ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Προτεινόμενα Θέματα

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Μάιος 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 8

Α2.

α. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 4

β. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί:

i. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) > 0$ κοντά στο 0 και υπάρχει το όριο της f στο 0, τότε αναγκαστικά θα ισχύει
$\lim_{x\to 0} f(x) > 0$

ii. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \Delta \to \mathbb{R}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $0 \notin \Delta$.

iii. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq 0$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α. Να χαρακτηρίσετε καθέναν από αυτούς, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα Ψ, αν είναι **ψευδής**. *(μονάδα 1 για κάθε απάντηση)*

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (**α.**).

(μονάδες 2 για κάθε απάντηση)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x+1}, x > -1$ και $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Β1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τις εφαπτομένες των C_f, C_g στο κοινό σημείο τους με τετμημένη $x = 1$.

Μονάδες 3

Β3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

Μονάδες 4

Β4. Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων τις C_f, C_g

Μονάδες 6

Β5. Αν α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha\beta\gamma \geq 1$, να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{\beta^2+\beta+1}{\beta+1}\cdot\frac{\gamma^2+\gamma+1}{\gamma+1}\geq\frac{27}{8}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Γ2. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{x}{\ln(x+1)}\,dx<\frac{5}{2}$$

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln(f(x)+1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 4

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x^2+1)-f(x^2+1)=1-e^{x^2}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{x-1}-x^2$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις $x_1\in(0,2)$ και $x_2\in(2,4)$.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δύο ακριβώς θέσεις $\xi_1<\xi_2$ με: $\xi_2(2-\xi_2)<\xi_1(2-\xi_1)$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι:

$$\frac{f(\xi_1+\xi_2)}{x_2-2}\geq x_2(\xi_1+\xi_2-x_2)$$

Μονάδες 6

Δ5. Να δείξετε ότι:

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}\eta\mu\big(f(x)\big)\,dx\right|\leq M(\xi_2-\xi_1)$$

όπου M είναι ο μεγαλύτερος εκ των $|f(\xi_1)|$ και $|f(\xi_2)|$.

Μονάδες 5

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2.

α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143.

β. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 157.

Α3.

i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο 0. Ωστόσο,
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

ii. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, δηλαδή η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

iii. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [-3,3] \to \mathbb{R}$ με

iv. $f(x) = x^2 - 1$. Τότε ισχύει ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και
$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-3}^{3} = (9-3) - (-9+3) = 12 > 0$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Επομένως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$ και $f \downarrow$ στο $(-1,0]$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}} > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g''(x) = -\frac{3}{8x\sqrt{x}} < 0$$

Οπότε, η g είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Β2. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(1, f(1)\big)$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B\big(1, g(1)\big)$ έχει εξίσωση

$$y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

Β3. Η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο A, δηλαδή:

$$f(x) \geq \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

για κάθε $x > -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Η g είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία της C_g στο σημείο B, οπότε:

$$g(x) \leq \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Τελικά, για κάθε $x \geq 0$, έχουμε:

$$f(x) \geq \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \geq g(x)$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x = 1$, δηλαδή

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

Οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο $A\big(1, f(1)\big) = A\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Β4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα έχουμε:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g''(x)$		$-$	
g		$\nearrow$	

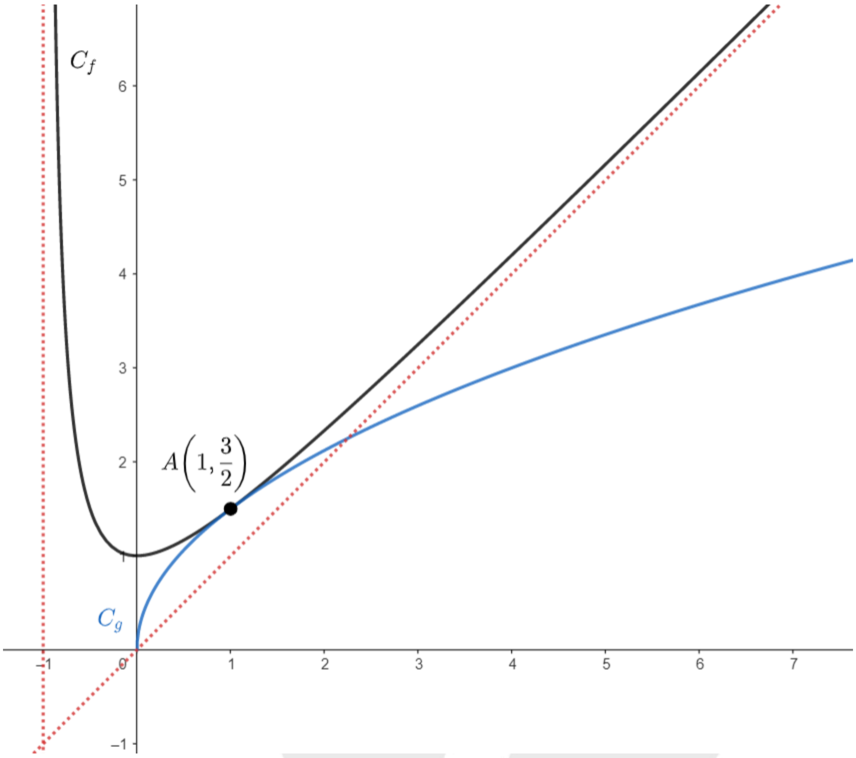
Επίσης:

