Arrangement avec répétition – Arrangement sans répétition – permutations :

Définition :

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Tel que $p \leq n$.

- *Tout rangement de p éléments choisis parmi n éléments (avec possibilité de répétition d'un même élément) est appelé arrangement avec répétition de p éléments parmi n.* **noté : n^p.**
- *Tout rangement de p éléments choisis parmi n éléments (avec possibilité de répétition d'un même élément) est appelé arrangement sans répétition de p éléments parmi n.* **noté : A_n^p.**
- *Tout arrangement sans répétition de n éléments est appelé permutation de n éléments.* **Noté : $n!$.**

Combinaisons :

Définition :

- *Soit n et p deux entiers naturels. Soit E un ensemble contenant n éléments. Toute partie de E formée de p éléments de E avec $0 \leq p \leq n$ est appelée combinaison de p éléments de E.* **noté : C_n^p.**

Propriété :

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Tel que $0 \prec p \leq n$.

- *Le nombre $n!$ (factorielle n) est le produit : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots\ldots \times 1$.*

  Exemples : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, $7! = 7 \times 6 \times 5! = 42 \times 120 = 5040$, $0! = 1$, $1! = 1$.
- *Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments pris parmi n est :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times (n-p+1)}_{p\ facteurs}.$$

Exemples : $A_9^2 = \underbrace{9 \times 8}_{2\text{ facteurs}} = 72$, $A_7^3 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{3\text{ facteurs}} = 210$.

- *Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n avec $0 \leq p \leq n$ est :*

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{A_n^p}{p!}. \quad C_n^p = C_n^{n-p} , \ C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} , \ C_n^1 = C_n^{n-1} = n , \ C_n^n = 1, \ C_n^0 = 1.$$

Exemples : $C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$, $C_5^1 = C_5^4 = 5$.

Quelques types de tirage :

Type de tirage	Nombres de résultats possibles	L'ordre
simultanément	C_n^p	Sans importance
Successivement sans répétition	A_n^p	Important
Successivement avec répétition	n^p	Important

Nombre de possibilité d'ordonnée n élément :

Si on a éléments (distincts) dont n_1 sont identiques de type A, n_2 sont identiques de type B et n_3 sont identiques de type C, tel que : $n = n_1 + n_2 + n_3$

Donc le nombre de possibilité d'ordonné ces éléments est : $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$.

Terminologie :

Terme de probabilité	Son sens
Expérience aléatoire.	Toute expérience qui admet plus d'un résultat.
Univers des événements Ω .	L'ensemble des événements possibles pour une expérience aléatoire.
Evénement A .	A est une partie de l'univers des événements Ω .
Evénement élémentaire.	Tout événement contenant un seul élément.
Réalisation de l'événement $A \cap B$.	Si A et B sont réalisés simultanément.
Réalisation de l'événement $A \cup B$.	Si A et B ou l'un des deux est réalisé.
L'événement contraire de A.	C'est l'événement $\overline{A}\left(A \cup \overline{A} = \Omega \text{ et } A \cap \overline{A} = \varnothing\right)$.
A et B deux événements incompatibles.	$A \cap B = \varnothing$.

Propriétés :

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \le p(A) \le 1$
E	Evénement certain	$p(E) = 1$
$\varnothing$	Evénement impossible	$p(\varnothing) = 0$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement contraire de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Equiprobabilité :

Si tous les événements élémentaires, dans une expérience aléatoire dont l'univers des événements est Ω, sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement A de Ω est : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$.

Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $p(A) \neq 0$.

La probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé est :

$$p_A(B) = p\left(B/A\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

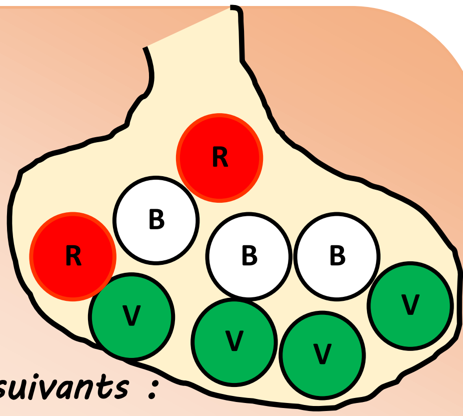
Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $p(A)\times p(B)\neq 0$.

