Matematik B

Anders Jørgensen

Løste opgaver:

Juni 2015

Dette opgavesæt er givet til FriViden

Dette opgavesæt blev lavet til en terminsprøve

d. 7. april af

Anders Jørgensen, VUC Vestsjælland Syd

Karakteren for opgavesættet blev bedømt til **12-tal**.

Opgavesættet besvarer kravene ift. de taksonomiske niveauer

De efterfølgende sider viser udregningerne af delprøve 1 og 2

Anders Jørgensen
Juni 2015 - delprøve 1
Skrevet ind på PC

Opgave 1: Løsning

I denne opgave skal vi reducere to opgaver.

$$(a-b)^2 + a(2b-a)$$

Vi ved, at kvadratsætning 2 gælder $(a-b)^2$.

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - a^2 =$$
$$b^2$$

Dette er løsningen.

Vi skal reducere følgende udtryk. Dette kan gøres på flere måder.

$$\frac{4p^8}{20p^2} =$$
$$\frac{4p^8}{4 \cdot 5p^2} =$$
$$\frac{p^8}{5p^2} =$$

Vi ved, at der gælder nogle potensregneregler. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\frac{p^8}{5p^2} =$$
$$\frac{p^6}{5}$$

Dette er løsingen.

Opgave 2: Løsning

Ved aflæsning af grafen ses det, at C har den største b-værdi idet den rammer y-aksen på det højeste punkt. Ligeledes aflæses a, som i dette tilfælde er A, da den har en meget stejl stigning, her gælder det, at $a > 0$.

Opgave 3: Løsning

Vi indsætter $x = 1$ i ligningen.

$$\ln(x) + x^2 + 5 = 6$$

Da dette indsættes, gælder det at $\ln(1) = 0$.

$$0 + 1^2 + 5 = 6 \Leftrightarrow$$
$$6 = 6$$

Så $x = 1$ er løsningen til ligningen.

Opgave 4: Løsning

Vi har fået en funktion. Den skal differentieres.

$$f(x) = 4x^2 + 2 \cdot \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

Vi ved at der gælder regler for differentiering af funktioner.

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^{2-1} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 8x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dette er den afledte funktion.

Opgave 5: Løsning

Arealet af integralet bestemmes ved følgende måde. Integralet er givet:

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x)\, dx$$

Vi ved, at der gælder regneregler for integrering af funktioner.

$$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} = x^3 - x^2$$

Konstanten k regnes ikke med her, idet vi skal bestemme arealet af et område.

Så den integrerede funktion ser sådan ud:

$$[x^3 - x^2]_1^3 = 3^3 - 3^2 - (1^3 - 1^2) = 27 - 9 - 0 = 18$$

Dette er arealet af funktionen med grænserne 1 og 3.

Opgave 6: Løsning

Her er andengradsligningen givet:

$$5x^2 + bx + 5 = 0$$

Da den skal have en løsning gælder det, at $d = 0$.

Vi løser derfor en ligning for den ubekendte.

$$\begin{aligned} &b^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &b^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow \\ &b^2 = 100 \Leftrightarrow \\ &b = \pm\sqrt{100} \Leftrightarrow \\ &b = \pm 10 \end{aligned}$$

Dette er det ønskede.

Tid brugt i HÅNDEN: 7 minutter og 16 sekunder. Delprøve 2 løses i Maple, som ses næste side.

Matematik B-niveau HFE
1. juni 2015 delprøve 2
Terminsprøve
VUC Vestsjælland Syd

Anders Jørgensen, Sh-mab05

Opgave 7 - Lineære funktioner

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi kan i denne opgave se, at vi har med en lineær funktion at gøre. Vi bruger en lineær regression, så kan det ikke slå fejl. Først defineres oplysningerne for x og y.

