Matematik B-niveau HF
26. maj 2021

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 26/05/21. Af CAS kræves: Maple 2020 & TI-Nspire CX CAS.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: matematikuniverset@hotmail.com

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Lad f være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Tallet $a > 0$, da parablens grene er nedadgående. Grafen for f er derfor konkav. Tallet $c > 0$, da grafen for f har skæring med den positive del af andenaksen.

Opgave 2.

(a) En funktion er givet ved $f(x) = x^3$. Den afledede funktion bestemmes vha. differentialregning. Man anvender reglen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Med $n = 3$ har man $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.

(b) Funktionen $g(x) = x^3\sqrt{x}$ er givet. Her er $f(x) = x^3$ og $h(x) = \sqrt{x}$. Man observerer, at $g(x)$ er på formen,

$$g(x) = f(x) \cdot h(x). \tag{2}$$

Derfor anvendes produktreglen,

$$g'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x). \tag{3}$$

Fra (a) har man $f'(x) = 3x^2$ så man skal blot finde $h'(x)$. Anvend formelsamlingen og find den afledede af $\sqrt{x}$. Man finder, at $h'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Derfor er,

$$g'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

som man ønsker at finde.

Alternativt: Omskriv $g(x) = x^3\sqrt{x}$.

$$g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3+\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}. \tag{4}$$

Dermed kan man anvende samme metode som i (a). Man har,

$$g'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}. \tag{5}$$

Dette er også facit.

Opgave 3.

(a) Den totale sandsynlighed skal være 1, derfor løses ligningen,

$$0.2 + 0.1 + 0.5 + p = 1. \tag{6}$$

Løses ligningen fås $p = 0.2$.

(b) Middelværdien beregnes.

$$\bar{x} = 1 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.5 + 15 \cdot 0.2 = 9. \tag{7}$$

Dvs. middelværdien er $\bar{x} = 9$.

Opgave 4. : Opgave i logistisk vækst.

(a) Man indsætter $x = 0$ i funktionen $f(x)$ og udregner $f(0)$. Man får

$$f(0) = \frac{600}{1 + 59 \cdot e^{-0.34 \cdot 0}} = \frac{600}{1 + 59} = \frac{600}{60} = 10. \tag{8}$$

Dvs. ved forsøgets start ($x = 0$) er antallet af gærceller pr. cm^3.

Opgave 5.

(a) Et udtryk er givet ved $\frac{(x+2)^2-4}{x}$. Nedenfor er angivet nogle trin og forklaringer.

Trin	Udtryk	Forklaringer
1	$\frac{(x+2)^2-4}{x}$	Udtrykket skrives op.
2	$\frac{x^2+4+4x-4}{x}$	Første kvadratsætning benyttes på $(x+2)^2$.
3	$\frac{x^2+4x}{x}$	Tallene 4 og -4 udgår.
4	$x + 4$	Man faktoriserer x, så x i tæller og nævner går ud.

Opgave 6.

(a) Toppunktet for f bestemmes. Man anvender formlerne $x_T = \frac{-b}{2a}$ og $y_T = \frac{-d}{4a}$. Dermed er koordinatsættet for toppunktet bestemt ved

$$T(x_T; y_T) = T\left(\frac{-4}{2 \cdot 1}; \frac{-(4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3)}{4 \cdot 1}\right) = T(-2; -1). \tag{9}$$

Dvs. $T(-2, -1)$.

(b) Grafen for f er afbildet i opgavesættet. Det angiver, at der eksister to reelle løsninger til f (men det blev også vist i udregningen i (a), da diskriminaten $d = 4$, hvilket angiver, der findes to løsninger.) Da man fandt toppunktet med koordinatsæt $T(-2, -1)$ kan man slutte, at $g(x)$ ikke har nogen reelle løsninger, da $g(x) = f(x)+2$. Det svarer til, at $g(x)$ har toppunkt i $(-2; 1)$, og denne skærer ikke førsteaksen.

$f(x)$ har derfor to reelle løsninger mens $g(x)$ ingen reelle løsninger har.

Delprøve 2.

Se næste side. Løsninger er lavet i Maple efterfulgt af løsninger der er lavet i TI-Nspire.