$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=p(B)\times p_B(A)$.

Indépendance de deux événements :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire, On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

Exemple n° 1 :



Un sac contient 4 boules vertes, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

① – Combien y'a-t-il de résultat possible ?

② – Calculer la probabilité des événements suivants :

a - A « Obtenir trois boules de même couleur ».

b - B « Obtenir trois boules distincts deux à deux ».

c - C « Obtenir trois boules distincts ».

d - D « Obtenir au plus deux boules vertes ».

e - E « Obtenir au moins une boule blanche ».

Solution :

① – Chaque tirage est une combinaison de 3 boules parmi 9, donc le nombre de résultats possible est : $Card(\Omega)=C_9^3=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}=84$.

② – a - Obtenir trois boules de même couleur :

Dans ce cas c'est obtenir 3 boules vertes parmi 4 ou les 3 boules blanches. (On ne peut pas obtenir 3 boules rouges car il n'y a que 2 boules blanche dans le sac et le tirage est simultané).

C-à-d si on obtient VVV ou BBB.

Donc le nombre de tirages permettant d'avoir 3 boules de même couleur est : $Card(A)=C_4^3+C_3^3=4+1=5$. Donc : $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{5}{84}$

$\Longrightarrow$ $p(A)=\frac{5}{84}$

b - Obtenir trois boules distincts deux à deux

Correspond à l'obtention d'une boule de chaque couleur. Donc pour réaliser l'événement B, c'est tirer 1 boule verte parmi 4, une boule blanche parmi 3 et 1 boule rouge parmi 2. C-à-d si on obtient VBR.

Donc : $Card(B) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 3 \times 2 \times 4 = 24$.

Alors : $p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(B) = \dfrac{2}{7}}$

c - Obtenir trois boules distinctes

1ère Méthode :

Réaliser l'événement C, c'est tirer, $VV\overline{V}$ (deux boules Vertes et une boule rouge ou blanche), ou $BB\overline{B}$ (deux boules blanches et une boule verte ou rouge) ou $RR\overline{R}$ (Les deux boules rouges et une boule verte ou blanche) ou une boule de chaque couleur.

Donc : $Card(C) = C_4^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_6^1 + C_2^2 \times C_7^1 + C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = \dfrac{4 \times 3}{2} \times 5 + 3 \times 6 + 1 \times 7 + 24 = 79$.

2ème Méthode :

L'événement contraire de C est l'événement $\overline{C}$ (obtenir 3 boules de même couleur).

Donc : $Card(\overline{C}) = Card(A) = 5$. Alors : $Card(C) = Card(\Omega) - Card(\overline{C}) = 84 - 5 = 79$.

Donc : $p(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{79}{84}. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(C) = \dfrac{79}{84}}.$

d - Obtenir au plus deux boules vertes

C'est-à-dire le nombre de boules vertes obtenir ne doit pas dépasser 2.

1ère Méthode :

Réaliser l'événement D, c'est tirer $\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$ ou $V\overline{V}\,\overline{V}$ ou $VV\overline{V}$.

Donc : $Card(D) = C_5^3 + C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{3 \times 2} + 4 \times \dfrac{4 \times 5}{2} + \dfrac{3 \times 4}{2} \times 5 = 10 + 40 + 30 = 80$

2ème Méthode :

L'événement contraire de D est l'événement $\overline{D}$ (obtenir 3 boules vertes).

Donc : $Card(\overline{D}) = C_4^3 = 4$.

Alors : $Card(D) = Card(\Omega) - Card(\overline{D}) = 84 - 4 = 80$.

Donc : $p(D) = \dfrac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \dfrac{80}{84} = \dfrac{20}{21} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(D) = \dfrac{20}{21}}$

e - Obtenir au moins une boule blanche :

C'est-à-dire le nombre de boules blanches obtenir ne doit être moins de 1.

1ère Méthode :

Réaliser l'événement E, c'est tirer $B\overline{B}\overline{B}$ ou $BB\overline{B}$ ou BBB.

Donc : $Card(E) = C_3^1 \times C_6^2 + C_3^2 \times C_6^1 + C_3^3 = 3 \times \frac{6\times5}{2} + 3\times6 + 1 = 45 + 18 + 1 = 64$.