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

Ελέγχουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ακόμη η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Η C_g δεν έχει ασύμπτωτες.

Οι γραφικές παραστάσεις των C_f και C_g παριστάνονται στο παρακάτω σχήμα:



Β5.

Για κάθε $x > -1$ έχουμε $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Εφαρμόζουμε την ανισότητα αυτή για τους $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

- $\alpha + \frac{1}{\alpha+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\alpha} > 0$
- $\beta + \frac{1}{\beta+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta^2+\beta+1}{\beta+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\beta} > 0$
- $\gamma + \frac{1}{\gamma+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2+\gamma+1}{\gamma+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{\gamma} > 0$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1} \cdot \frac{\beta^2+\beta+1}{\beta+1} \cdot \frac{\gamma^2+\gamma+1}{\gamma+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \sqrt{\alpha\beta\gamma} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \sqrt{1} = \frac{27}{8}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \xLeftrightarrow{(x+1)^2>0} x > 0$
- $f'(x) < 0 \xLeftrightarrow{(x+1)^2>0} -1 < x < 0$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ2. Για κάθε $x>-1$ έχουμε ότι $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
Επομένως για $x\in[1,2]$ έχουμε

$$\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1>0\Leftrightarrow$$
$$\ln(x+1)>1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\ln(x+1)}<\frac{x+1}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\frac{x}{\ln(x+1)}<x+1$$

Άρα

$$\int_1^2\frac{x}{\ln(x+1)}dx<\int_1^2(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Γ3. Θέτουμε τον περιορισμό: $f(x)+1>0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ αφού από το **Γ1** ερώτημα έχουμε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.
Επομένως, περιορισμός είναι $x>-1$.
Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln(f(x)+1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}\Leftrightarrow$$
$$\ln(f(x)+1)=1-\frac{1}{f(x)+1}\Leftrightarrow$$
$$\ln(f(x)+1)+\frac{1}{f(x)+1}-1=0\Leftrightarrow$$
$$f\big(f(x)\big)=0$$

Από το ερώτημα **Γ1** έχουμε ότι $f(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, επομένως:
$f\big(f(x)\big)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=0.$

Γ4. Η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ επομένως μοναδική πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η ευθεία $x=-1$. Υπολογίζουμε το όριο:

$$A=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\ln(x+1)+1-x-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x+1}$$

Όμως, με χρήση και κανόνα Dl'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to-1^+}[-(x+1)]=0$$

Άρα $\lim_{x\to-1^+}((x+1)\ln(x+1)-x)=1$ και $\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ οπότε τελικά
$A=\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$
δηλαδή η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Γ5. Η εξίσωση έχει περιορισμούς: $2x^2+1>-1$ και $x^2+1>-1$ που ισχύουν για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Το $x=0$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης.
Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $2x^2+1>0$ και $x^2+1>0$.
Αν $x\neq 0$, τότε $x^2>0$, άρα

$2x^2+1>x^2+1 \xLeftrightarrow{f\uparrow\sigma\tau o\ (0,+\infty)} f(2x^2+1)>f(x^2+1) \Leftrightarrow f(2x^2+1)-f(x^2+1)>0$

και $x^2>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow 1-e^{x^2}<0$

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Τελικά το $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

- $f(0)=\frac{1}{e}>0$
- $f(2)=e-4<0$
- $f(4)=e^3-16>0$ αφού $e>2.7 \Leftrightarrow e^3>19.683$

Επομένως για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,2]$, $[2,4]$. Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις $x_1\in(0,2)$ και $x_2\in(2,4)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{x-1}-2x, x\in\mathbb{R}$.
Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^{x-1}-2, x\in\mathbb{R}$.
Έχουμε