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik B delprøve 2, 26. maj 2021.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 7:
$restart : with(Gym) :$
(a) Anvend dist-formlen.

$$dist(P, l) = \frac{\mathrm{abs}(3 \cdot 2 + 7 - 4)}{\sqrt{3^2 + 1.}}$$

$$dist(P, l) = 2.846049894 \tag{1}$$

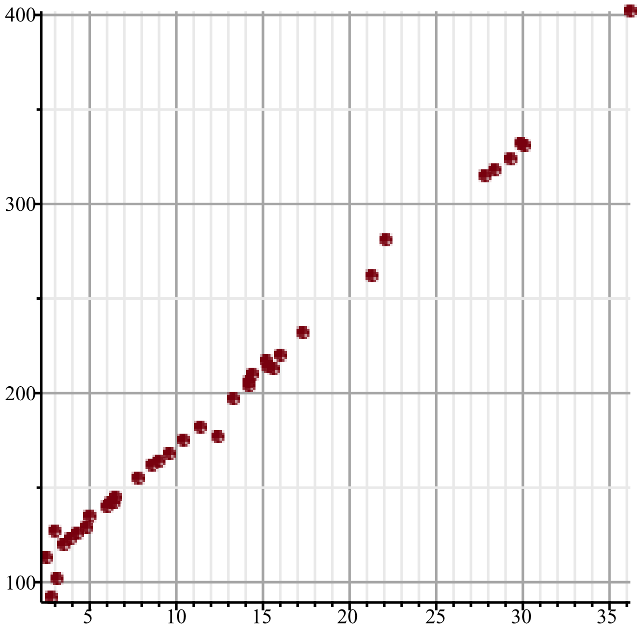
Dvs. afstanden mellem P og l er ca. 2.85.

Opgave 8:
$restart : with(Gym) :$
Alt data indlæses i Maple.

$Fedt := [14.4, 15.2, 6.2, 3.5, 36.2, 12.4, 27.8, 13.3, 10.4, 3.9, 14.2, 7.8, 9, 14.2, 6.4, 6, 30.1, 15.6, 29.9, 11.4, 29.3, 4.8, 6.5, 16, 4.3, 17.3, 5, 8.6, 2.5, 15.3, 21.3, 28.4, 9.6, 3.1, 22.1, 3, 2.8] :$

$Energi := [210, 217, 142, 120, 402, 177, 315, 197, 175, 123, 204, 155, 164, 206, 142, 140, 331, 213, 332, 182, 324, 129, 145, 220, 126, 232, 135, 162, 113, 214, 262, 318, 168, 102, 281, 127, 92] :$

(a) Et punktplot laves vha. kommandoen nedenfor.
$punktPlot(Fedt, Energi)$

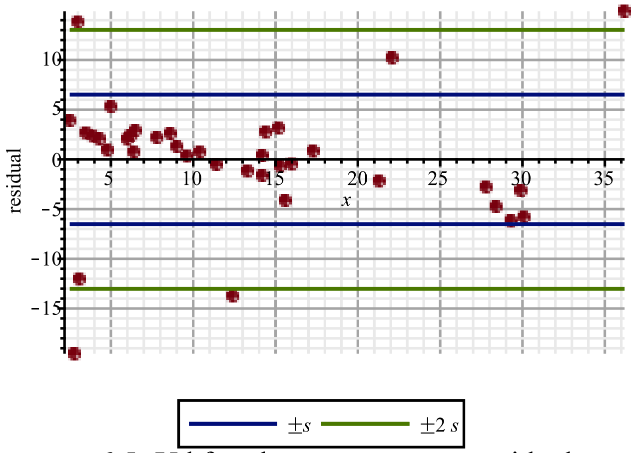


Tallene a og b kan bestemmes vha. lineær regression.
$f(x) := evalf[5](\ LinReg(Fedt, Energi, x)\ ) :$
$f(x)$

$$8.2500\, x + 88.450 \tag{2}$$

$a = 8.25$ og $b = 88.45$.

(b) Residualplottet samt residualspredningen plottes og bestemmes.
plotResidualer(*Fedt*, *Energi*, *LinReg*)



(c) Residualspredningen er $s = 6.5$. Ud fra plottet ser man, at residualerne er godt spredt, hvorfor modellen er meget anvendelig. Residualspredningen ser umiddelbart ud til at være god, da denne er lille trods stigningen af y-værdierne.

