G11-Paros-EA-200404.tex, 20.04.11.,14:50'

11. Páros gráfok

Dr. Szalkai István

2020.04.11.

Páros gráfok

Definíció: $G = (V, E)$ **kétpólusú** (kétrészes, bipartite) *vagy* **páros** (páros körüljárású)**,**
ha $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$
és élek csak különböző részhalmazok között húzódnak :

$$E \subset \{\{a, b\} : a \in A,\ b \in B\}\ . \qquad \square$$

Tétel (Kőnig Dénes)**:** $G = (V, E)$ *gráf kétpólusú* $<=>$ G *minden köre páros hosszúságú.*

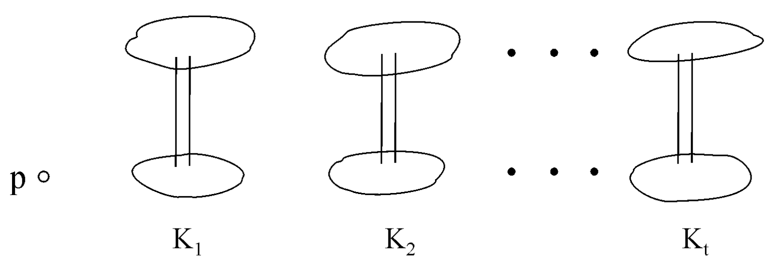
Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Nyilvánvaló.

$\boxed{\Leftarrow}$ $|V|$ -re teljes indukcióval. $|V| = 1, 2$ esetek OK .

Indukciós lépés: töröljük G egy tetszőleges $p \in V$ csúcsát,

marad $G' := (V', E')$, ami nem feltétlenül összefüggő,

de az indukciós feltétel szerint $K_1, ..., K_t$ komponensei mind kétpólusú gráfok:

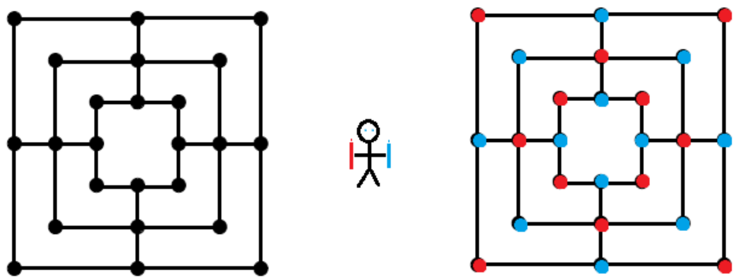


Lemma: *p mindegyik* K_i *-ben legfeljebb csak egyik pólusban levő csúcs(okk)al lehet összekötve***.**

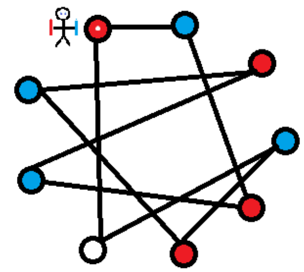
Mindegyik K_i komponenst "elforgatjuk" és p -t helyére tesszük. $\square$

Algoritmus

Ellenőriz és megadja a két komponenset is, és ...



VIGYÁZAT:



Két komponens = két szín **ÉS** $<=>$ $\chi\,(G) = 2$ -re VAN *gyors* algoritmus. $\square$

Fontos még:

Tétel: *A* C_3 *-at nem tartalmazó,* n *csúcsú gráfok között* legtöbb éle $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ *-nak van.* $\square$

(Lásd következő fejezet.)

Párosítások

Definíció: Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban

i) $F \subseteq E$ **független-, diszjunkt élrendszer** *vagy* **párosítás** (matching),

ha $e_i \cap e_j = \emptyset \quad \forall e_i, e_j \in F \quad (i \neq j)$.

ii) $F \subseteq E$ **lefedő élrendszer** *ha* $\cup F = V$.

iii) **teljes párosítás** (perfect matching), **1-faktor** = *független lefogó élrendszer.* □

Definíció/Jelölés: *Tetszőleges* $X \subseteq V$ *esetén* $\mathbf{N}(\mathbf{X}) := X$ **szomszédai***nak halmaza* (neighbours of X):

$$N(X) := \{y \in V \mid \exists x \in X \ \{x, y\} \in E\} \ . \qquad \square$$

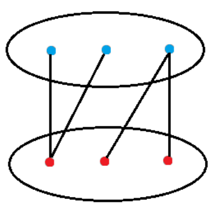
Tétel (Philip Hall): *Tetszőleges* $V = V_1 \cup V_2$ *kétpólusú gráf,* $|V_1| = m$ *esetén*

létezik m méretű *független élrendszer* <=>

$$|N(X)| \geq |X| \qquad \forall X \subseteq V_1 \ . \tag{1}$$

= **Hall -feltétel.**

Ha $|V_1| = |V_2| = m$ *akkor* a tétel *1-faktor* -ról szól. □



Bizonyítás: $\boxed{=>}$ Nyilvánvaló.

