Sh*maa03 1508 Matematik B->A, STX
Anders Jørgensen, delprøve 1 - Uden hjælpemidler
Følgende opgaver er regnet i hånden, hvorefter de er skrevet ind på PC.

Opgave 1 - *Lineær Funktioner*

Vi ved, at år 2001 er vores begyndelses år, dvs. vores model passer fra år 2001 og efter. Vi får angivet tallene a og b for a er -8 og b er 190. Tallene beskriver antallet af pengeinstitutter der lukker i et bestemt land. Vi har:

$f(x) =-8\,x + 190$

$$f(x) = -8\,x + 190 \tag{1.1}$$

Fordi tallet a fortæller, at for hvert år der går, lukkes 8 pengeinstitutter i landet, hvor tallet b fortæller, at i år 2001 var antallet af pengeinstitutter på 190.

Opgave 2 - *Funktioner*

Grafen A tilhører potensfunktioner, idet A er en voksende funktion, hvor a ligger mellem 0 og 1. Der ses også, at potensfunktionen aldrig kommer over på anden kvadrant, derfor er det en potensfunktion.

Grafen B tilhører eksponentialfunktioner, idet eksponentialfunktioner har en b værdi på 1, og da den er aftagende, må a ligge mellem 0 og 1. Eksponentialfunktioner må - i modsætning til potensfunktioner - godt ramme y-aksen.

Grafen C tilhører lineære funktioner, idet der er tale om en ret linje, og på grafen ses det, at funktionen er aftagende.

Opgave 3 - *Tredjegradsligning*

$x = 3$

$$x = 3 \tag{3.1}$$

Vi undersøger om det er løsningen til ligningen.
$x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15 = 0$

$$x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15 = 0 \tag{3.2}$$

Vi indsætter 3.

$3^3 - 9\cdot 3^2 + 23\cdot 3 - 15 = 0 :$
$27 - 81 + 69 - 15 = 0 :$
$27 + 69 - 81 - 15 = 0 :$
$96 - 96 = 0 :$
$0 = 0 :$

Dvs. $x = 3$ er løsningen til ligningen.

Opgave 4 - *Differentialregning*

Vi skal benytte tangentligningen $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ Først finder vi vores $f(0)$ og efterfølgende $f'(0)$.

$f(x) = 5 \cdot e^x + 4$

$$f(x) = 5\, e^x + 4 \tag{4.1}$$

Differentieres.

$f'(x) = 5 \cdot e^x + 0$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 5\, e^x \tag{4.2}$$

Der indsættes for punktet
$P(0, f(0))$

$$P(0, f(0)) \tag{4.3}$$

$f(0) = 5 \cdot e^0 + 4 = 5 \cdot 1 + 4 = 9 :$

$f'(0) = 5 \cdot e^0 = 5 \cdot 1 = 5 :$

Disse indsættes i tangentligningen.

$y = 5 \cdot (x - 0) + 9 :$

$y = 5\, x + 9$

$$y = 5\, x + 9 \tag{4.4}$$

Som er tangentlinjen til f.

Opgave 5 - *Integralregning*

For at finde ud af, hvilken funktion der er stamfunktion til f, kan vi prøve at integrere f. Vi gør sådan:

$\int \frac{5}{x} + 2\, x \, dx :$

Vi benytter vores regneregler. Da $\frac{1}{x}$ er $\ln|x|$ ved vi, at $\frac{5}{x}$ er $5 \cdot \ln|x|$. Vi ved dog at $x > 0$ så numerisk tegn er unødvendig.

$F(x) = 5 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \left(\frac{1}{1+1}\right) x^{1+1} + k = 5 \cdot \ln(x) + \frac{2}{2} x^2 + k = 5 \cdot \ln(x) + x^2 + k.$

Dvs. at $h(x)$ er den integrerede af $f(x)$ uden konstanten k. Differentieres $h(x)$ fås $f(x)$.

