INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-A.htm

Matematik A HHX 17. august 2012
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er givet.

Indsættes $t = -\frac{3}{2}$ så fås

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Man kan direkte se, at de er parallelle, men det kan eftervises ved beregning

$det(\vec{a}, \vec{b}) = -3 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 = -3 + 3 = 0$

Opgave 2

Punktet $C(4, -1)$, og $r = 3$, så er

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 3^2$

Opgave 3

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + k,$

Så er

$5 = \frac{1}{4} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 + k \Leftrightarrow k = 5$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5$

Opgave 4

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, så er $f'(x) = x^2 - 2x$ og ligningen $f'(x) = 0$.

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$
Den andenafledede anvendes.
$f''(x) = 2x - 2$, så er
$f''(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$, lokalt max.
$f''(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, lokalt min

Hermed er $f(x)$:
- Voksende i $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
- Aftagende i $x \in [0; 2]$.

Opgave 5

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1600 - 1200}{6 - 4} = \frac{400}{2} = 200$$
$b = y_1 - a \cdot x_1 = 1200 - 200 \cdot 4 = 400$
Så er
$f(x) = 200x + 400$

I år 2012 ($x = 9$)
$f(9) = 200 \cdot 9 + 400 = 2200$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 1

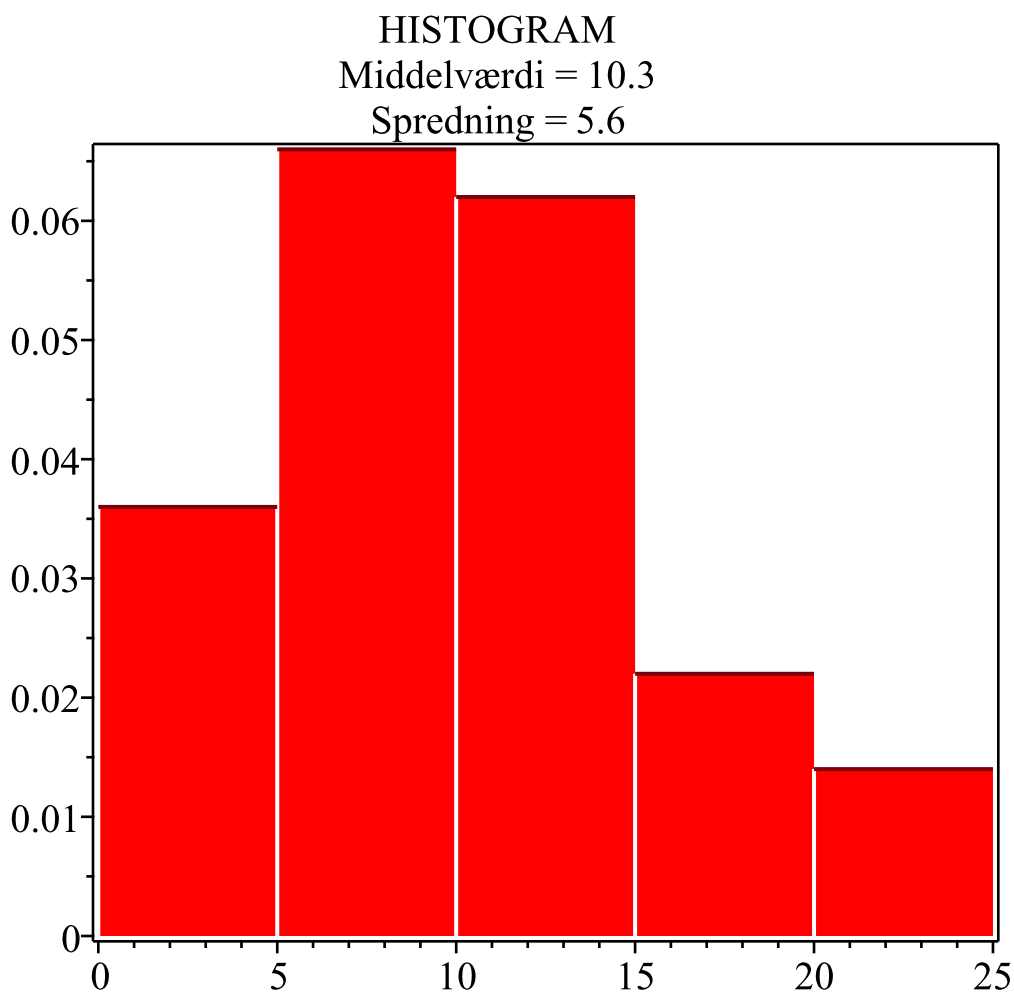
restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Man kan lave et plot af dette grupperede sæt.

$$A := \begin{bmatrix} 0..5 & 18 \\ 5..10 & 33 \\ 10..15 & 31 \\ 15..20 & 11 \\ 20..25 & 7 \end{bmatrix} :$$

plotHistogram(*A*)



Vi har fået lavet et histogram, som viser fordelingen.