Opgave 9:
restart : *with*(*Gym*) :
Funktionen defineres.

$$f(x) := \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{7}{2}\cdot x^2 + 10\cdot x - 3 :$$

(a) Den afledede funktion til $f(x)$ er
$f'(x)$

$$x^2 - 7\,x + 10 \qquad \textbf{(3)}$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$ vha. solve.
solve($f'(x) = 0$)

$$5, 2 \qquad \textbf{(4)}$$

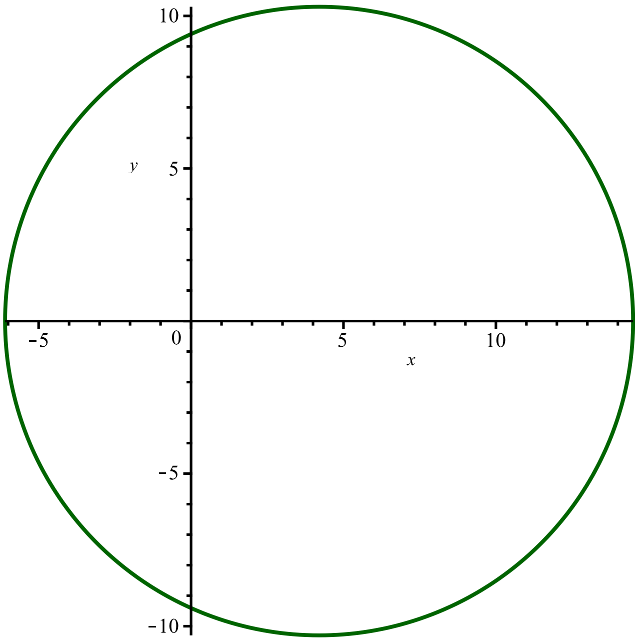
Dvs. $x = 2 \vee x = 5$.

(b) Monotoniforholdene for f bestemmes. Man vælger tre tal der er forskelligt fra nulpunkterne for $f'(x) = 0$.
Vælg 1, 3 og 6. Lav fortegnsvariation.
$f'(1) = 4$, $f'(3) = -2$ og $f'(6) = 4$
Et monotoniskema dannes.

x		2		5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	→	↘	→	↗

Dermed kan man konkludere, at $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; 2]$ og i $[5;\infty[$. Endelig er $f(x)$ aftagende i intervallet $[2; 5]$.

Opgave 10:
En rigtig GeoGebra opgave...
restart : *with*(*Gym*) : *with*(*plots*) : *with*(*plottools*) :
(a) Cirklen tegnes vha. Maple.
$implicitplot\left((x-4.2)^2 + (y-0)^2 = 10.3^2, x = -6.1..14.5, y = -10.3..10.3, color = \text{"DarkGreen"} \right)$



(b) En anden cirkelligning er givet ved
$(x+4.2)^2 + y^2 = 10.3^2$
Højden af vinduerammen kan findes det sted, hvor $x = 0$.
$solve\left((0+4.2)^2 + y^2 = 10.3^2 \right)$

$$9.404786016, -9.404786016 \tag{5}$$

Dvs. højden af vinduerammen er 9.4 dm.

Bredden af vinduerammen bestemmes, når $y = 0$.
$solve\left((x+4.2)^2 + 0^2 = 10.3^2 \right)$

$$6.100000000, -14.50000000 \tag{6}$$

Den negative værdi er for langt væk, så denne forkastes. Da cirklerne C1 og C2 er symmetriske om andenaksen, kan man multiplicere tallet 6.1 med 2, så den totale bredde er
$2 \cdot 6.1\,\mathrm{dm}$

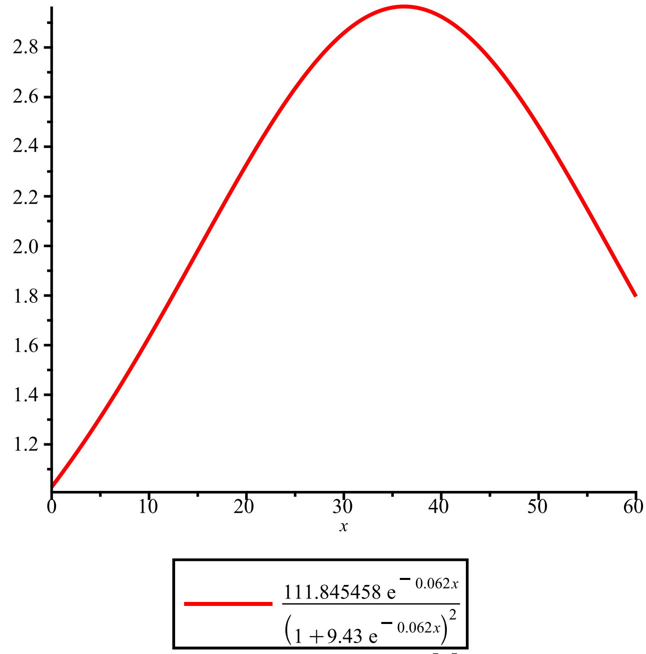
$$12.2 \text{ dm} \tag{7}$$

Dvs. 12.2dm er den totale bredde af vinduerammen.