Opgave 6 - *Differentialregning*

Først findes monotoniforholdene for g, og da man ser, at den lineære funktion g' rammer førsteaksen i punktet $P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, og selve g's retning og hældning, kan man argumentere for, at:

g er aftagende i intervallet $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ og g er voksende i intervallet $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$

Fordi når g' er under førsteaksen, er den oprindelige funktion g aftagende, hvorimod hvis g' er over førsteaksen, så er den oprindelig funktion g voksende.

Vi vil finde koordinatsættet for R, ved først at lave en lineær funktion af g', og dette kan laves på to måder, idet to punkter kendes, nemlig P og Q. Vi beregner værdien a.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-0.5)} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Derved kan værdien b beregnes.

$$b = y_1 - a x_1 = 0 - 2 \cdot (-0.5) = 1$$

Vi har derfor en ret linje kaldet
$g'(x) = 2x + 1$

$$\frac{d}{dx} g(x) = 2x + 1 \tag{6.1}$$

Vi skal nu undersøge, om hvornår f og g har den samme tangenthældning. Vi sætter derfor
$f'(x) = g'(x)$

$$5 = 2x + 1 \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2$$

Så koordinatsættet til R, hvor f og g vil have samme tangenthældning vil være $(2, 5)$.

Sh*maa03 1508 Matematik B->A, STX
Anders Jørgensen, delprøve 2 - Med hjælpemidler

Opgave 7 - *Analytisk Plangeometri*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi starter ud med at undersøge afstanden fra punktet P(5,4) til linjen som er givet her:
$l := x - y + 2 = 0$

$$x - y + 2 = 0 \tag{7.1.1}$$

Vi benytter dist formlen: $dist(P, l) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c = 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Vi indsætter vores linje og punkt i formlen.

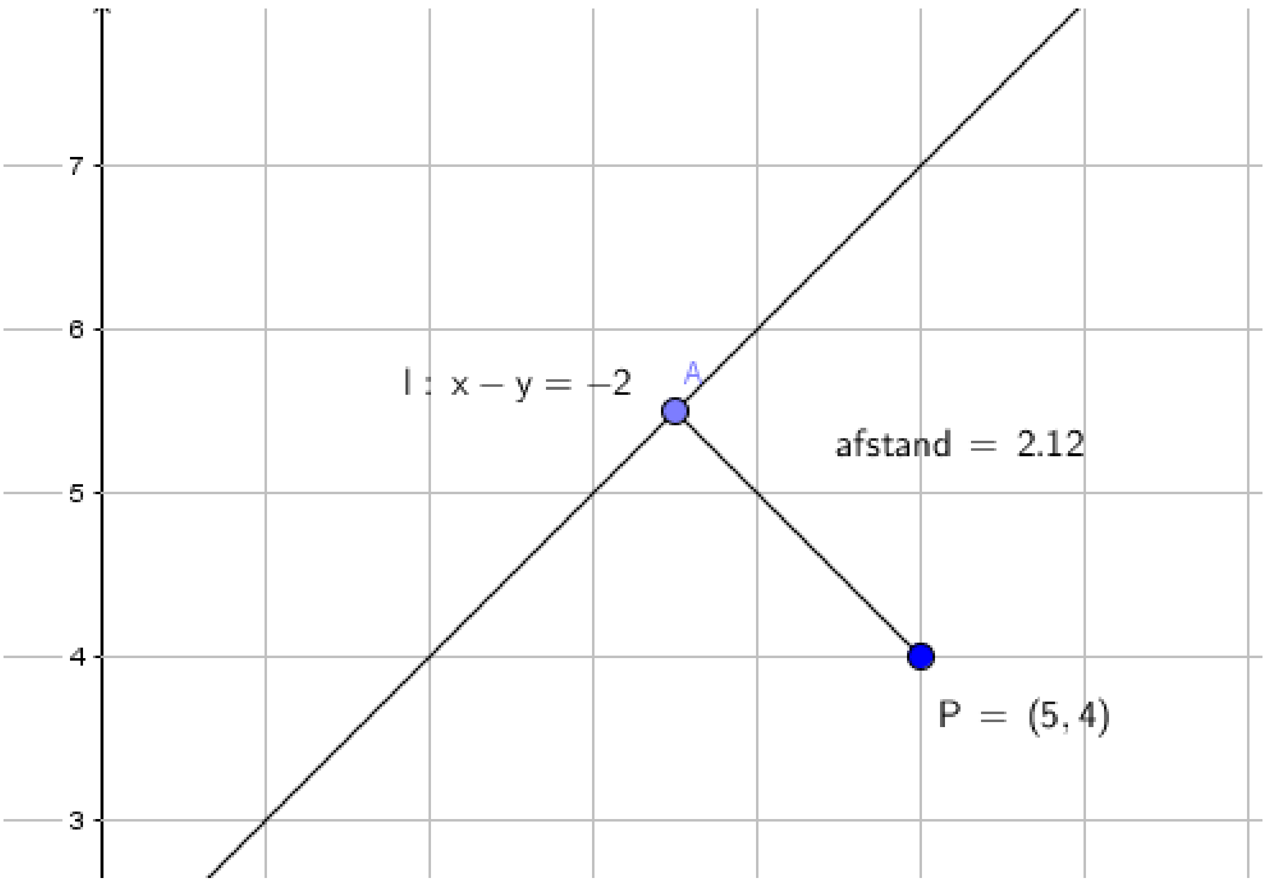
$$dist(P, l) = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$dist(P, l) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \tag{7.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$dist(P, l) = 2.1213 \tag{7.1.3}$$