Spgm. b

Maple kan lave det hele for os.

typeinterval(A)

$$[5..10] \tag{6.2.1}$$

kvartiler(A)

$$[6.0606, 9.8485, 13.871] \tag{6.2.2}$$

median(A)

$$9.8485 \tag{6.2.3}$$

gennemsnit(A)

$$10.3000000000000 \tag{6.2.4}$$

varians(A)

$$31.1600000000000 \tag{6.2.5}$$

spredning(A)

$$5.58211429478115 \tag{6.2.6}$$

Man kan naturligvis også udregne det.

Opgave 2

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$A := [-2, 4]$:; $B := [3, -1]$:; $C := [6, 5]$:

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.1)}$$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.2)}$$

Spgm. b

Man kan bestemme vinkel A vha. vinkel mellem to vektorer. Man kan anvende kommandoen *vinkel*$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$52.12501634 \quad \textbf{(7.2.1)}$$

Opgave 3

restart :; *with*(*Gym*) :**local** D

Alle funktioner defineres.

$\mathrm{D}(x) := \frac{3}{100} \cdot x^2 - 50 \cdot x + 10000$:

$D1(x) := \frac{3}{100} \cdot x^2 - 40 \cdot x + 9000$:

$S(x) := \frac{2}{100} \cdot x^2 + 47 \cdot x + 400$:

$l(x) := 5300$:

Spgm. a

Området FO bestemmes.

$$FO = \int_0^{100} (\mathrm{D}(x) - l(x))\, \mathrm{d}x$$

$$FO = 230000 \quad \textbf{(8.1.1)}$$

$$PO = \int_0^{100} (l(x) - S(x))\, \mathrm{d}x$$

$$PO = \frac{745000}{3} \quad \textbf{(8.1.2)}$$

evalf[9](%)

$$PO = 248333.333 \quad \textbf{(8.1.3)}$$

Så PO vil være 248333.333 *kr*.

Spgm. b

$intervalsolve(D1(x) = S(x), x = 0..200)$

$$[100] \quad \textbf{(8.2.1)}$$

$D1(100)$

$$5300 \quad \textbf{(8.2.2)}$$

Det passer.

Spgm. c

$$\int_0^{100} (D1(x) - S(x))\, dx$$

$$\frac{1285000}{3} \quad \textbf{(8.3.1)}$$

$evalf[9](\%)$

$$428333.333 \quad \textbf{(8.3.2)}$$

Så *VE* vil være 248333.333 *kr.*

Opgave 4

$restart :; with(Gym) :$

$DB(x, y) := -50 \cdot x^2 + 2000 \cdot x - 10 \cdot y^2 + 100 \cdot y$

$$DB := (x, y) \mapsto -50\, x^2 - 10\, y^2 + 2000\, x + 100\, y \quad \textbf{(9.1)}$$