Opgave 11:
restart : *with*(*Gym*) :
Funktionen defineres.
$$f(x) := \frac{191.3}{1 + 9.43 \cdot \exp(-0.062 \cdot x)} :$$
(a) Funktionsværdien i $x = 20$ beregnes.
$f(20) = 51.30208644$
Den afledede funktion i $x = 20$ beregnes.
$f'(20) = 2.327733789$

Dvs. $f(20) = 51.3$ og $f'(20) = 2.33$.

(b) Grafen for den afledede tegnes i intervallet $[0; 60]$.
$plot(f'(x), x = 0..60, color = red, legend = f'(x))$



(c) Størst væksthastighed kræver $f''(x) = 0$ eller $f(x) = \frac{M}{2}$ hvor M er den maksimale bæreevne.
$f''(x) = 0$
$$\frac{130.7831309\, \left(e^{-0.062\, x}\right)^2}{\left(1 + 9.43\, e^{-0.062\, x}\right)^3} - \frac{6.934418396\, e^{-0.062\, x}}{\left(1 + 9.43\, e^{-0.062\, x}\right)^2} = 0 \quad (8)$$
solve(%)
$$36.19187251 \quad (9)$$
Ifølge modellen skulle der gå i alt 36 dage før væksthastigheden for antallet af raskmeldte er størst.

Alternativt,
$$f(x) = \frac{191.3}{2}$$
$$\frac{191.3}{1 + 9.43\, e^{-0.062\, x}} = 95.65000000 \quad (10)$$

solve(%)

$$36.19187253 \tag{11}$$

Samme konklusion.

Opgave 12:

restart : *with*(*Gym*) :

(a) Givet $X\sim bin(250, 0.125)$. Sandsynligheden for netop 31 personer i stikprøven af 250, der har en tatovering er

$P(X=31) = binpdf(250, 0.125, 31)$

$$P(X=31) = 0.07625911848 \tag{12}$$

Eller

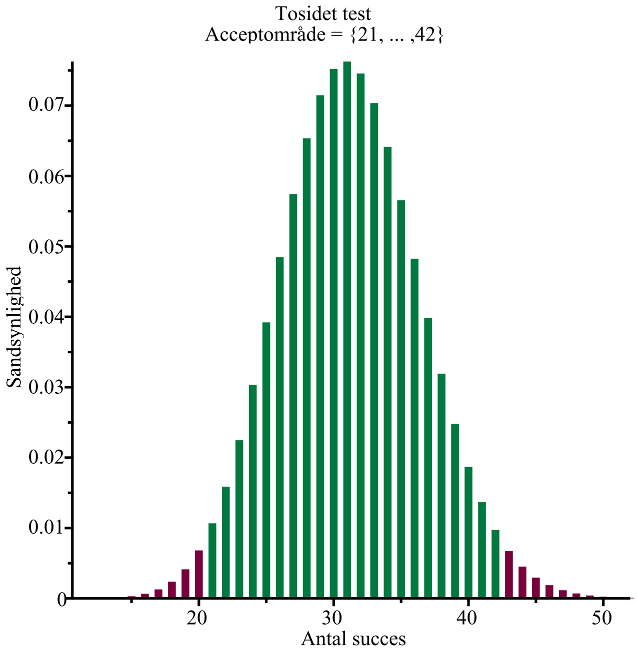
$P(X=31) = \binom{250}{31} \cdot 0.125^{31} \cdot (1 - 0.125)^{250 - 31}$

$$P(X=31) = 0.07625911848 \tag{13}$$

Dvs. sandsynligheden for netop 31 unge i stikprøven har en tatovering, er ca. 7.6%

(b) Man kan benytte Maple til det her.

binomialTest(250, 0.125, 0.05, *tosidet*)



Acceptmængden er $A = \{21,..., 42\}$.

(c) Tallet 45 ligger ikke i acceptmængden, men i den kritiske mængde, så derfor afvises nulhypotesen. Derfor er andelen af unge med en tatovering ændret siden år 2013.

