# Zastosowanie metod Monte Carlo

## w dyskretnym modelu rynku

Radosław Gaska, Jeremiasz Leszkowicz, Paweł Popławski

17 Kwietnia 2016

# Plan Prezentacji

1. Opis modelu
2. Estymacja parametrów
3. Miara martyngałowa
   - Dyskretna wersja twierdzenia Girsanowa
   - Uniezależnienie zmiennych
   - Wyznaczenie miary
4. Monte Carlo
   - Opcja Europejska
   - Opcja Europejska z klauzurą up-and-out
   - Opcja Europejska z warunkiem typu paryskiego

# Opis Modelu

Rozważmy model rynku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, na którym ceny podawane są raz dziennie, oraz istnieją tylko dwa notowania, oraz instrument wolny od ryzyka.
Niech $S_t^1$ oznacza wartość indeksu WIG20, $S_t^2$ wartość akcji KGHM, natomiast $S_t^0$ wartość instrumentu wolnego od ryzyka chwili t. Zakładamy że zwroty z indeksu, oraz akcji mają zwroty logarytmiczno normalne, tzn:

$$ln(\frac{S_{t+1}^i}{S_t^i}) = \alpha_i \cdot N_t^i + \beta_i$$

Gdzie $N_t^1$ i $N_t^2$ to zmienne standardowe normalne, posiadające stałą korelację.

# Kalibracja Modelu

Zwroty:

$$R_i = log(S_{i+1}) - log(S_i)$$

dryf:

$$\beta = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i$$

wariancja:

$$\alpha = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_i - \beta)^2$$

# Dyskretna wersja twierdzenia Girsanowa

Rozważmy przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$Z_1, Z_2, ..., Z_n \text{ i.i.d. oraz: } Z_i \sim N(0,1)$$

Wprowadźmy na $(\Omega, \mathcal{F})$ nową miarę $\mathbb{Q}$ daną wzorem

$$d\mathbb{Q} = exp(\sum_{i=1}^{n} \mu_i Z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2)$$

Wtedy $\mathbb{Q}$ jest miarą probobilistyczną. Podnadto zmienne $Z_i - \mu_i$ mają w niej niezależne, oraz mają rozkład $N(0,1)$

# Uniezależnienie zmiennych losowych

Aby skorzystać z twierdzenia Girsanowa potrzebujemy ciągnu niezależnych zmiennych losowych o rozkładach standardowych normalnych.
Aby przekształcić nasze zmienne losowe do tej postaci skorzystamy z poniższych twierdzeń:
**TW1** Jeżeli $X$ jest wektorem losowym normalnym, którego składowe są nieskorelowane, to są one niezależne.
**TW2** Niech $X$ będzie $n$-wymiarowym wektorem normalnym, tzn. $X \sim N(\mu, \Sigma)$, wtedy dla macierzy $A$ rozmiaru $n$ na $k$ oraz $k$ wymiarowego wektora $a$ wektor $Y = aX + A$ ma rozkład $N(A\mu + a, A\Sigma A^T)$

Oznaczmy:

$X \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

Poszukujemy takiego przekształcenia $A$ aby:

$$AX \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

wtedy na mocy twierdzenia 1 otrzymamy zmienne losowe niezależne.
Na mocy twierdzenia 2 mamy:

$$X \sim N(A^{-1}\hat{\mu}, A^{-1}\Sigma(A^{-1})^T)$$

Stąd łatwo możemy wyznaczyć macierz $A$

# Miara martyngałowa

Twierdzenie Girsanowa mówi że miara $\mathbf{Q}$ spełniająca:

