Skriftlig eksamen
Matematik B STX

Torsdag den 28. maj 2015

Løsningsforslag

1. **Delprøve**

Opgave 1

$$(a-b)^2-b^2$$
$$=a^2+b^2-2ab-b^2$$
$$=a^2-2ab$$

Her blev anden kvadratsætning anvendt.

∘

Opgave 2

Givet forskriften

$$N(t)=200\cdot 1.04^t$$

Som er en eksponentiel funktion. Tallet $b=200$ er begyndelsesværdien, og forklarer, at i år 2002 var antallet af dyr i en population 200. Tallet $a=1.04$ er fremskrivningsfaktoren. Denne omregnes inden konklusionen.

$$a=1+r$$

Her er $a=1.04$ så

$$1.04=1+r\Leftrightarrow r=0.04=4\%$$

Dvs. for hvert år der går - efter år 2002 - steg antallet af dyr i populationen med 4% årligt.

∘

Opgave 3

Der er givet to støttepunkter

$$P(2;3), \qquad Q(5;12)$$

Forskriften for en lineær funktion er

$$y = ax + b$$

Metode 1:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 3}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3, \qquad b = y_1 - ax_1 = 3 - 3 \cdot 2 = -3$$

Forskriften er så

$$y = 3x - 3$$

Metode 2: Linjens ligning

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$

Dvs.

$$12 = 3 + a(5 - 2) \Leftrightarrow 12 = 3 + 3a \Leftrightarrow 9 = 3a \Leftrightarrow 3 = a$$

Og så kan man nemt finde b efterfølgende.

Opgave 4

Givet funktionen

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

Det oplyses, at det er en parabel. Vi bestemmer toppunktet.

Metode 1: Toppunktsformlerne. Diskriminanten bestemmes først.

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 36 - 12 = 24$$

Dernæst anvendes toppunktsformlerne

$$T_x; T_y = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{-6}{2 \cdot 3}; -\frac{24}{4 \cdot 3}\right) = \left(\frac{6}{6}; -\frac{24}{12}\right) = (1; -2)$$

Koordinatsættet til toppunktet er $T(1; -2)$

Metode 2: Differentialregning. Vi bestemmer $f'(x)$

$$f'(x) = 6x - 6$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$ dvs. $6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$. Vi indsætter denne løsning i $f(x)$ og får

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -3 + 1 = -2$$

Så toppunktet er $T(1; -2)$.

∘

Strengt taget bestemte vi faktisk funktionens minima i denne opgave, da parablen ligger til højre for y-aksen, og grafen er konveks. Dette kan argumenteres yderligere ved anvendelse af monotoniforhold.

Opgave 5

Omkredsen af trekanten ABC er $7 + 5 + 10 = 22$. Forholdet mellem trekanten ABC og DEF er

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Altså er omkredsen af trekanten DEF

$$O_{DEF} = \frac{3}{2} \cdot 22 = \frac{66}{2} = 33$$

Man kunne også bestemme det hele for de enkelte sider. Dette kan man som læser selv prøve.

∘

Opgave 6

Betragt integralet

$$\int (3x^2 + 4x + 2)\,dx = 3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 4 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 2x + k = x^3 + 2x^2 + 2x + k$$

Her blev formlen:

$$\int (x^n)dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$$

Anvendt, hvor $k \in \mathbb{R}$.

∘

2. Delprøve

Opgave 7

a) Givet en boks med oplysninger. Vi laver eksponentiel regression vha. WordMat.[1]

16	19	23	25	28	31	35
76	87	107	119	139	160	202

Eksponentiel regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0{,}9991349$

$$f(x) = 33.01183 \cdot 1.052688^x$$

Altså er konstanterne givet ved

$$a = 1.052$$
$$b = 33.011$$

b) Vi indsætter $x = 30$ og får

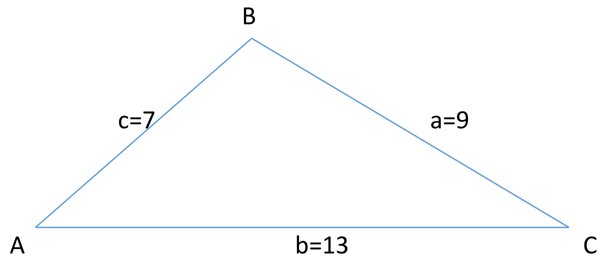
$$f(30) = 33.01183 \cdot 1.052688^{30} = 154.0493$$

Løberen kan forvente en løbetid på 154 minutter til halvmaratonen.

o

Opgave 8

a) Skitsen af trekanten tegnes vha. WordMat. [2]



Vi bestemmer vinkel A vha. cosinusrelationerne.