$x := [0, 5, 18, 44]$

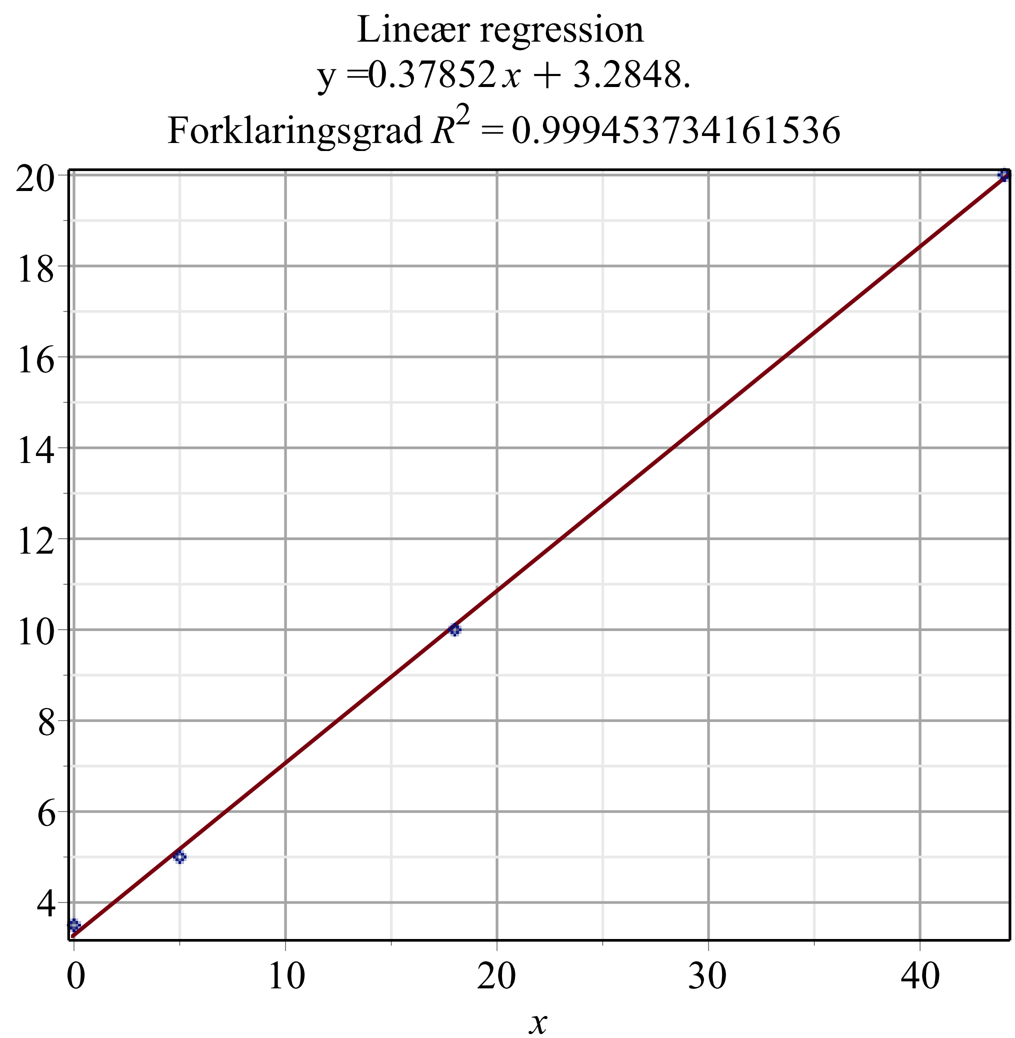
$$[0, 5, 18, 44] \quad \textbf{(1.1.1)}$$

$y := [3.5, 5, 10, 20]$

$$[3.5, 5, 10, 20] \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Vi bruger følgende kommando:

LinReg(*x*, *y*)



Så regressionen bestemmer tallene a og b samt giver os forskriften for $f(x)$.

Vi definerer $f(x)$.