2ème Méthode :

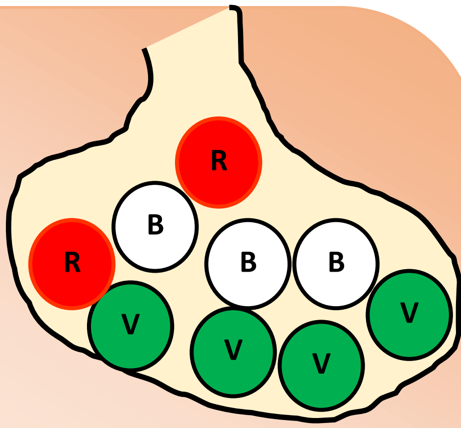
L'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$ (c'est tirer $\overline{B}\overline{B}\overline{B}$).

Donc : $Card(\overline{E}) = C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$.

Alors : $Card(E) = Card(\Omega) - Card(\overline{E}) = 84 - 20 = 64$.

Donc : $p(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21} \quad \Longrightarrow \quad p(E) = \frac{16}{21}$

Exemple n° 2 :



Un sac contient 4 boules vertes, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement et sans remise au hasard 3 boules du sac.

① – Combien y'a-t-il de résultat possible ?

② – Calculer la probabilité des événements suivants :

a - A « Obtenir trois boules de même couleur ».

b - B « Obtenir trois boules distincts deux à deux ».

c - C « Obtenir trois boules distincts ».

d - D « Obtenir au plus deux boules vertes ».

e - E « Obtenir au moins une boule blanche ».

Solution :

① – Chaque tirage est un arrangement sans répétition de 3 boules parmi 9, donc le nombre de résultats possible est :

$Card(\Omega) = A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$.

② – a - Obtenir trois boules de même couleur :

Réaliser l'événement A, c'est tirer 3 boules vertes parmi 4, ou les 3 boules blanches. c-à-d si on obtient VVV ou BBB.

Donc : $Card(A) = A_3^3 + A_4^3 = 3\times 2 + 4\times 3\times 2 = 30$.

Donc : $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{30}{504} = \dfrac{5}{84} \quad \Longrightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{84}$

b - Obtenir trois boules distincts deux à deux

Correspond à l'obtention d'une boule de chaque couleur. Donc pour réaliser l'événement B, c'est tirer 1 boule verte parmi 4, une boule blanche parmi 3 et 1 boule rouge parmi 2. C-à-d si on obtient VBR.

Donc : $Card(B) = \dfrac{3!}{1!1!1!} A_3^1 \times A_2^1 \times A_4^1 = 6\times 3\times 2\times 4 = 144$.

Alors : $p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{144}{504} = \dfrac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad p(B) = \dfrac{2}{7}$

c - Obtenir trois boules distinctes

1ère Méthode :

Réaliser l'événement C, c'est tirer, $VV\overline{V}$ (deux boules Vertes et une boule rouge ou blanche), ou $BB\overline{B}$ (deux boules blanches et une boule verte ou rouge) ou $RR\overline{R}$ (Les deux boules rouges et une boule verte ou blanche) ou une boule de chaque couleur.

Donc :

$$Card(C) = \frac{3!}{2!1!}\left(A_4^2 \times A_5^1 + A_3^2 \times A_6^1 + A_2^2 \times A_7^1\right) + \frac{3!}{1!1!1!} A_3^1 \times A_2^1 \times A_4^1 = 3(60+36+14) + 144 = 474.$$

2ème Méthode :

L'événement contraire de C est l'événement $\overline{C}$ (obtenir 3 boules de même couleur).

Donc : $Card(\overline{C}) = Card(A) = 30$. Alors : $Card(C) = Card(\Omega) - Card(\overline{C}) = 504 - 30 = 474$.

Donc : $p(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{474}{504}. \quad \Longrightarrow \quad p(C) = \dfrac{79}{84}.$

d - Obtenir au plus deux boules vertes

C'est-à-dire le nombre de boules vertes obtenir ne doit pas dépasser 2.

1ère Méthode :

Réaliser l'événement D, c'est tirer $\overline{V}\overline{V}\overline{V}$ ou $V\overline{V}\overline{V}$ ou $VV\overline{V}$.