$\boxed{<=}$ m -re teljes indukcióval

(**a)** $\forall X \subsetneqq V_1 \ \ |N(X)| > |X|$, **b)** Ha van olyan $\exists X_0 \subsetneqq V_1 \ \ |N(X_0)| = |X_0|$ ...) □

Definíció: Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban

i) $Y \subseteqq V$ **lefogó pont- / csúcsrendszer**, *ha G minden élét Y metszi* ("rajzszögek").

ii) $\mathbf{m}(G) := \tau(G) =$ *minimális lefogó pontrendszer elemszáma,*

$\mathbf{M}(G) := \nu(G) =$ *maximális független élrendszer elemszáma.* □

Állítás: Tetszőleges G gráfban $m(G) \geq M(G)$. □

Tétel (Kőnig Dénes, 1884-1944)**:** *Páros gráf esetén* $m(G) = M(G)$. □

Megjegyzések: o) (1) Hall-feltétel esetén 1-faktor.

i) Nem páros gráf esetén általában nem igaz, pl. K_{2n+1} , C_{2n+1} .

ii) "*minimax*" tétel, pl. játékelmélet, hálózati folyamok.

iii) Bizonyítása => egyszerű és gyors *algoritmus*t + Egerváry Jenő, Harold Knuth

=> **Hungarian method !!!**

Kőnig Tétel Bizonyítása = Algoritmus (alternáló/javító utak módszere)**:**

ÖTLET:

Alternáló út = "kövér" és "sovány" élek váltogatják egymást,

egy él kövér/sovány jelzője változhat, **kövér** élek függetlenek,

Ha egy alternáló út mindkét végén sovány él, akkor

a kövér<->sovány csere után növekszik a kövér élek száma.

Ha a kövér élek az alternáló út végpontjaihoz nem illeszkednek,

akkor a csere utáni kövér élek is függetlenek lesznek.

CIKLUS:

Van egy alternáló út, néhány kövér éllel, a többi él legyen sovány,

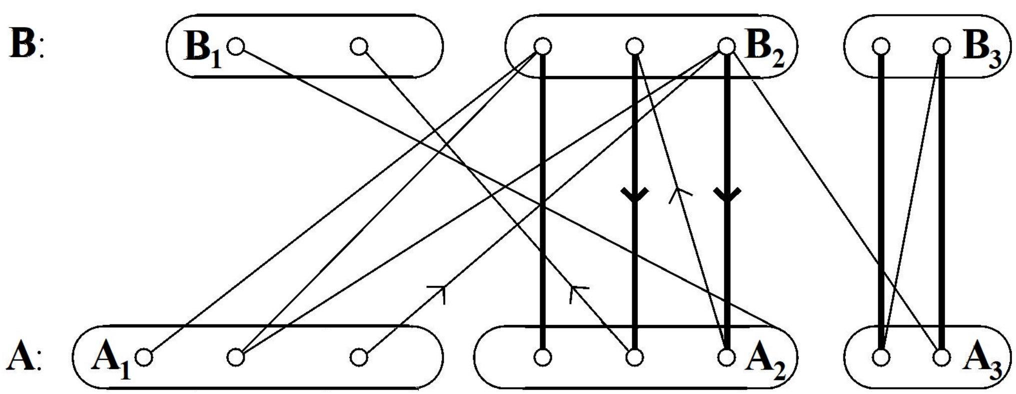
$A_1 \subset A$ és $B_1 \subset B$ -hez nem illeszkednek kövér élek,