$f(x) := 0.37852\,x + 3.2848$

$$x \rightarrow 0.37852\,x + 3.2848 \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

Dette er vores regneforskrift, hvor $a = 0.37852$ og $b = 3.2848$.

Delopgave b)

Vi indsætter 12 på x's plads.

$f(12)$

$$7.82704 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Så efter 12 måneder har antallet af brugerne vokset med 7.82 mio.

Delopgave c)

Vi kan se, at der er gået præcist 10 år efter første observation. Vi tager, ifølge et år = 12 måneder, og ganger med 10.

$10 \cdot 12$

$$120 \quad \textbf{(1.3.1)}$$

Dvs. der skal indsættes 120 på x's plads.

$f(120)$

$$48.70720 \quad \textbf{(1.3.2)}$$

Modellen er ikke helt ved siden af ift. antagelserne på Plaxo's hjemmeside. Der har de skrevet 50 mio brugere, modellen skriver 48.7 mio brugere. Så en høj difference, men tæt på resultatet.

Opgave 8 - Eksponentielle funktioner

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

I opgaven fås oplysninger, der er nok til at opstille en model af typen $f(x) = b \cdot a^x$.

Vi indsætter vores oplysninger, bemærk, at a står i procent, så dette omregnes.

$a = 1 + r$:

$a = 1 + \left(\frac{3}{100}\right)$

$$a = \frac{103}{100} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$a = 1.0300 \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Vi kan nu opstille modellen.

$f(x) := 6000 \cdot 1.03^x$

$$x \rightarrow 6000\ 1.03^x \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Dette er vores model. Vi indsætter 5 på x's plads og undersøger, om hvor meget træ, indhegningen vokser med efter 5 år.

$f(5)$

$$6955.644444 \quad \textbf{(2.1.4)}$$

Så efter 5 år er mængden af træ i hegn steget til $6955.644m^3$.

Delopgave b)

I opgaven fås der oplysningen 4000. Vi erstatter b værdien med 4000 frem for 6000. Den kalder vi for $g(x)$.

$g(x) := 4000 \cdot 1.03^x$

$$x \rightarrow 4000\ 1.03^x \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Vi sætter $6000 = g(x)$.

$g(x) = 6000$

$$4000\ 1.03^x = 6000 \quad \textbf{(2.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 13.71723742]] \quad \textbf{(2.2.3)}$$

Så når mængden af træ er på 4000, vil der gå 13.71 år før, at mængden er på 6000.

Opgave 9 - Potensfunktioner

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har en potensfunktion, hvor vægten af et dyr er beskrevet samt hvilepulsen. Vi definerer funktionen. Bemærk, at y erstattes med $f(x)$.

$f(x) := 241 \cdot x^{-0.25}$

$$x \rightarrow \frac{241}{x^{0.25}} \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Dette skal vi bruge for at bestemme hvilepulsen for et dyr på 10 kg. Vi indsætter da 10 på x's plads.

$f(10)$

$$135.5242594 \quad \textbf{(3.1.2)}$$

Så et dyr på 10 kg har en hvilepuls på 135.524 slag pr. minut.

Vi vil nu undersøge et dyrs vægt, hvor hjerteslaget er på 90 pr. minut. Vi løser en ligning.

$f(x) = 90$

$$\frac{241}{x^{0.25}} = 90 \quad \textbf{(3.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 51.41598173]] \quad \textbf{(3.1.4)}$$

Så dyret med hjerteslag på 90 pr. minut må have en vægt på 51.41 kg.

Delopgave b)

En vægt er dobbelt så stor. Dvs. 1 hvis dyret A vejer 1 og dyret B vejer 2

Vi bruger formlen.

$r_y = \left((1 + r_x)^a - 1 \right) \cdot 100\,\% :$

Vi indsætter vores oplysninger.

$r_y = \left((1 + 1)^{-0.25} - 1 \right) \cdot 100$

$$r_y = -15.91035847 \quad \textbf{(3.2.1)}$$

Så dyret A må have et hjerte puls på 15.91% mindre end dyret B.