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{13^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 13 \cdot 7}\right) \approx 41.171^o$$

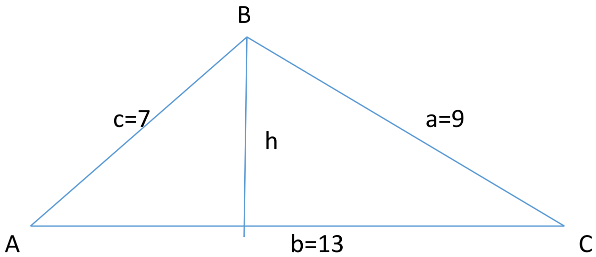
[1] Marker felterne med oplysningerne. Gå i "WordMat" -> "Regression" -> "Eksponentiel Regression".

[2] Gå op i "WordMat" og find "Trekant". Indsæt oplysningerne. NB: Den kan regne det hele for dig, men det er sundt at prøve at beregne trekanten selv. Dog er det tilladt at bruge til eksamen. En anden god side er http://cossincalc.com som man (måske) må bruge til eksamen. Så kan man også kontrollere. Den giver flere oplysninger.

b) Vi bestemmer arealet af trekanten vha. "½-appelsinformlen", som i dette tilfælde vil være mht. vinkel A.

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 7 \cdot \sin(41.171) = 29.953$$

Højden fra B skal bestemmes. Se evt. figuren:



Vi ved, at højden og grundlinjen danner en vinkel på 90^o og da vi kender vinkel A samt lille c, så kan vi bestemme h. Det kan gøres ved formlen (som findes i div. formelsamlinger)

$$h = c \cdot \sin(A) = 7 \cdot \sin(41.171) = 4.608$$

Som er den ønskede højde h.

∘

Opgave 9

Givet forskriften for den overdimensioneret klo K som funktion af vægten M af en krabbe er givet ved

$$K = 0.036 \cdot M^{1.356}$$

a) Krabben vejer $400mg$, som indsættes i M, så fås K, dvs.

$$K = 0.036 \cdot 400^{1.356} = 121.5335$$

Dvs. kloen vejer $121.53mg$.

Kloens vægt er $53mg$, krabben vejer

$$53 = 0.036 \cdot M^{1.356} \Leftrightarrow \frac{53}{0.036} = M^{1.356}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[1.356]{\frac{53}{0.036}} = \sqrt[1.356]{M^{1.356}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt[1.356]{\frac{53}{0.036}} \approx 216.902$$

Dvs. krabben vejer $216.9mg$ når dens overdimensioneret klo vejer $53mg$.

b) Vægten blev betegnet med M, svarende til r_M i den kommende formel. Kloens vægt blev betegnet med K, svarende til r_K i den kommende formel.

$$r_K = ((1 + r_M)^a - 1) \cdot 100\%$$

Oplysningerne indsættes, her er $a = 1.356, r_M = 30\% = 0.3$.

$$r_K = ((1 + 0.30)^{1.356} - 1) \cdot 100\% = 42.727\%$$

Dvs. når krabbens vægt øges med 30% så øges kloens vægt med 42.727%.

°

Opgave 10

a) Ligningen for tangenten bestemmes vha. punktet der er givet. Funktionen er:

$$f(x) = 3\ln(x+1) - x^2, \qquad x > -1$$

Tangentens ligning er

$$t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Vi bestemmer $f'(x)$.[3]

$$f'(x) = 3 \cdot a'\big(b(x)\big) \cdot b'(x) - 2x$$

Lad $b(x) = x + 1$ og $a(x) = \ln(x)$, da er $a'(x) = 1/x$ og $b'(x) = 1$, så

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} \cdot 1\right) - 2x = \frac{3}{x+1} - 2x, \qquad x > -1$$

Vi indsætter $x = 0$ i $f'(x)$ og $f(x)$ og får

$$f(0) = 3\ln(0+1) - 0^2 = 3 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$f'(0) = \frac{3}{0+1} - 2 \cdot 0 = \frac{3}{1} = 3$$

Så er tangentligningen

$$\begin{aligned} t &= 3 \cdot (x - 0) + 0 \\ &= 3x \end{aligned}$$

[3] A niveau elever kan sagtens differentiere denne i hånden, da det er sammensatte funktioner. B niveau elever bruger bare CAS og springer mellemregningerne over indtil bestemmelse af punkterne.

b) Monotoniforholdene bestemmes for funktionen. Da funktionen blev differentieret tidligere, så løser vi ligningen $f'(x) = 0$.