Opgave 1

Pdf−fil eksporteret til LaTeX.

Matematik B delprøve 2, 26. maj 2021.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 2

Opgave 7.

(a) Anvend dist−formlen.

$$dist(P,l)=\frac{|3\cdot 2+7-4|}{\sqrt{3^2+1}} \blacktriangleright 2.84605$$

Dvs. afstanden mellem P og l er ca. 2.85

Opgave 3

Opgave 8.

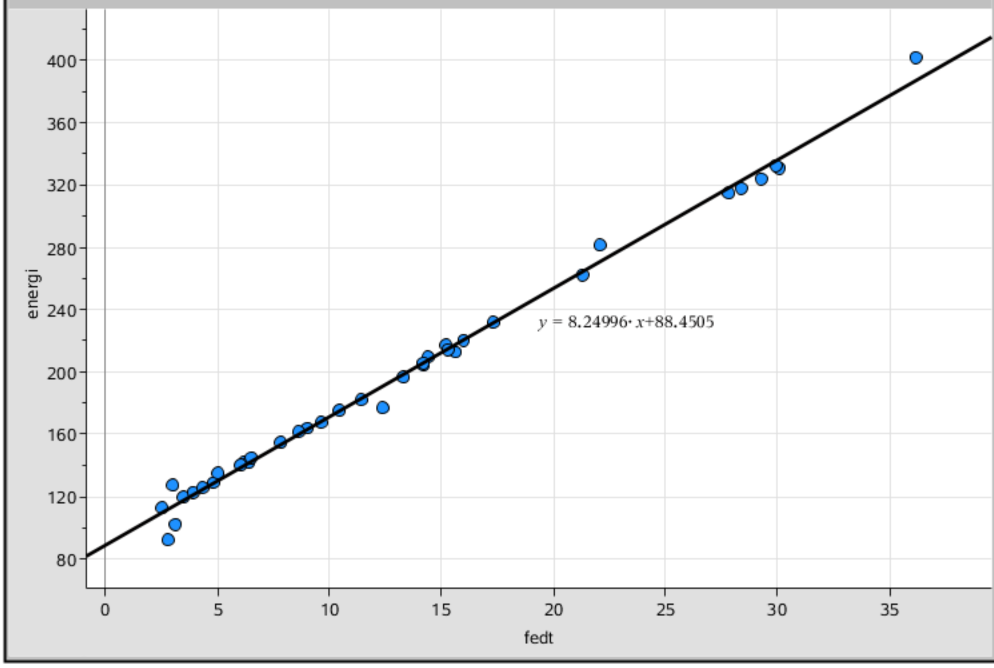
Alt data indlæses i regnearket til højre.

(a) Der laves et punktplot nedenfor. Der laves lineær regression i regnearket.

Man aflæser a=8.25 og b=88.45 .