Opgave 10 - Differentialregning

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har i denne opgave fået en funktion. Den defineres.

$f(x) := \sqrt{x} - x + 7$

$$x \rightarrow \sqrt{x} - x + 7 \tag{4.1.1}$$

Vi ved også, at $x > 0$.

Vi skal nu differentiere funktionen og løse en ligning for $f'(x) = 0$.

$f'(x)$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \tag{4.1.2}$$

Dette er den afledte funktion. Den løses for x.

$f'(x) = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \tag{4.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{1}{4}\right]\right] \tag{4.1.4}$$

Her har vi fået vores x værdi.

Delopgave b)

Vi skal undersøge hvornår funktionen er voksende og aftagende. Vi vælger tal forskelligt fra x. Her vælges 0.2 og 0.4

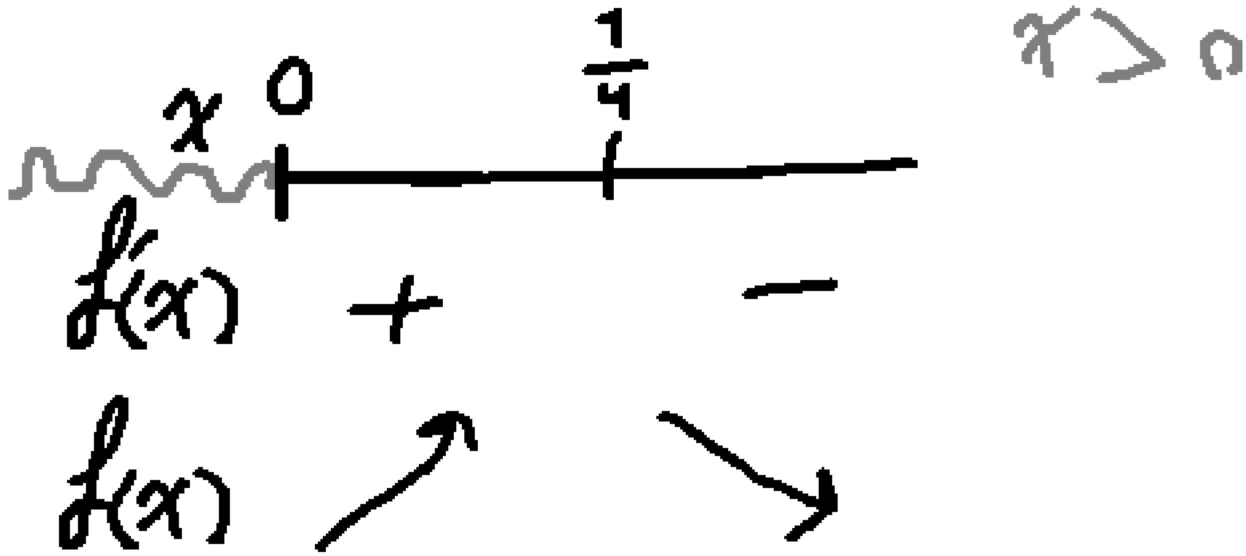
$f'(0.2)$

$$0.118033988 \tag{4.2.1}$$

$f'(0.4)$

$$-0.2094305850 \tag{4.2.2}$$

Vi kan tegne monotonilinjen.



Så ved vi, hvornår f er voksende og aftagende.

f er voksende i intervallet $\left]0;\ \frac{1}{4}\right]$

f er aftagende i intervallet $\left[\frac{1}{4};\infty\right[$

Vi skal også bestemme maksimum for f. Maple har en kommando.