Donc : $Card(D) = A_5^3 + \dfrac{3!}{2!1!}\left(A_4^1 \times A_5^2 + A_4^2 \times A_5^1\right) = 3\times 4\times 5 + 3(80+60) = 480$.

2ème Méthode :

L'événement contraire de D est l'événement $\overline{D}$ (obtenir 3 boules vertes).

Donc : $Card(\overline{D}) = A_4^3 = 4\times 3\times 2 = 24$.

Alors : $Card(D) = Card(\Omega) - Card(\overline{D}) = 504 - 24 = 480$.

Donc : $p(D) = \dfrac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \dfrac{480}{504} = \dfrac{20}{21} \quad \Longrightarrow \quad p(D) = \dfrac{20}{21}$

e - Obtenir au moins une boule blanche :

C'est-à-dire le nombre de boules blanches obtenir ne doit être moins de 1.

1ère Méthode :

Réaliser l'événement E, c'est tirer $B\overline{B}\overline{B}$ ou $BB\overline{B}$ ou BBB.

Donc : $Card(E) = \dfrac{3!}{2!1!}\left(A_3^1 \times A_6^2 + A_3^2 \times A_6^1\right) + A_3^3 = 3(90+36) + 6 = 384$.

2ème Méthode :

L'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$ (c'est tirer $\overline{B}\overline{B}\overline{B}$).

Donc : $Card(\overline{E}) = A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Alors : $Card(E) = Card(\Omega) - Card(\overline{E}) = 504 - 120 = 384$.

Donc : $p(E) = \dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \dfrac{384}{504} = \dfrac{16}{21} \quad \Longrightarrow \quad p(E) = \dfrac{16}{21}$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega) = \{x_1; x_2; .....; x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Calcul des probabilités $p(X = x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1; 2; .....; n\}$.

L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

- L'espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$.
- La variance de X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

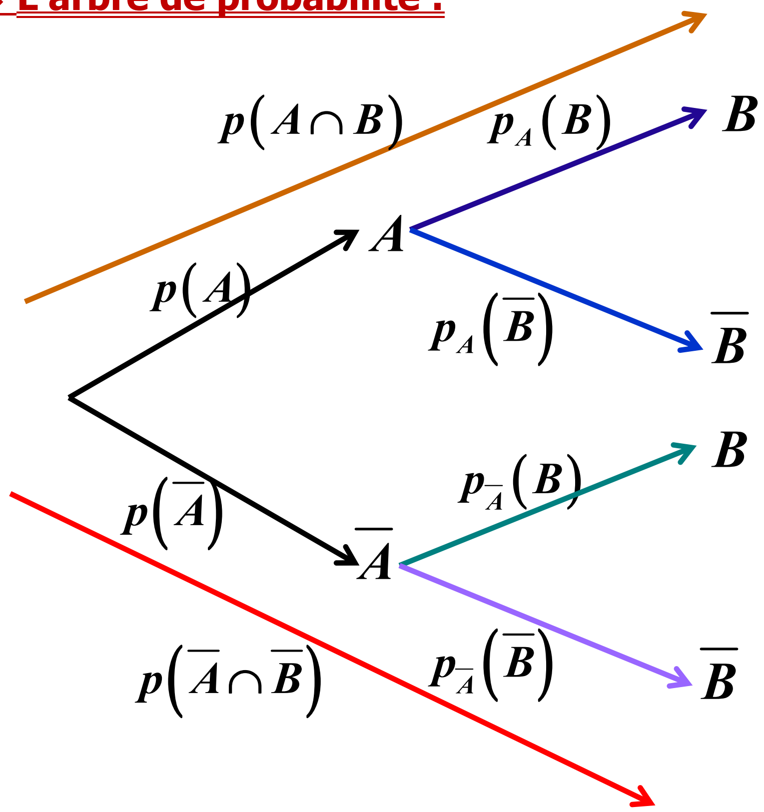
  Avec : $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$.
- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La loi binomiale :

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire On répète cette épreuve n fois de suite la variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p et on a :

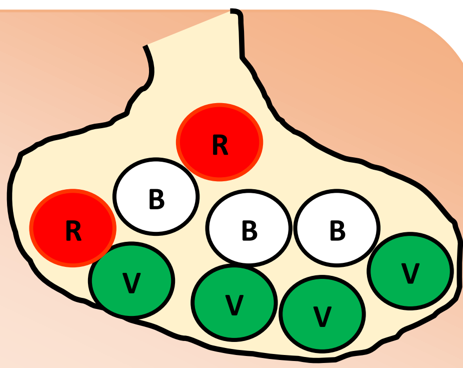
- $\forall k \in \{0;1;2;......;n\}: \quad p(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
- $E(X) = n \times p$.
- $V(X) = n \times p(1-p)$.