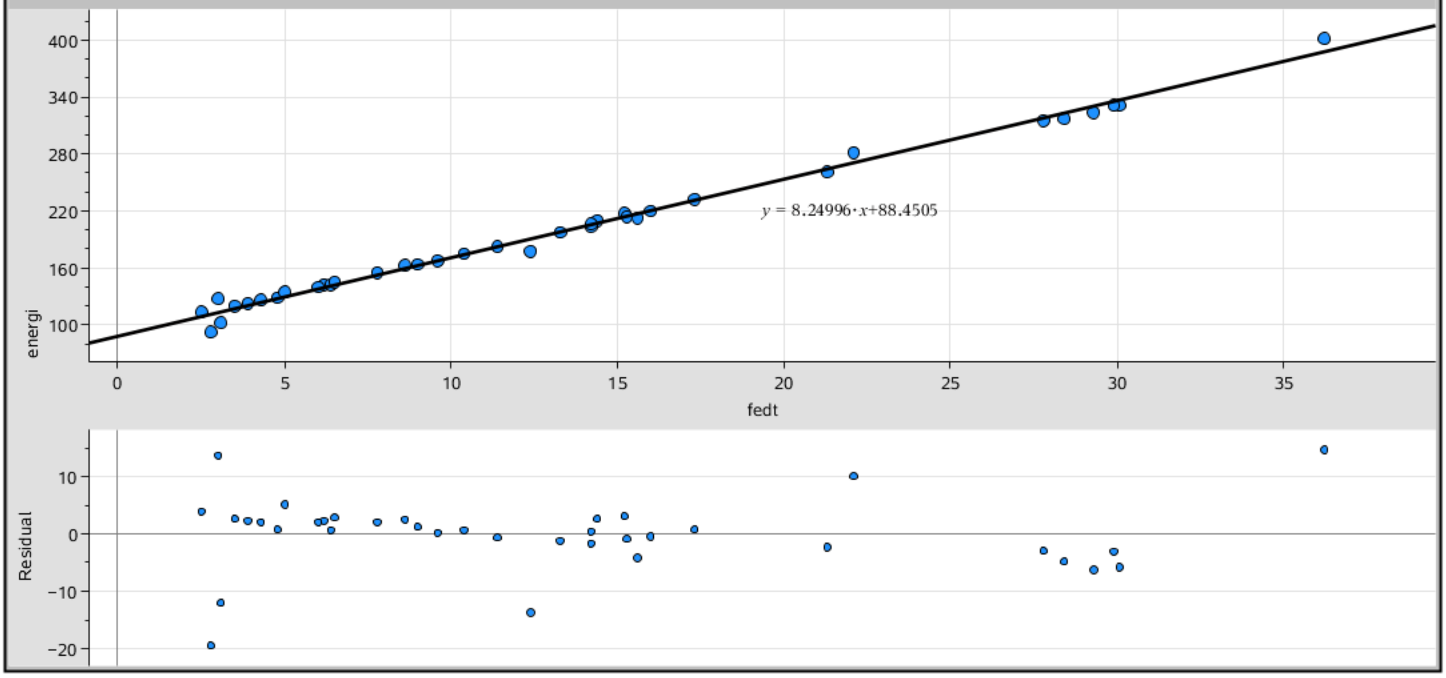
	A fedt	B en...	C	D
=				=LinRegtT
1	14.4	210	Titel	Lineær r...
2	15.2	217	Alternati...	β & ρ ≠ ...
3	6.2	142	RegEqn	a+b*x
4	3.5	120	t	70.4795
5	36.2	402	PVal	2.59348...
6	12.4	177	df	35.
7	27.8	315	a	88.4505
8	13.3	197	b	8.24996
9	10.4	175	s	6.51196
10	3.9	123	SESlope...	0.117055
11	14.2	204	r²	0.993003
12	7.8	155	r	0.996496
13	9	164	Resid	{2.75004..
14	14.2	206		
15	6.4	142		
16	6	140		
17	30.1	331		
18	15.6	213		
19	29.9	332		
20	11.4	182		
21	29.3	324		

C3 ="RegEqn"



(b) Residualplottet samt residualspredningen plottes og bestemmes. Se nedenfor.

(c) Residualspredningen er s=6.5 (aflæst før). Ud fra plottet ser man, at residualerne er godt spredt, hvorfor modellen er meget anvendelig. Residualspredningen ser umiddelbart ud til at være god, da denne er lille trods stigningen af y−værdierne.



Opgave 4

Opgave 9. Funktionen defineres. $f(x):=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{7}{2}\cdot x^2+10\cdot x-3$ ▸ *Udført*

(a) Den afledede funktion til $f(x)$ er (og defineres...)

$df(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*, dvs. $df(x)$ ▸ $x^2-7\cdot x+10$

Dernæst løses ligningen f'(x)=0 vha. solve.

$\text{solve}(df(x)=0,x)$ ▸ $x=2$ or $x=5$

Dvs. x = 2 ∨ x = 5.

(b) Monotoniforholdene for f(x) bestemmes. Man vælger tre tal der er forskelligt fra nulpunkterne for f'(x)=0. Vælg 1, 3 og 6. Lav fortegnsvariation.

$df(1)$ ▸ 4, $df(3)$ ▸ -2, $df(6)$ ▸ 4

Et monotoniskema dannes.