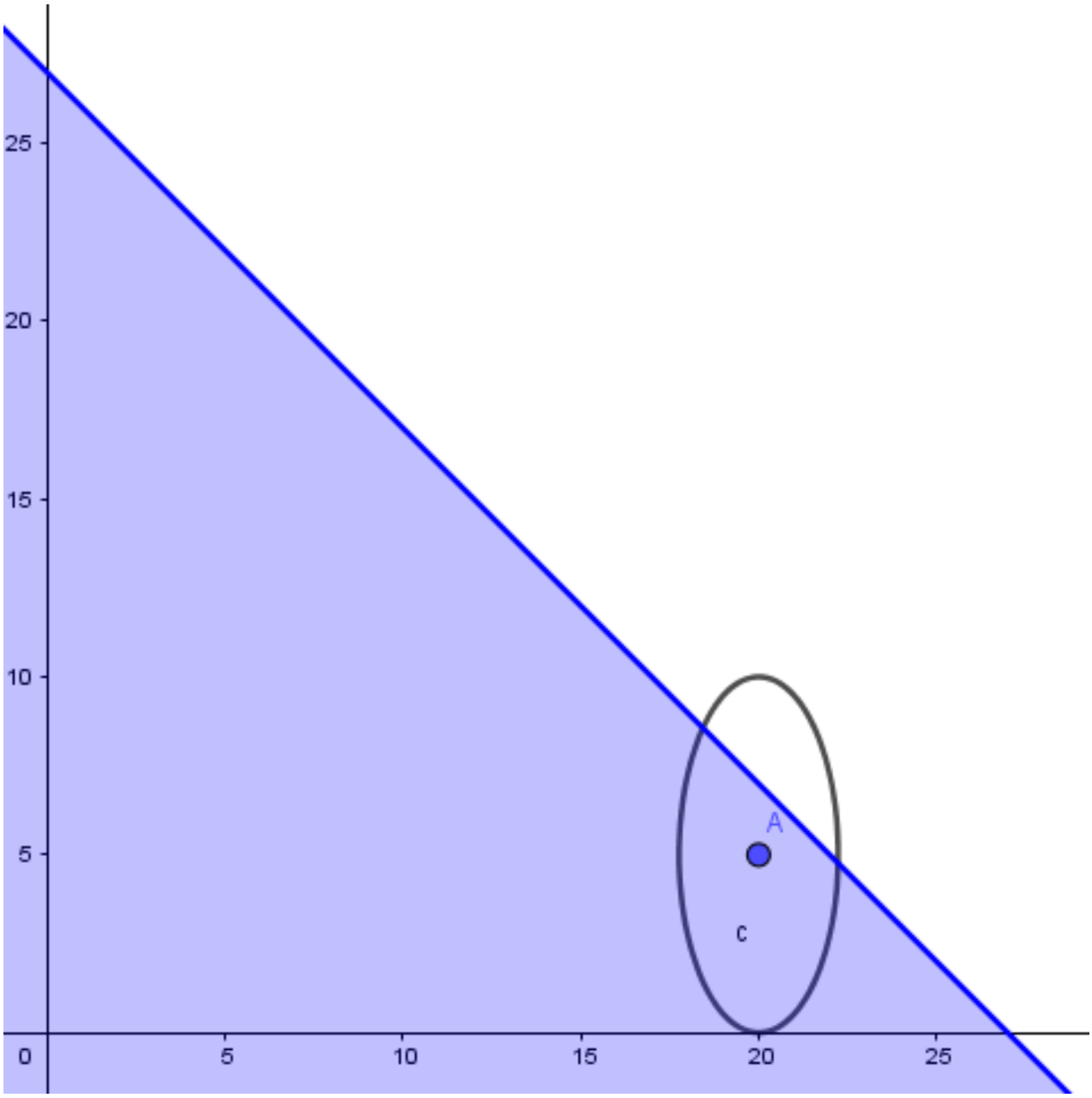
Spgm. a

$DB(x, y) = 20000$ omskrives

$$-50\, x^2 - 10\, y^2 + 2000\, x + 100\, y = 20000 \Leftrightarrow$$
$$-50 \cdot (x^2 - 40\, x) - 10 \cdot (y^2 - 10\, y) = 20000 \Leftrightarrow$$
$$-50 \cdot ((x - 20)^2 - 400) - 10 \cdot ((y - 5)^2 - 25) = 20000 \Leftrightarrow$$
$$-50 \cdot (x - 20)^2 - 10 \cdot (y - 5)^2 = 20000 - 400 \cdot 50 - 10 \cdot 25 \Leftrightarrow$$
$$-50 \cdot (x - 20)^2 - 10 \cdot (y - 5)^2 = -250 \Leftrightarrow$$
$$-50 \cdot (x - 20)^2 - 10 \cdot (y - 5)^2 = -250 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-50 \cdot (x - 20)^2}{-250} + \frac{-10 \cdot (y - 5)^2}{-250} = -\frac{250}{-250} \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x - 20)^2}{5} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$$

Spgm. b

Tegning i GeoGebra:



Spgm. c

Her anvendes hjørnemetoden.
$P(0, 27)$, $Q(27, 0)$, $R(20, 0)$, $S(0, 5)$, $T(20, 5)$.

$P = DB(0, 27)$

$$P = -4590 \tag{9.3.1}$$

$Q = DB(27, 0)$

$$Q = 17550 \tag{9.3.2}$$

$R = DB(20, 0)$

$$R = 20000 \tag{9.3.3}$$

$S = DB(0, 5)$

$$S = 250 \tag{9.3.4}$$

$T = DB(20, 5)$

$$T = 20250 \quad \textbf{(9.3.5)}$$

Vi ser, at det maksimale dækningsbidrag fås ved 20 BIO og 5 FORCE.

Opgave 5

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$2500000 \cdot 1.065 \cdot 1.04 \cdot 1.02 = 2824380$kr.

Spgm. b

$\left(\sqrt[3]{1.065 \cdot 1.04 \cdot 1.02} - 1\right) \cdot 100$

$$4.150423400 \quad \textbf{(10.2.1)}$$

Og det passer, at den gennemsnitlige rente på tre år er 4.15%.