L'arbre de probabilité :



Exemple n° 3 :

Un sac contient 4 boules vertes, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement et avec remise au hasard 3 boules du sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.



1 – *Déterminer les valeurs prises par X.*

2 – *Déterminer la loi de probabilité de X.*

3 – *Calculer l'espérance E(X).*

Solution :

Chaque tirage est un arrangement avec répétition de 3 boules parmi 9, donc le nombre de résultats possible est : $Card(\Omega)=9^3$.

① – *La variable aléatoire X est égale au nombre de boules rouges tirées, quand en tire 3 boules du sac successivement et avec remise on peut avoir :*

- ☺ *Aucune boule rouge* $\overline{R}\overline{R}\overline{R}$, *donc* $X=0$.
- ☺ *Une seule boule rouge* $R\overline{R}\overline{R}$, *donc* $X=1$.
- ☺ *Deux boules rouges* $RR\overline{R}$, *donc* $X=2$.
- ☺ *Trois boules rouges* RRR, *donc* $X=3$.

Les valeurs prises par X sont : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$.

1ère Méthode :

② – *Déterminons la loi de probabilité de X :*

- ☺ $p(X=0)=\frac{7^3}{9^3}=\left(\frac{7}{9}\right)^3$.
- ☺ $p(X=1)=\frac{3!}{2!\times 1!}\times\frac{2^1\times 7^2}{9^3}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{9}\right)^2$.
- ☺ $p(X=2)=\frac{3!}{2!\times 1!}\times\frac{2^2\times 7^1}{9^3}=\frac{28}{243}$.
- ☺ $p(X=3)=\frac{2^3}{9^3}=\left(\frac{2}{9}\right)^3$.

On résume la loi de probabilité de X par le tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{343}{729}$	$\frac{294}{729}$	$\frac{84}{729}$	$\frac{8}{729}$

③ – *Calculons l'espérance E(X) :*

$$E(X)=0\times\frac{343}{729}+1\times\frac{294}{729}+2\times\frac{84}{729}+3\times\frac{8}{729}=\frac{486}{729}=\frac{2}{3}\simeq 0,67 \quad\Rightarrow\quad E(X)\simeq 0,67.$$

2ème Méthode :

② – *Déterminons la loi de probabilité de X :*

On considère l'expérience suivante : On tire une boule du sac, soit A l'événement « obtenir une boule rouge ». On répète l'expérience précédente 3 fois de suite en remettant les trois boules tirées dans le sac avant de refaire l'expérience, le résultat de chaque épreuve est soit A ou (et) $\overline{A}$.

Donc la variable aléatoire X égale au nombre de fois que l'événement A se réalise, suite donc la loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = p(A) = \frac{2}{9}$.

Donc :

☺ $p(X=0) = C_3^0 \times p^0 \times (1-p)^3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3$.

☺ $p(X=1) = C_3^1 \times p^1 \times (1-p)^2 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{7}{9}\right)^2$.

☺ $p(X=2) = C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^1 = \frac{28}{243}$.

☺ $p(X=3) = C_3^3 \times p^3 \times (1-p)^0 = \left(\frac{2}{9}\right)^3$.

On résume la loi de probabilité de X par le tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{343}{729}$	$\frac{294}{729}$	$\frac{84}{729}$	$\frac{8}{729}$

③ – Calculons l'espérance E(X) :

$$E(X) = n \times p = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \simeq 0,67 \quad \Rightarrow \quad E(X) \simeq 0,67.$$

La variance de X :

$$V(X) = n \times p \times (1-p) = E(X) \times (1-p) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{14}{27} \simeq 0,52 \quad \Rightarrow \quad V(X) \simeq 0,52.$$