$$\frac{3}{x+1} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} = 2x \Leftrightarrow 3 = (x+1) \cdot 2x$$
$$\Leftrightarrow 3 = 2x^2 + 2x \Leftrightarrow 0 = 2x^2 + 2x - 3$$

Lad $a = 2$, $b = 2$ og $c = -3$ så er

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 28, \qquad d > 0$$

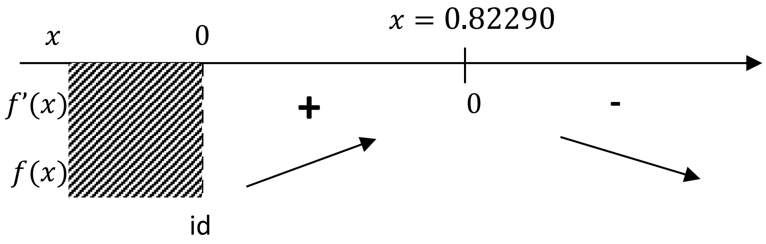
Og vi bestemmer x.[4]

$$x = \frac{-2 + \sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + \sqrt{28}}{4} \approx 0.82290$$

Vi tager tallene 0 og 1 og laver en test, eftersom $x = 0.82290$ og dermed ligger i mellem. Vi undersøger fortegnene for de valgte tal.

$$f'(0) = \frac{3}{0+1} - 2 \cdot 0 = \frac{3}{1} = 3$$
$$f'(1) = \frac{3}{1+1} - 2 \cdot 1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

Så vi kan nu lave et monotoniskema.[5]



Vi kan slutte, at funktionen er:

- Voksende i intervallet $]-1; 0.82290]$
- Aftagende i intervallet $[0.82290; \infty[$.

NB: Man kan også bruge anden afledede test i denne opgave.

[4] Normalt bruger man $\pm$ i formlen, men da $x > -1$ så tages den positive. Når du løser opgaven, så overbevis dig om, at det er rigtigt!

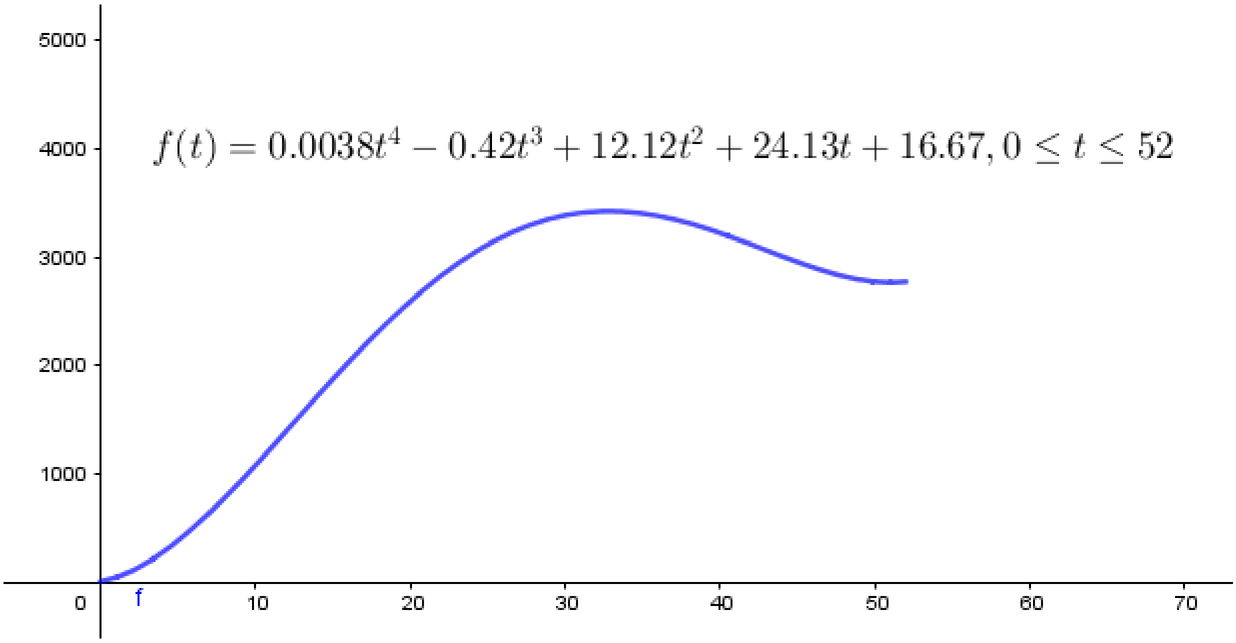
[5] Gå i ”WordMat” -> ”Figurer” og scroll ned og find den rigtige figur.