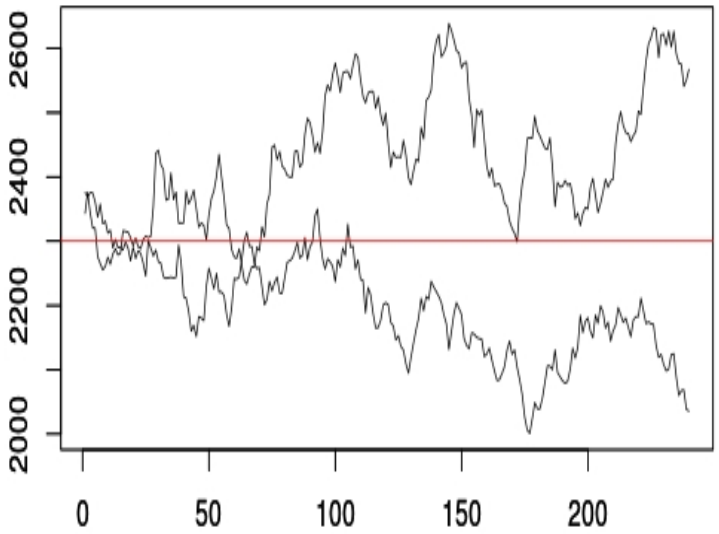
$$d\mathbf{Q} = exp(\mu_1 \sum_{i=1}^{T} Z_i^1 + \mu_2 \sum_{i=1}^{T} Z_i^2 - \frac{T}{2}(\mu_1 + \mu_2))dP$$

Jest miarą probabilistyczną, oraz nasze procesy cen są w niej martyngałami.
W niej proces ceny WIG20 ma postać:

$$S_{t+1} = exp(\alpha_1 Z_t + ln(1 + r) - \frac{\alpha_1^2}{2})S_t$$

gdzie $Z_i \sim N(0, 1)$

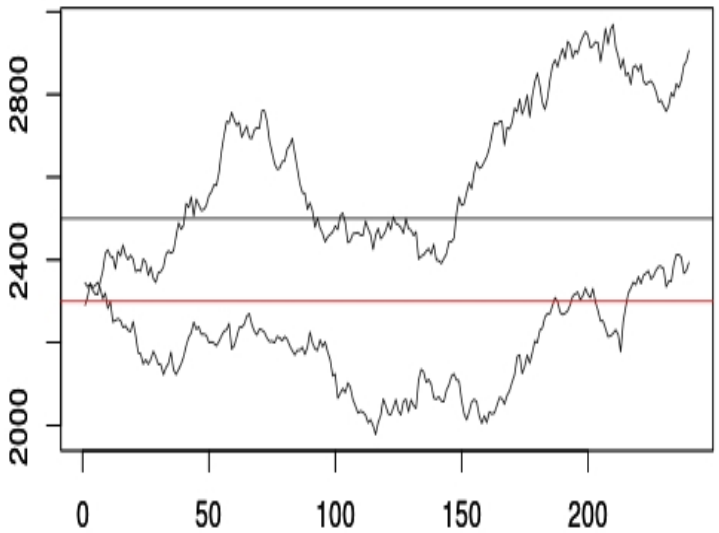
# Opcja europejska Call




$$payoff = max(0, S_t - K)$$

cena: $\sim 177$

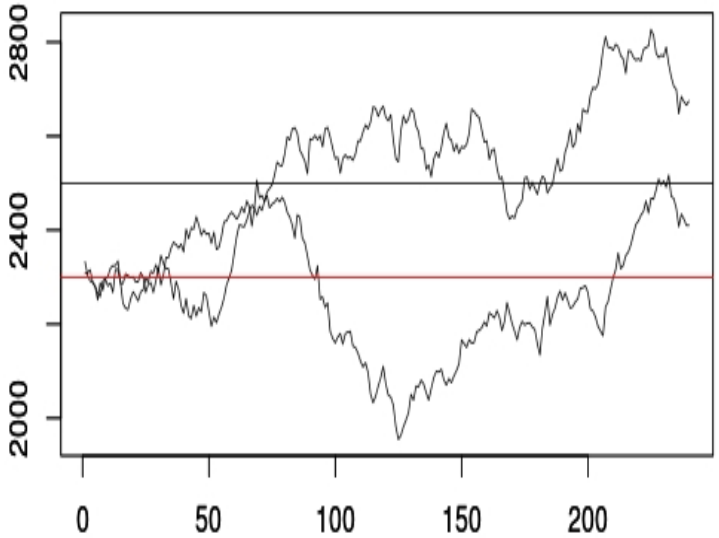
# Up-and-out




$payoff = max(0, S_t - K)$ pod warunkiem że cena akcji nie przekroczyła bariery

cena:$\sim$ 4.48

# warunek typu paryskiego




$payoff = max(0, S_t - K)$ pod warunkiem że cena akcji będzie powyżej bariery przez 10 dni z rzędu.

cena:164.94