillingen l og planen $z = 0$.

Opgave 12

restart
with(*Gym*) :

a)

Vi har fået opgivet differentialligningen $\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259 \cdot (T - 22)$, som beskriver temperaturen af et akvarium under opvarmning.
$T(x)$ er temperaturen i akvaraiet (målt i °C)

x er tiden efter opvarmningen starter (målt i timer).

Vi får oplyst at temperaturen i akvariet er $22°C$ idet at opvarmningen starter, dvs. $T(0) = 22$

Vi vil bestemme temperaturens væksthastighed idet akvariet er 26°C

$\frac{dT}{dx} = f'(x)$ er svarende til væksthastigheden, vi indsætter 26°C i T

$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259 \cdot (26 - 22)$

$$\frac{dT}{dx} = 0.504 \tag{6.1}$$

Som er temeraturforøgelsen pr. time.

b)

differentialligningingen med begyndelsesværdien $T(0) = 22$ og bestemmer

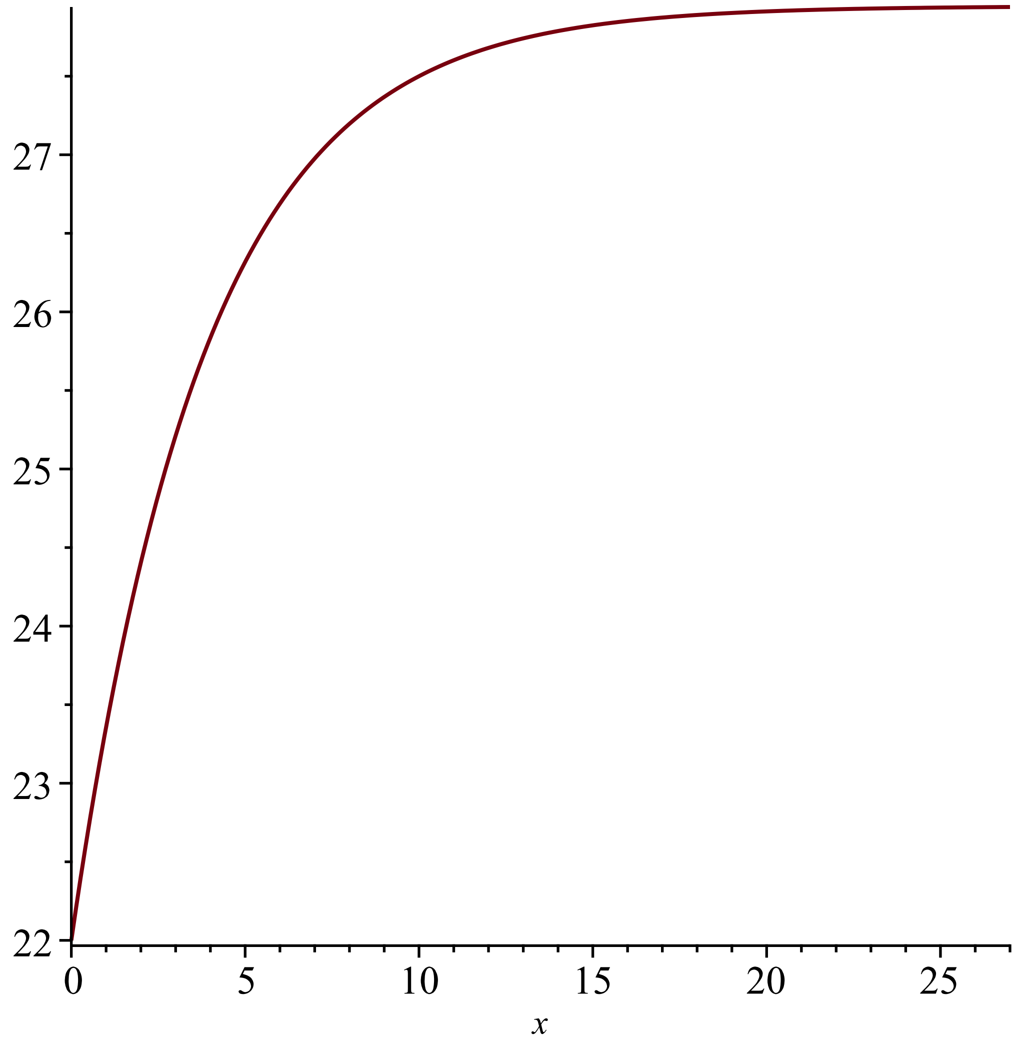
Vi benytter $y'(x)$ istedet for $T'(x)$.

$$dsolve(\{y'(x) = 1.54 - 0.259 \cdot (y(x) - 22), y(0) = 22\}) = y(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220}{37}\,e^{-\frac{259}{1000}x} \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$
$$y(x) = 27.946 - 5.9459\,e^{-0.25900\,x}$$

$$y(x) := 27.946 - 5.9459\,e^{-0.25900\,x} = x \rightarrow 27.946 + (-1) \cdot 5.9459\,e^{(-1) \cdot 0.25900\,x}$$

$y'(26) = 0.001832222972$

$plot(y(x), x = 0 ..27)$



Når akavariet har en temperatur på 26°C, så vil væksthastigheden være 0,0018 dvs. temperaturen af akvariet stiger med 0,0018 °C.

Det oplyses at akvariet skal have en temperatur på 27°, før den sarte akvariefisk kan komme i akvariet.