Opgave 11

Givet den enorme lange funktion

$$f(t) = 0.0038t^4 - 0.42t^3 + 12.12t^2 + 24.13t + 16.67, \qquad 0 \leq t \leq 52$$

a) I GeoGebra tegnes funktionen.



b) Den alder, hvorpå hunkalkunen har sin maksimale vægt kan findes ved at se på grafen eller benytte sig af differentialregning.

Grafisk aflæsning: Den har sin maksimale vægt, når den er 33 uger gammel cirka.
Algebraisk aflæsning: Løs $f'(t) = 0$ dvs.

$$0.0152t^3 - 1.26t^2 + 24.24t + 24.13 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$t = -0.9481936 \quad \vee \quad t = 32.80154 \quad \vee \quad t = 51.04139$$

Den ene løsning ligger udenfor definitionsmængden. Den midterste løsning svarer til den løsning vi antog ved grafisk aflæsning, dvs. maksimum. Den sidste løsning giver et minimum, som også kan ses på grafen. [6]

[6] Det er vigtigt at begrunde for, at det er den korrekte talværdi der giver maksima. Man kan bruge anden afledede test eller gøre som i opgave 10.

c) Vi kender $f'(t) = 0.0152t^3 - 1.26t^2 + 24.24t + 24.13,\ 0 \leq t \leq 52$, så

$$f'(10) = 0.0152 \cdot 10^3 - 1.26 \cdot 10^2 + 24.24 \cdot 10 + 24.13 = 155.73$$

Dvs. efter tiende uge vokser hunkalkunens vægt hver uge med 155.73gram.

∘

Opgave 12

a) Da grafen for $g(x)$ ligger OVER $f(x)$, så er det

$$M = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

Vi bestemmer a og b, som svarer til to $x$værdier der fås i en ligning som $f(x) = g(x)$, dvs.

$$x^2 - 6x + 10 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-1) = 0$$

Så løsningerne er $x = 1 \vee x = 7$ som bruges til hhv. a og b.

$$M = \int_1^7 \big((2x+3) - (x^2 - 6x + 10)\big)\,dx = \left[(x^2 + 3x) - \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x\right)\right]_1^7$$

$$= (7^2 + 3 \cdot 7) - \left(\frac{1}{3} \cdot 7^3 - 3 \cdot 7^2 + 10 \cdot 7\right) - \left((1^2 + 3 \cdot 1) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1\right)\right)$$

$$= 70 - \left(\frac{112}{3}\right) - \left(4 - \left(\frac{22}{3}\right)\right) = 36$$

Dermed fandt vi arealet.

∘

Opgave 13

a) Nulhypotesen er, at *antallet af kerner følger den biologiske model*. Vi bestemmer de forventede værdier. Af stikprøven har man totalt $648 + 237 + 195 + 63 = 1143$. De forventede værdier følger altså

$$F_{violet\ og\ glat} = \frac{9}{16} \cdot 1143 = 642.938$$

$$F_{violet\ og\ rynket} = \frac{3}{16} \cdot 1143 = 214.313$$

$$F_{gul\ og\ glat} = \frac{3}{16} \cdot 1143 = 214.313$$

$$F_{gul\ og\ rynket} = \frac{1}{16} \cdot 1143 = 71.438$$

b) Vi laver en GOF test. Formlen for teststørrelsen er:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i}$$

Vi har så teststørrelsen:

$$\chi^2 = \frac{(648 - 642.938)^2}{642.938} + \frac{(237 - 214.313)^2}{214.313} + \frac{(195 - 214.313)^2}{214.313} + \frac{(63 - 71.438)^2}{71.438}$$
$$= 5.178$$

Antal frihedsgrader er 3, og formlen for det er (antal søjler-1)*(antal rækker-1)

Man kan altså nemt bestemme om testen accepteres eller forkastes vha. en χ^2-tabel eller anvendelse af CAS. Vi anvender dog en tabel:

Degrees of Freedom	Probability										
	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
	Nonsignificant								Significant		

[7]

Da teststørrelsen er mindre end den kritiske værdi, så accepteres nulhypotesen. Antallet af kerner følger altså den biologiske model ifølge testen.

[7] https://williambiolabreports.files.wordpress.com/2015/02/img_0766.png tabellen til opgave 13.

Bemærk, at ovenstående løsninger har mange mellemregninger, det skyldes til dels, at det er rart at vide, hvordan man kan udregne sådan nogle opgaver, men også så skribenten får vedligehold sine teknikker… Til eksamen er det en meget god idé at benytte sig af lommeregnere, grafregnere og andre CAS værktøjer.

Man kunne også undre sig over, hvorfor der henvises til HF lærebøger, men da skribenten ikke har STX bøgerne for matematik C og B, så må man nøjes med det man har.