Opgave 6

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Graf 2 ligner meget $\ln(x)$, så må graf 1 ligne $x \cdot \ln(x) - 1$, for da graf 2 skærer x-aksen i $x = 1$, så har graf 1 minimum. Dermed må graf 2 være den afledede af graf 1.

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Funktionen defineres.

$f(x) := -2x^3 + 12x^2 - 16x$

$$f := x \mapsto -2x^3 + 12x^2 - 16x \quad \textbf{(12.1)}$$

Spgm. a

Vi vælger monotoniforhold og ekstrema.

Monotoniforhold

Vi løser $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0.$

$$-6x^2 + 24x - 16 = 0. \quad \textbf{(12.1.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0.8452994616], [x = 3.154700538]] \quad \textbf{(12.1.1.2)}$$

Og vi anvender den dobbelte afledede

$f''(0.8452994616)$

$$13.85640646 \quad \textbf{(12.1.1.3)}$$

Dermed er der lokalt maksimum.

$f''(3.154700538)$

$$-13.85640646 \quad \textbf{(12.1.1.4)}$$

Dermed er der lokalt minimum.

Altså er funktionen:
- Voksende i intervallet $(-\infty; 0.8452994616]$ og $[3.154700538; \infty)$
- Aftagende i intervallet $[0.8452994616; 3.154700538]$.

Ekstrema

Løsningerne fra $f'(x) = 0$ indsættes i $f(x)$.

$f(0.8452994616)$

$$-6.158402875 \quad \textbf{(12.1.2.1)}$$

$f(3.154700538)$

$$6.15840285 \quad \textbf{(12.1.2.2)}$$

Vi konkluderer, at $f(x)$ har lokalt minimum -6.158402875 i $x = 0.8452994616$ og lokalt maksimum 6.15840285 i $x = 3.154700538$. Bemærk, at der ikke er globalt maksimum eller minimum i dette tilfælde, så kan man tænke over det…

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 30$	Arealet under grafen er givet som det bestemte integral af f i intervallet $[1; 3]$.
$\int_1^3 (ax + a)\,\mathrm{d}x = 30$	Funktionen bliver sat ind i integralet.
$\left[\frac{1}{2}ax^2 + ax\right]_1^3 = 30$	Funktionen integreres.
$4.5\,a + 3\,a - (0.5\,a + a) = 30$	Man anvender reglen $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
$a = 5$	Ligningen løses mht. a.

Spgm. b

$f(x) := 2 \cdot a \cdot x + a$

$$f := x \mapsto 2\,a\,x + a \quad \textbf{(13.2.1)}$$

$30 = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$30 = 10\,a \quad \textbf{(13.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a=3]] \tag{13.2.3}$$

Som er værdien af a.

Opgave 9A

$restart :; with(Gym) :$
Funktionen defineres.
$f(x) := x^3 - x^2 - 2x + 2 :$

Spgm. a

Tangenten bestemmes.
$y = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1)$

$$y = 3x + 5 \tag{14.1.1}$$

Så det passer med påstanden.

Spgm. b

Arealet af det grå område bestemmes. Man ser, at tangenten ligger OVER $f(x)$, så

$$A = \int_{-1}^{3} (3x + 5 - (f(x)))\, dx$$

$$A = \frac{64}{3} \tag{14.2.1}$$

Som er det ønskede areal.

Opgave 9B

$restart :; with(Gym) :$
$f(x, y) := 7500 \cdot x + 10000 \cdot y :$

Spgm. a

Hjørnemetoden anvendes. Man tester følgende punkter.
$P(0, 12)$, $Q(4, 7)$ og $R(16, 4)$. Man har:
$P = f(0, 12)$

$$P = 120000 \tag{15.1.1}$$

$Q = f(4, 7)$

$$Q = 100000 \tag{15.1.2}$$

$R = f(16, 4)$

$$R = 160000 \tag{15.1.3}$$

Vi ser, det minimale punkt er Q, så her skal der være 4 annoncer og 7 reklamer i avisen for, at prisen er minimal.

Spgm. b

Lad annoncer være a, så er
$f(x, y) := a \cdot x + 10000 \cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto a\,x + 10000\,y \tag{15.2.1}$$

$f(4, 7) \le f(0, 12)$

$$4\,a \leq 50000 \tag{15.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a \leq 12500]] \tag{15.2.3}$$

$f(4, 7) \leq f(16, 4)$

$$4\,a \leq 16\,a - 30000 \tag{15.2.4}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[2500 \leq a]] \tag{15.2.5}$$

Så a skal være i intervallet $2500 \leq a \leq 12500$.