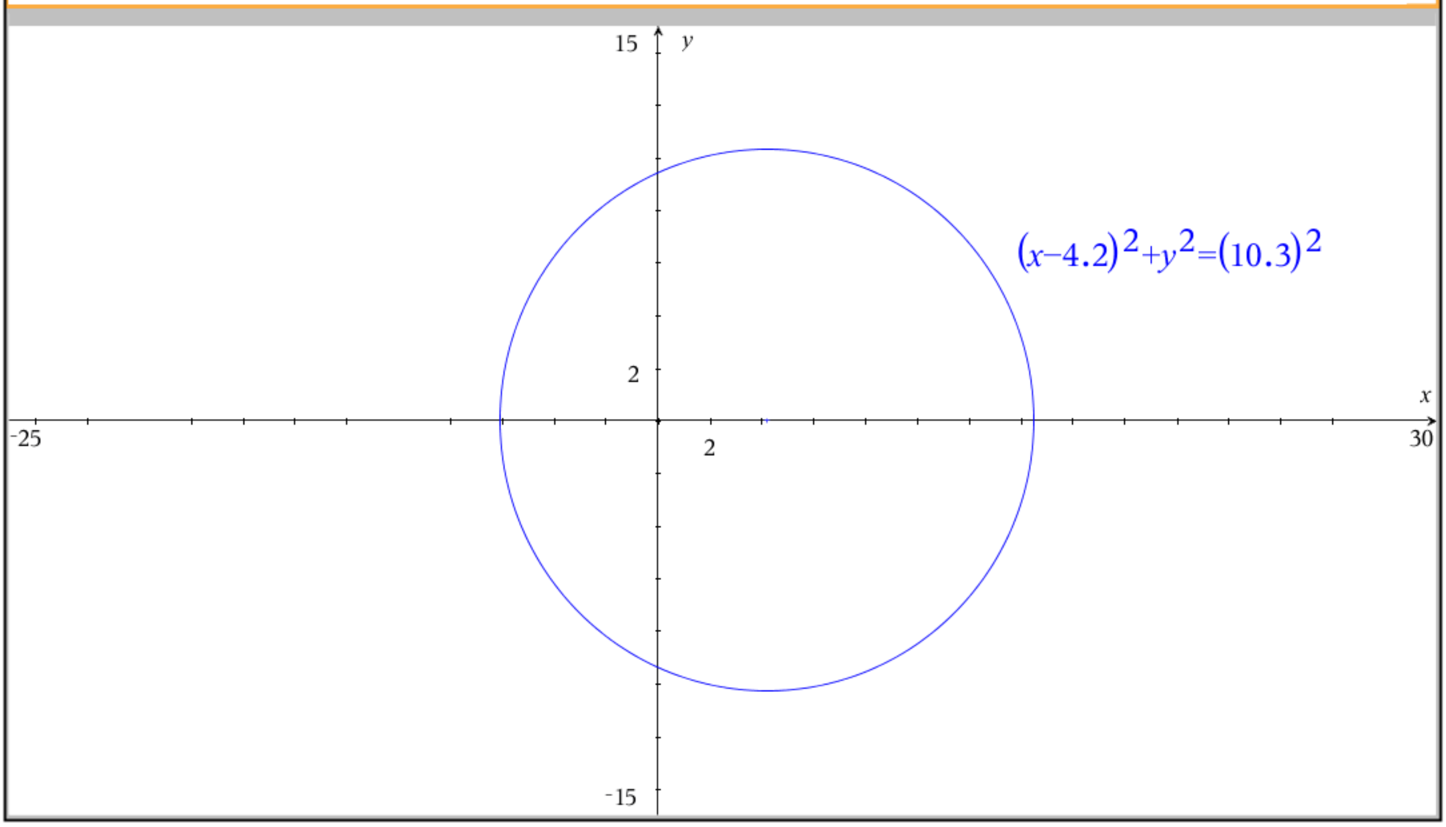
$$\begin{bmatrix} x & & 2 & & 5 & \\ f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow \end{bmatrix}$$

Dermed kan man konkludere, at f(x) er voksende i intervallet]−∞;2] og i [5;∞[. Endelig er f(x) aftagende i intervallet [2;5].

Opgave 5

Opgave 10.

(a) Cirklen tegnes nedenfor.



(b) En anden cirkelligning er givet ved

$(x+4.2)^2+y^2=10.3^2$.

Højden af vinduerammen kan findes det sted, hvor x=0.

$\text{solve}\left((0+4.2)^2+y^2=(10.3)^2,y\right)$ ▸ $y=^-9.40479$ or $y=9.40479$

Dvs. højden af vinduerammen er 9.4dm.

Bredden af vinduerammen bestemmes, når y=0.

$\text{solve}\left((x+4.2)^2+0^2=(10.3)^2,x\right)$ ▸ $x=^-14.5$ or $x=6.1$

Den negative værdi er for langt væk, så denne forkastes. Da cirklerne C1 og C2 er symmetriske om andenaksen, kan man multiplicere tallet 6.1 med 2, så den totale bredde er $2\cdot 6.1$ ▸ 12.2

Dvs. 12.2dm er den totale bredde af vinduerammen.