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-1}-2=0 \Leftrightarrow x-1=\ln 2 \Leftrightarrow x=1+\ln 2$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-1}-2>0 \Leftrightarrow x-1>\ln 2 \Leftrightarrow x>1+\ln 2$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{x-1}-2<0 \Leftrightarrow x-1<\ln 2 \Leftrightarrow x<1+\ln 2$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[1+\ln 2,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,1+\ln 2]$.

x	$-\infty$		$1+\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι: η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1+\ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1+\ln 2,+\infty)$ επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1+\ln 2$ το $f'(1+\ln 2)=e^{1+\ln 2-1}-2(1+\ln 2)=2-2-2\ln 2=-2\ln 2$

x	$-\infty$		$1+\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1+x}-2x)=\lim_{x\to+\infty} e^{1+x}\left(1-\frac{2x}{e^{1+x}}\right)=+\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x+1}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x+1}}=0$$

Ακόμα έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1+x}-2x\right)=+\infty$$

Άρα

- f' συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1+\ln 2]$ επομένως

$$f'\big((-\infty,1+\ln 2]\big)=\left[f'(1+\ln 2), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[-\ln 2\,,+\infty)$$

Έτσι, υπάρχει μοναδική ρίζα $\xi_1 \in (-\infty, 1+\ln 2)$ της $f'(x)=0$

- f' συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1+\ln 2,+\infty)$ επομένως

$$f'\big([1+\ln 2\,,+\infty)\big)=\left[f'(1+\ln 2), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right)=[-\ln 2,+\infty)$$

Έτσι, υπάρχει μοναδική ρίζα $\xi_2 \in (1+\ln 2,+\infty)$ της $f'(x)=0$.

x	$-\infty$		ξ_1		$1+\ln 2$		ξ_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0		$-$		0	$+$	
f		$\nearrow$	T.M.		$\searrow$		T.E.	$\nearrow$	

Η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών ξ_1,ξ_2 επομένως τα ξ_1,ξ_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Επίσης

$f'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow e^{\xi_1-1}=2\xi_1$

$f'(\xi_2)=0 \Leftrightarrow e^{\xi_2-1}=2\xi_2$

και

$f(\xi_1)>f(\xi_2) \Leftrightarrow e^{\xi_1-1}-\xi_1^2>e^{\xi_2-1}-\xi_2^2$

$\Leftrightarrow 2\xi_1-\xi_1^2>2\xi_2-\xi_2^2$

$\Leftrightarrow \xi_1(2-\xi_1)>\xi_2(2-\xi_2)$

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(x_2, f(x_2)\big)$ έχει εξίσωση

$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=\left(e^{x_2-2}-2x_2\right)(x-x_2)$

Όμως: $f(x_2)=0 \Leftrightarrow e^{x_2-1}=x_2^2$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=(x_2^2-2x_2)(x-x_2)$.

Επίσης, η f είναι κυρτή στο $[1+\ln 2\,,+\infty)$και $2<x_2\in[1+\ln 2\,,+\infty)$ άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή

$f(x)\ge(x_2^2-2x_2)(x-x_2), x\ge 1+\ln 2$

Έχουμε: $2\xi_1-\xi_1^2>2\xi_2-\xi_2^2 \Leftrightarrow (\xi_2-\xi_1)(\xi_2+\xi_1)+2(\xi_1-\xi_2)>0$

$\Leftrightarrow (\xi_2-\xi_1)(\xi_1+\xi_2-2)>0 \overset{\xi_2>\xi_1}{\Longleftrightarrow} \boxed{\xi_1+\xi_2>2}>1+\ln 2$

Άρα

$$f(\xi_1+\xi_2) > x_2(x_2-2)(\xi_1+\xi_2-x_2) \overset{x_2>2}{\Longleftrightarrow} \frac{f(\xi_1+\xi_2)}{x_2-2} \geq x_2(\xi_1+\xi_2-x_2)$$

Δ5. Έχουμε

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta\mu\big(f(x)\big)\,dx\right| \leq \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left|\eta\mu\big(f(x)\big)\right| dx \leq \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)| dx \leq \int_{\xi_1}^{\xi_2} M\,dx = M\cdot(\xi_2-\xi_1)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι: για κάθε $x \in [\xi_1, \xi_2]$ έχουμε

$$\xi_1 \leq x \leq \xi_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\xi_1) \geq f(x) \geq f(\xi_2)$$

$$\Rightarrow M \geq f(\xi_1) \geq f(x) \geq f(\xi_2) \geq -M \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

Ευχόμαστε καλή δύναμη & επιτυχία!