$A_2 \subseteq A$ és $B_2 \subseteq B$ alternáló úttal elérhetők A_1-ből,

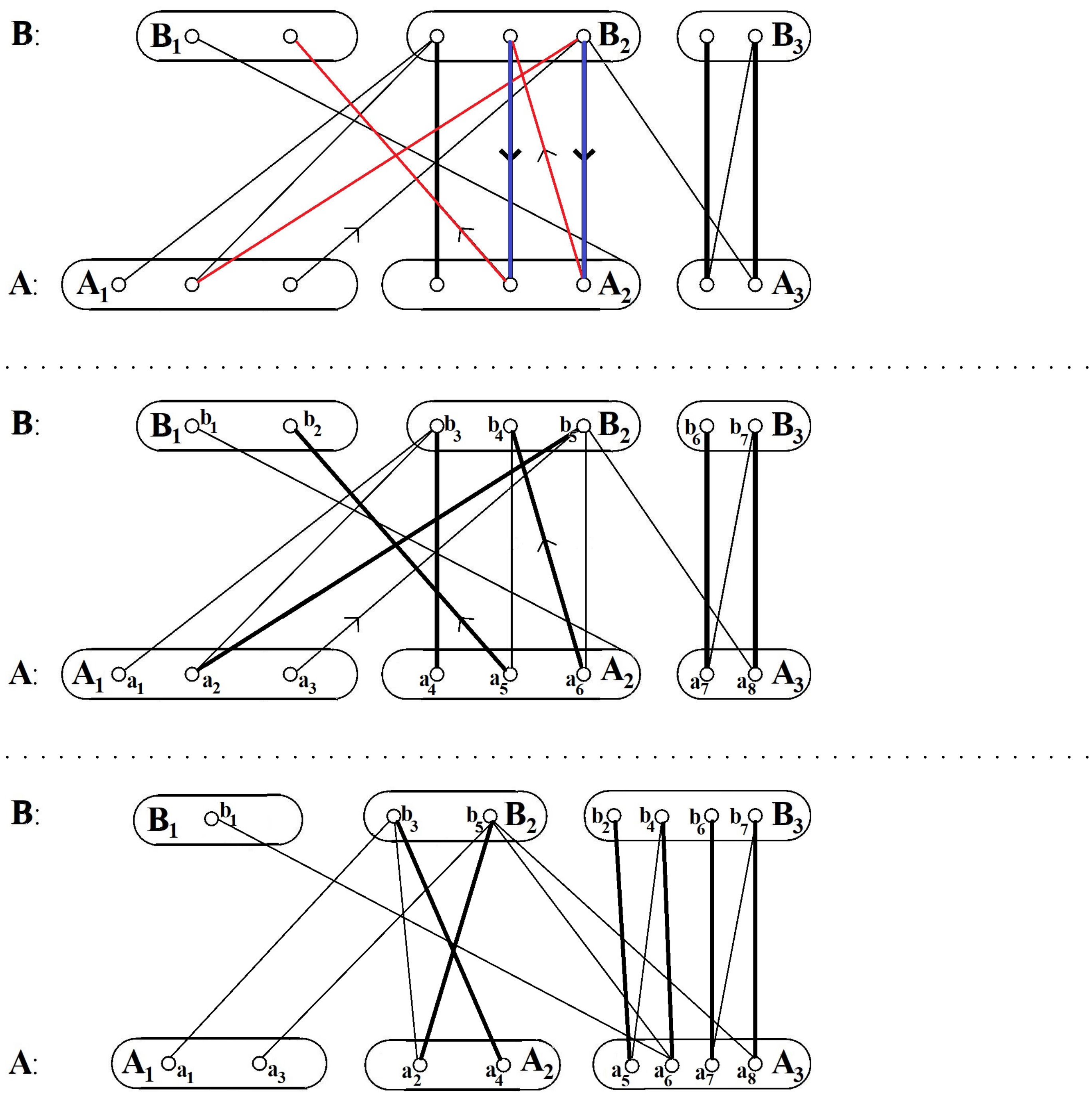
$A_3 \subseteq A$ és $B_3 \subseteq B$ alternáló úttal nem érhetők el A_1-ből,

Nyilván sem $A_1 - B_3$ sem $A_2 - B_3$ -beli él nincs,

Ha van $A_2 - B_1$ -él, akkor van alternáló (javító)) $A_1 - B_1$ -út is => CIKLUS,



ha nincs $A_2 - B_1$ -él akkor $B_2 \cup A_3$ *min* lefogó ponthalmaz, $|B_2 \cup A_3|$ = kövér élek *max* száma, STOP. $\square$


B:
A:
B_1 B_2 B_3
A_1 A_2 A_3
B:
A:
B_1 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 B_2 b_6 b_7 B_3
A_1 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 A_2 a_7 a_8 A_3
B:
A:
B_1 b_1 b_3 b_5 B_2 b_2 b_4 b_6 b_7 B_3
A_1 a_1 a_3 a_2 a_4 A_2 a_5 a_6 a_7 a_8 A_3

Megjegyzések: i) Kőnig Dénes és Philip Hall Tételei ekvivalensek,

ii) A fenti algoritmus $\mathcal{O}(n \cdot e)$ lépésszámú (az adatok ügyes tárolásával),

iii) Maximális folyamkereső algoritmusok (Tankönyv 14. Fejezet) segítségével is kereshető max párosítás.

Következmények

Tétel: Tetszőleges reguláris *gráfban mindig van 1-faktor.*

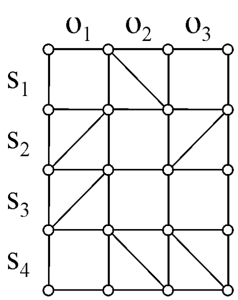
Bizonyítás: Teljesül a (1) Hall feltétel. □

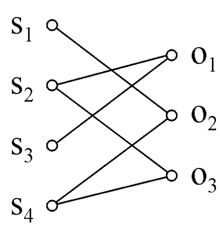
Következmény: *Tetszőleges* reguláris *gráf mindig felbomlik éldiszjunkt 1-faktorok úniójára.* □

. . .

Egy statikai alkalmazás

Merev rudakból és csuklós összekötésekből tartószerkezet:





Páros gráf: *sorok* és *oszlopok,* összekötve ha a megfelelő négyzet ki van merevítve.

Tétel: *A tartószerkezet merev* <=> *a (páros) gráf* összefüggő. □