Opgave 6

Opgave 11.

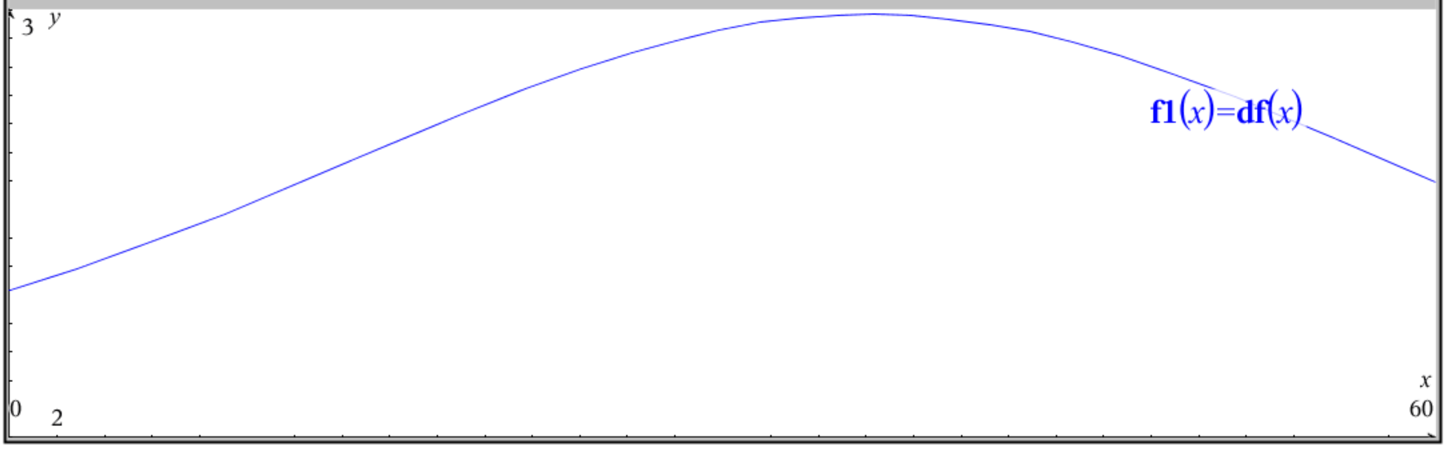
(a) Funktionen defineres samt den afledede defineres.

$\mathbf{f}(x):=\frac{191.3}{1+9.43\cdot \mathbf{e}^{-0.062\cdot x}}$ ▸ *Udført* , $\mathbf{df}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*

Funktionsværdien i x = 20 beregnes $\mathbf{f}(20)$ ▸ 51.3021 . Den afledede funktion i x = 20 beregnes $\mathbf{df}(20)$ ▸ 2.32773 .

Dvs. f(20) = 51.3 og f'(20) = 2.33.

(b) Grafen for den afledede tegnes i intervallet [0;60].



(c) Størst væksthastighed kræver f"(x)=0 eller f(x)=M/2 hvor M er den maksimale bæreevne.

$\text{solve}\left(f(x)=\frac{191.3}{2},x\right) \blacktriangleright x=36.1919$

Ifølge modellen skulle der gå i alt 36 dage før væksthastigheden for antallet af raskmeldte er størst.

Opgave 7

Opgave 12.

(a) Givet X~bin(250, 0.125). Sandsynligheden for netop 31 personer i stikprøven af 250, der har en tatovering er $P(X=31) = \text{binomPdf}(250,0.125,31) \blacktriangleright 0.076259$

Eller

$P(X=31) = \text{nCr}(250,31)\cdot(0.125)^{31}\cdot(1-0.125)^{250-31} \blacktriangleright 0.076259$

Dvs. sandsynligheden for netop 31 unge i stikprøven har en tatovering, er ca. 7.6%.

(b) Acceptmængden findes.

$\text{invBinom}(0.025,250,0.125) \blacktriangleright 21$

$\text{invBinom}(1-0.025,250,0.125) \blacktriangleright 42$

Dvs. acceptmængden er A={21,...,42}.

(c) Tallet 45 ligger ikke i acceptmængden, men i den kritiske mængde, så derfor afvises nulhypotesen. Derfor er andelen af unge med en tatovering ændret siden år 2013.