Vi bestemmer $y(x) = 27$

$y(x) = 27 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.097353731]]$

Der vil ca. gå 7 timer før at temperaturen i akavariet når op på 27°

Opgave 13

restart
with(*Gym*) :

a)

$f(x) := 2\cdot 0.5^x = x \rightarrow 2\ 0.5^x$

$g(x) := 4 = x \rightarrow 4$

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -1.\}$

$\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\, dx$

Arealet af M er 1,114

b)

(Tilføjet af Matematikuniverset)

Arealet af M er:
$M = 1.114609918$ og det er også dette areal vi ønsker for N, så det kræver vi får den rigtige værdi af k, hvor $k > 0$, så ligningen bliver:

$1.114609918 = \int_{0}^{k} f(x)\, dx$

$$1.114609918 = 2.885390082 - 2.885390082\ 2.^{-1.k} \quad \textbf{(7.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 0.7043812553]] \quad \textbf{(7.2)}$$

Dvs. for $k = 0.7043812553$ vil vi få et areal N, som er lige så stort som M, dvs. $M = N$. Vi gør prøve.

$N = \int_{0}^{0.7043812553} f(x)\, dx$

$$N = 1.114609918 \quad \textbf{(7.3)}$$

og vi får det samme tal. Arealet af M og N er lige store når $k = 0.7043812553$.

Opgave 14

a)

Vi får oplyst at antallet af rygere er steget fra 721 mio. til 967 mio. i perioden 1980 til 2012.

Vi har da at $f(0) = 721$ og $f(32) = 967$

Vi bestemmer forskriften til den eksponentielle funktion vha. af de to opgivet punkter.

$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$

$$a := \sqrt[32-0]{\frac{967}{721}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.0092$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

$$b := \frac{721}{1.0092^0}$$

$$b := 721.0000000 \tag{8.1}$$

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$$f(x) = 721.0000000 \left(\frac{967^{1/32}\, 721^{31/32}}{721} \right)^x \tag{8.2}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$f(x) = 721.00\ 1.0092^x \tag{8.3}$$

b)

(Tilføjet af Matematikuniverset)

Vi definerer modellen der beskriver befolkningen i verden.

$$N(t) := \frac{12245}{1 + 1.74 \cdot \exp(-0.0273 \cdot t)}$$

$$t \rightarrow \frac{12245}{1 + 1.74\, e^{(-1) \cdot 0.0273\, t}} \tag{8.4}$$

Vi bruger ovenstående model til at opstille en ny model over andelen af rygere. Modellen er:

$$g(t) := \frac{f(t)}{N(t)}$$

$$t \rightarrow \frac{f(t)}{N(t)} \tag{8.5}$$

$$g(t)$$

$$0.05888117599\ 1.009215938^t \left(1 + 1.74\, e^{-0.0273\, t}\right) \tag{8.6}$$

$$g'(t) = 0$$

$$0.0005401600322\ 1.009215938^t \left(1 + 1.74\, e^{-0.0273\, t}\right) - 0.002796973622\ 1.009215938^t\, e^{-0.0273\, t} = 0 \tag{8.7}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t = 45.23455515]] \tag{8.8}$$

Vi undersøger om dette er et minimum.

$$g''(45.23455515)$$

$$0.00002233079096 \tag{8.9}$$

Da outputtet er positivt, så følger det at vi har et minimum. Dvs. i år 2025 er andelen af rygere på globalt plan mindst.

Opgave 15

restart

$with(Gym)$:

a)

Vi vil bestemme $|AF|$ i trekant ACD, trekanten er ligebenet og $|AC| = |CF| = 340\ mm$

Derudover kender vi vinkel C = 33°

Vi benytter cosinusrelationen
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot Cos(B) \Rightarrow |AF|^2 = |CF|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CF| \cdot |AB| \cdot Cos(C)$

$|AF| = \sqrt{340^2 + 340^2 - 2 \cdot 340 \cdot 340 \cdot Cos(33)} = |AF| = 193.1304344$

Sidelængden af $|AF| = 193{,}1\ mm$

Vi vil nu beregne $|AG|$, idet at det gælder at vinkel C = vinkel B = vinkel D, samt at alle tre trekanter er ligebenet.

Vi benytter her igen cosinusrelationen til at beregne $|AG|^2 = |BG|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |BG| \cdot |AB| \cdot Cos(B)$

$|AG| = \sqrt{210^2 + 210^2 - 2 \cdot 210 \cdot 210 \cdot Cos(33)} = |AG| = 119.2864447$

Sidelængden af $|AG| = 119, 3\ mm$

Vi sammenligner forholdet mellem $\frac{|AF|}{|AG|}$ samt det gyldne snit som er $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1, 62$

$\frac{193.1304344}{119.2864447} = 1.619047620$

$Afvigelsesprocent : \frac{1.62 - 1.619047620}{1.62} \cdot 100 = 0.05878888889$

Forholdet mellem sidelængden $|AF|$ samt $|AG|$ vurderes til at være ens med det gyldne forhold. Der er en minimal afvigelse på 0,06%.

b)

Forholdet mellem $\frac{|AF|}{|AG|}$ er uafhængigt af instillingen af værktøjet, idet at vinkel C samt vinkel B er ensvinklet og at trekant ACF samt ABG begge er ligebenet trekanter. Forholdet mellem $\frac{|AF|}{|AG|}$, vil forblive ens, selvom indstillingen af værktøjet ændres, dvs. at vinkel C samt vinkel B ændres.