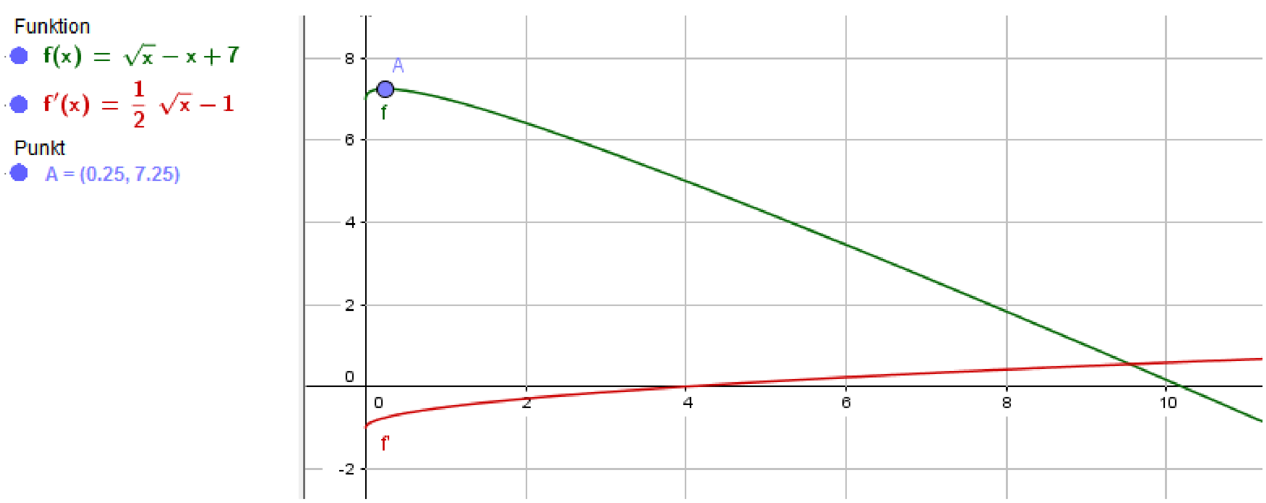
$$maximize\left(f(x),\ x = \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{4} + \frac{27}{4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$7.2500 \tag{4.2.4}$$

Dette må være maksimum for f. Dette kan vises i GeoGebra.



Opgave 11 - Trigonometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har fået en skitse oplyst. I Maple - men også ved WordMat - kan denne opgave udregnes. Jeg bruger Maple ved hjælp af trekantsolve.

Jeg indsætter mine oplysninger for trekant ABC.

$trekantsolve(C = 90, b = 43.6, a = 30.2)$

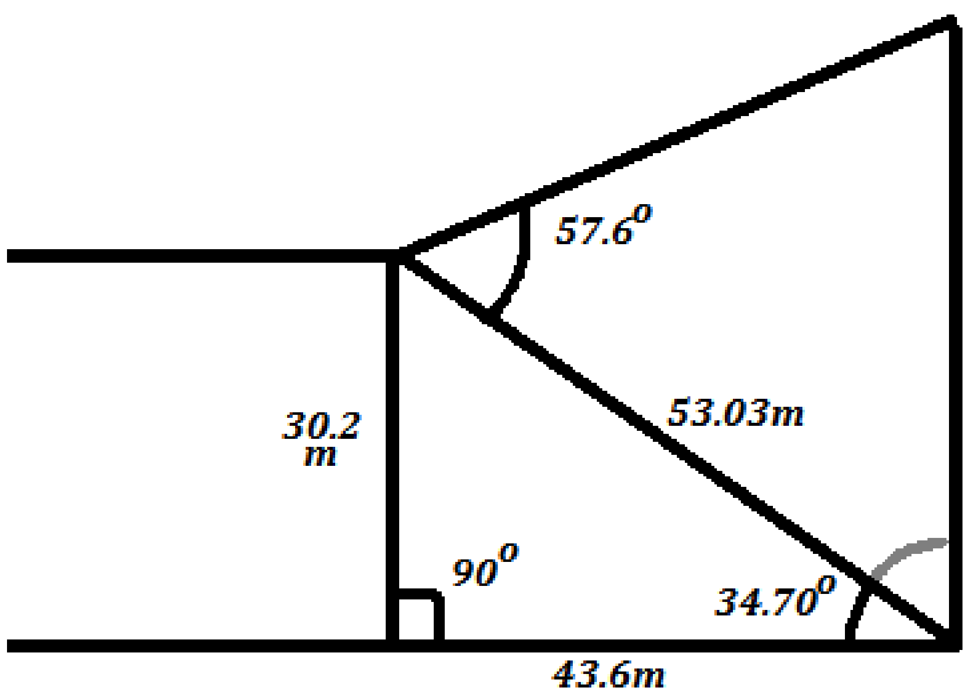
$$\{A = 34.70881816, B = 55.29118183, c = 53.03772243\} \tag{5.1.1}$$

