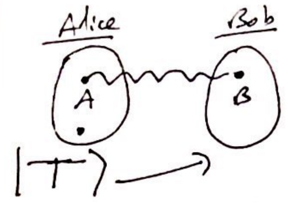
Quantum Teleportation

- $|\psi\rangle_T = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ⇒ Elimizde bir kübit var. Belli olasılıkla "0" belli olasılıkla "1" gelme ihtimali var.

- EPR Pair : $|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$



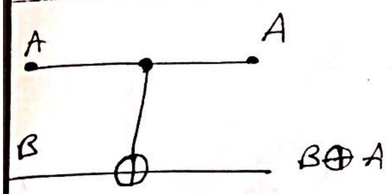
⇒ Elimizde bir dolanık çift olsun. Alice ve Bob. Bunlar arasında bir dolanıklık var. Ve $|T\rangle$ state'ini yani transfer (teleport) etmek istediğimiz state'i bu dolanıklık üstünden teleport edeceğiz.

• Hadamard Operation

$$H = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| \qquad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

• CNot Gate



$$\left.\begin{aligned} U_{cnot}|00\rangle &= |00\rangle \\ U_{cnot}|01\rangle &= |01\rangle \\ U_{cnot}|10\rangle &= |11\rangle \\ U_{cnot}|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned}\right\} \quad U_{cnot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Protocol

$$|\psi_{initial}\rangle_{TAB} = \left(\alpha|0\rangle_T + \beta|1\rangle_T\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)_{AB}$$

$$= \left(\alpha|000\rangle_{TAB} + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle\right)$$

⇒ Hadamard Operasyonu şöyle anlatılabilir. Elimizde $|0\rangle$ state'i olsun. Hadamardı uygularsak:

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$ %50 ihtimal $|0\rangle$, %50 ihtimal $|1\rangle$ haline getirir. $|1\rangle$ state'ine uygularsak ise $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$ haline getirir. +, − işaretlerine dikkat etmek gerekir.

⇒ CNOT Gate ise NOT klassik kapısı gibi bir algoritma kapısıdır.

$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ ⇒ Bu notasyon iki farklı yerdeki Qbit'in durumlarını ~~[illegible]~~ ifade ediyor. Alice'in Qbit'i $|0\rangle$, Bob'un Qbit'i $|0\rangle$.

⇒ CNOT ise Alice'in state'i $|0\rangle$ ise hiçbirşey yapmıyor. $|1\rangle$ ise Bob'un state'ini değiştiriyor.

$CNOT|00\rangle = |00\rangle$

$Cnot|01\rangle = |01\rangle$

$Cnot|10\rangle = |11\rangle$

$Cnot|11\rangle = |10\rangle$

⇒ Hatırlatma:

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ Şimdi devam edebiliriz.

$$|\psi\rangle_{TAB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle\right]$$

$$\Rightarrow |\psi_1\rangle = \left[U^{(TA)}_{CNOT} \otimes \mathbb{1}^{(B)}\right]|\psi\rangle_{TAB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle\right]$$

$$\Rightarrow |\psi_2\rangle = H^{(T)} \otimes \mathbb{1}^{(A)} \otimes \mathbb{1}^{(B)}|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left[\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle\right]$$

$$\Rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\Big[|00\rangle_{TA}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_B + |01\rangle_{TA}(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B + |10\rangle_{TA}(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_B + |11\rangle_{TA}(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_B\Big]$$

⇒ $|\psi_1\rangle$ için Teleport State'i ve $|0\rangle$ state'ine U(CNOT) operasyonu uyguluyoruz. B'ye hiç birşey yapmadığımız için $\mathbb{1}$ (Birim operatör) uyguluyoruz.

⇒ $|\psi_2\rangle$ state'ini elde etmek için de $|\psi_1\rangle$'e sadece T (teleport) state'ine Hadamard operasyonu uyguluyoruz.

⇒ Şimdi Alice bu noktada bir ölçüm yapsın ($|00\rangle$, $|01\rangle$ ...)

$$\text{Bob} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \frac{1}{4} & \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \\ \frac{1}{4} & \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \\ \frac{1}{4} & \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$|00\rangle \longrightarrow$ Bob $\mathbb{1}^{(B)}$

$|01\rangle \longrightarrow$ Bob $\sigma_x^{(B)}$

$|10\rangle \longrightarrow$ Bob $\sigma_z^{(B)}$

$|11\rangle \longrightarrow$ Bob $\sigma_z^{(B)}\sigma_x^{(B)}$

$\longrightarrow |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$