I følge udregningen via Maple er længden $|AB|$ bestemt til at være 53.03772243m. Vinkel A blev bestemt til at være 34.70881816^o.

Bemærk, at Maple ikke laver grader "^{o}" tegn.

Delopgave b)

Vi ønsker nu at bestemme højden af skorstenen. Jeg har lavet en skitse nedenfor.



I følge min skitse har jeg nok oplysninger til at udregne den næste trekant. Jeg kan se, at jeg har en 90^o retvinklet trekant, men hvis jeg trækker 34.70^o, dvs. vinkel A fra 90^o vil jeg få den anden vinkel A, for at kunne bestemme højden af skorstenen.

$90 - 34.70881816$

$$55.29118184 \quad (5.2.1)$$

Dette må være den anden vinkel A. Derfor har jeg nok oplysninger. Vi regner den som vi gjorde før i delopgave a.

restart

$trekantsolve(A = 55.29118184, B = 57.6, c = 53.03772243)$

$$\{C = 67.10881816, a = 47.3272436, b = 48.6094541\} \quad (5.2.2)$$

Bemærk, at jeg ikke skrev d i trekantsolve, idet Maple kun accepterer a, b og c. Derfor valgte jeg c. Men i virkeligheden er det bare $|AB|$.

Vi fik bestemt højden der i følge udregningerne vil være 48.60 meter. Dvs højden af $|AD|$.

Opgave 12 - Integralregning

restart
$with(Gym)$:

Delopgave a)

Vi starter kort ud med at definere vores funktion.

$f(x) := 4x^2 - x^4$

$$x \to 4x^2 - x^4 \quad (6.1.1)$$

Den løses for $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$

$$-x^4 + 4x^2 = 0 \quad (6.1.2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

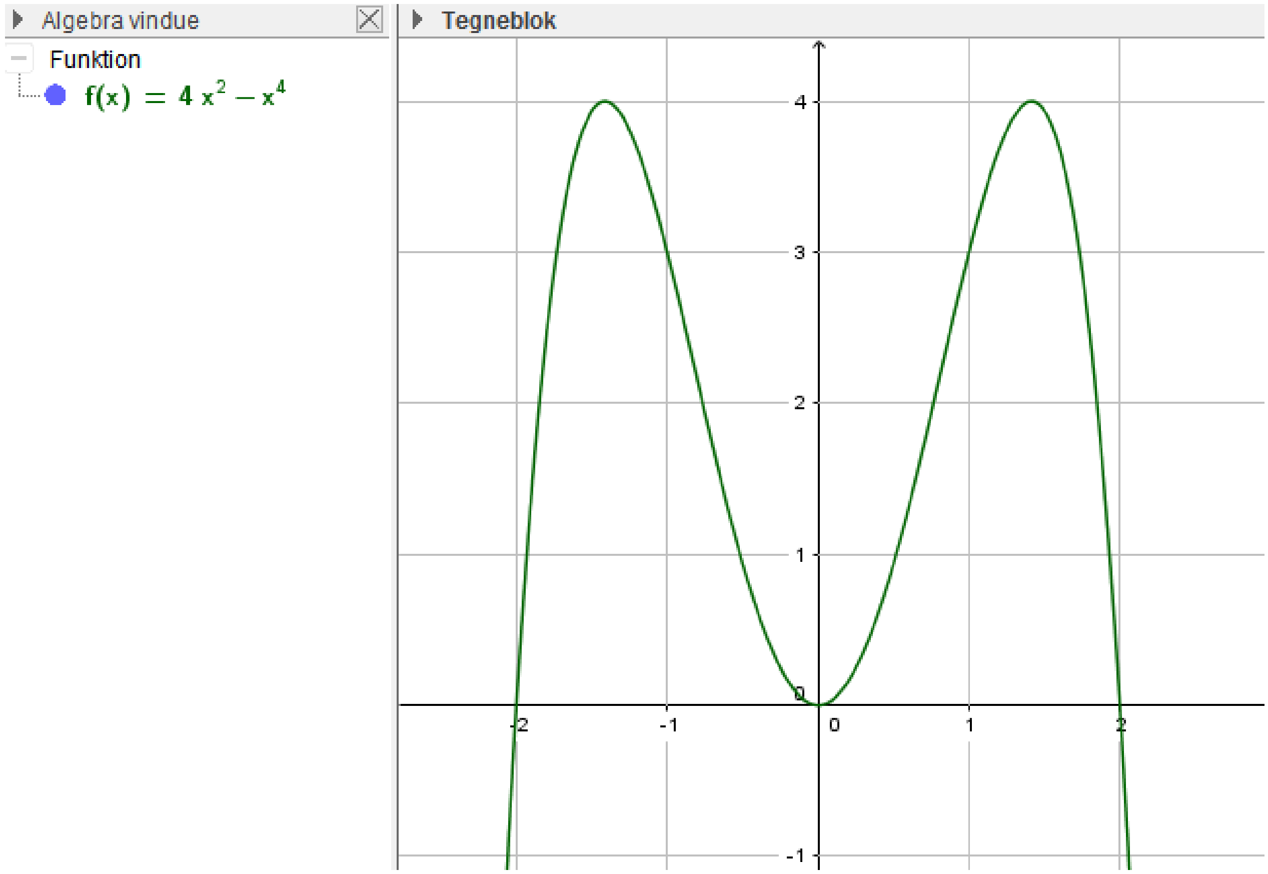
$$[[x = 0], [x = 0], [x = 2], [x = -2]] \quad (6.1.3)$$

Vi har 4 rødder, men to af rødderne er de samme.

$L = \{-2, 0, 0, 2\}$

$$L = \{-2, 0, 2\} \quad (6.1.4)$$

Vi skal nu tegne grafen for f. Jeg vælger at tegne den i GeoGebra.



Delopgave b)

Vi skal bestemme en tangentligning ud fra *f*. Vi differentierer først *f*.

$f'(x)$

$$-4\,x^3 + 8\,x \tag{6.2.1}$$

Dette er den afledte funktion. Vi regner videre.

Tangentligningen ser sådan ud:

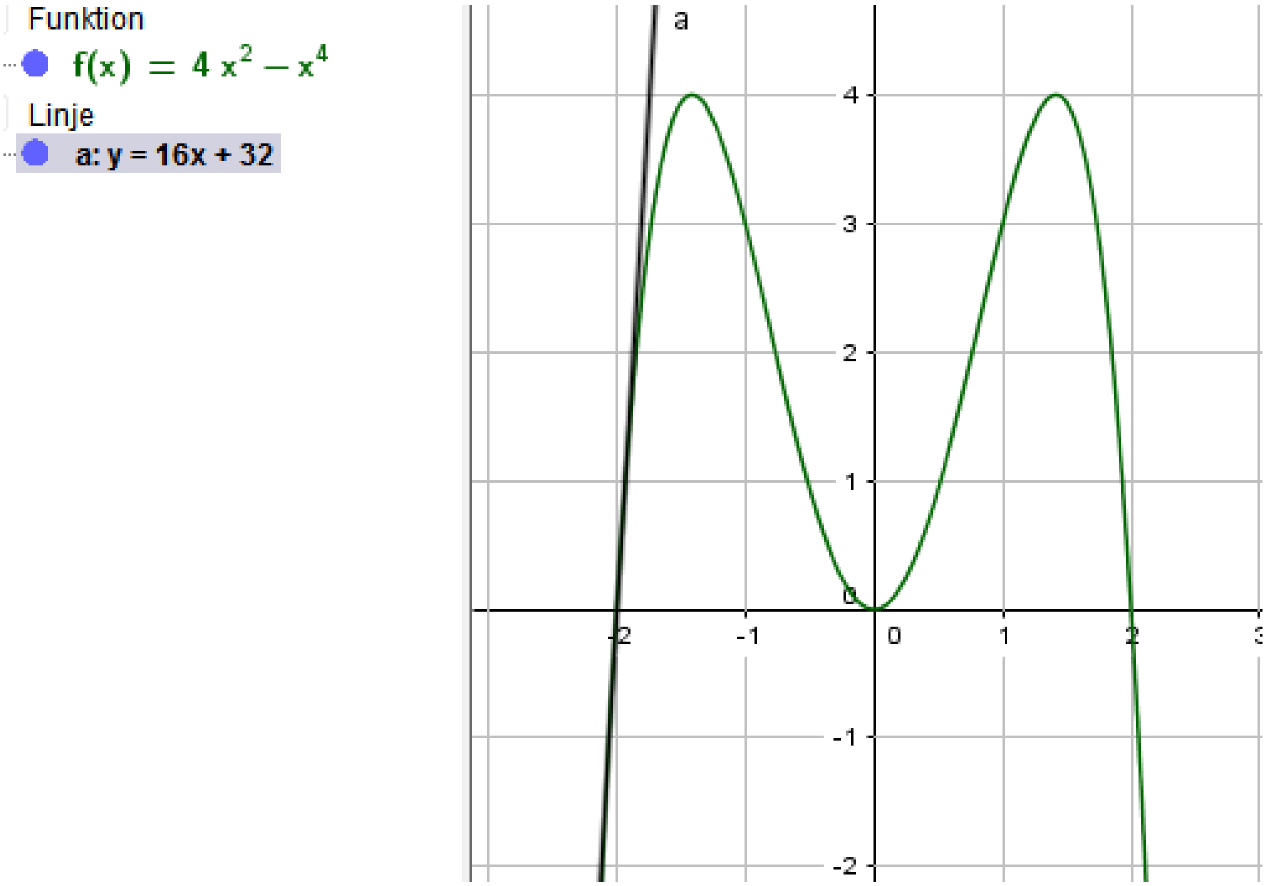
$y = f'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0)$:

Vi indsætter vores oplysninger, bemærk at førstekoordinaten er -2. Vi indsætter det som x_0.

$y = f'(-2)\ (x - (-2)) + f(-2)$

$$y = 16\,x + 32 \tag{6.2.2}$$

Dette er tangentligningen. Vi kan visualisere det i GeoGebra.



Vi har løst det ønskede.

Delopgave c)

Vi skal integrere funktionen. Vi kender vores funktion og vi kender vores rørningspunkter. Vi skal bestemme for første kvadrant, derfor må punktmængderne (grænseværdierne) være $a = 0$ og $b = 2$.

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (-4x^3 + 8x)^2}\, \mathrm{d}x \tag{6.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$L = 8.4292 \tag{6.3.2}$$

Længden må være, i følge udregningerne, 8.4292. Dette er det ønskede.

Tid brugt på PC: 00:44:20
Dvs. 44 minutter og 20 sekunder (Delprøve 2)
Totalt for begge delprøver:
51 minutter og 36 sekunder.