Så 2.1213 må være afstanden fra P til *l*. Vi kan illustrere det i CAS programmet GeoGebra.



Dvs. at vores udregninger er korrekte.

Delopgave b)

Vi undersøger skæringspunkterne for begge linjer *l* og *m*. Vi indsætter derfor parameterfremstillingen *m* i linjen *l*.

$$\langle x, y\rangle = \langle 1, 1\rangle + t \cdot \langle 3, 1\rangle$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t \\ 1+t \end{bmatrix} \quad (7.2.1)$$

Vi indsætter i linjen l

$(1+3t) - (1+t) + 2 = 0$

$$2 + 2t = 0 \quad (7.2.2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = -1]] \quad (7.2.3)$$

Vi har at $t=-1$ som sættes ind i parameterfremstillingen m, hvor vi så vil få punktet, hvor l og m skærer hinanden.

$\langle x, y\rangle = \langle 1, 1\rangle + (-1)\cdot\langle 3, 1\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.4)$$

Så vi har koordinaterne. $(-2, 0)$

Opgave 8 - *Eksponentielle Funktioner*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi udfører regression i denne opgave, hvor vi vil få bestemt tallene a og b. Vi definerer først x og y.

$x := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5] \quad (8.1.1)$$

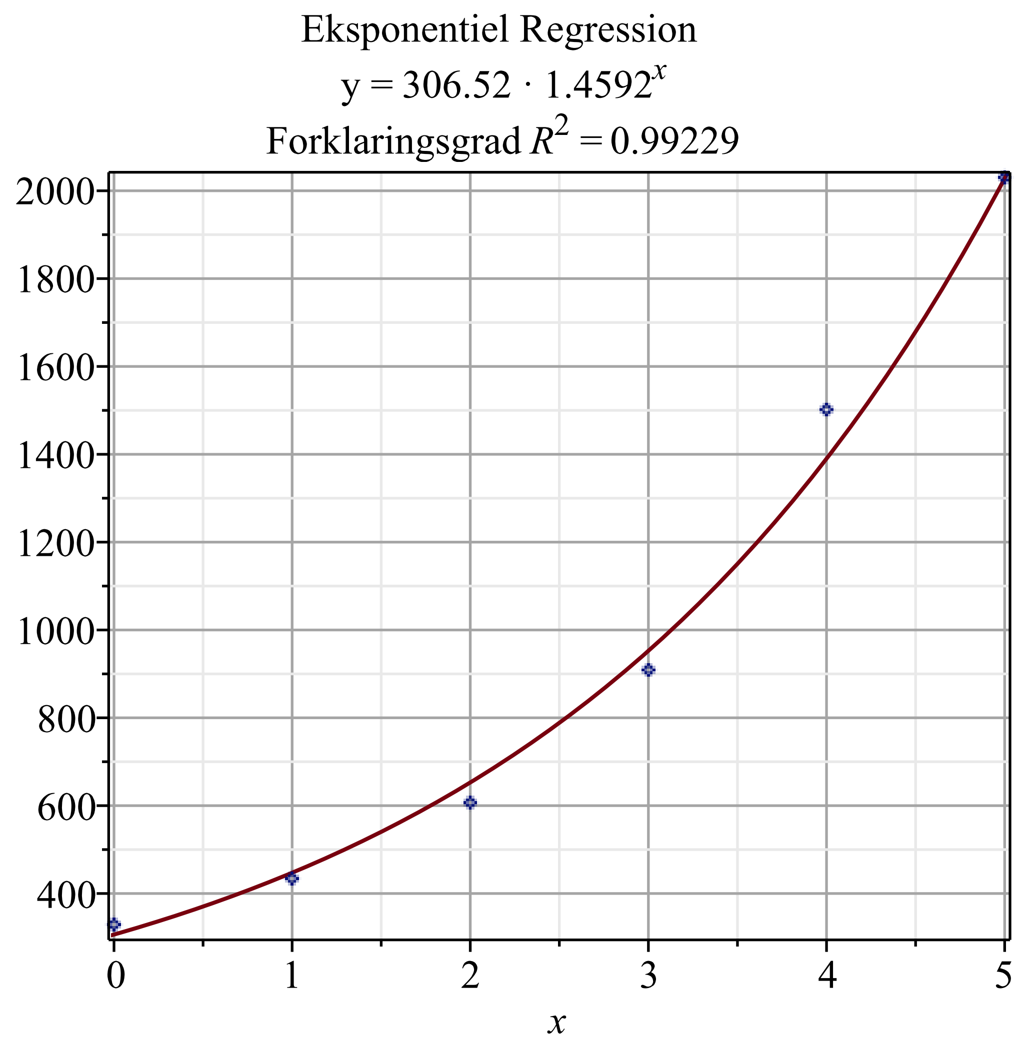
Fordi 2006 er vores begyndelses år.

$y := [329, 434, 607, 909, 1502, 2030]$

$$[329, 434, 607, 909, 1502, 2030] \quad (8.1.2)$$

Vi laver regression for en eksponentiel funktion.

ExpReg(x, y)



Dvs. vi får bestemt tallene a og b. Samt funktionen. Bemærk, at forklaringsgraden er tæt på 1, dvs. en rigtig god funktion.

$f(x) := 306.52 \cdot 1.4592^x$

$$x \rightarrow 306.52\ 1.4592^x \tag{8.1.3}$$

Hvor tallet $a = 1.4592$, og $b = 306.52$

Hvilket er det ønskede.

Delopgave b)

Vi bruger vores model for at bestemme det år, hvor omsætningen er 10000 mio. USD.

$f(x) = 10000$

$$306.52\ 1.4592^x = 10000 \tag{8.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 9.222452756]] \tag{8.2.2}$$

Vi finder året det vil passe i.
2006 + 9.222452756

$$2015.222453 \tag{8.2.3}$$

Dvs. at i år 2015 vil omsætningen nå 10000 mio USD.

Delopgave c)

Vi benytter fremskrivninsfaktoren for at udregne denne delopgave, altså $a = 1 + r$. Vi kender tallet a, som indsættes i formlen.

$1.4592 = 1 + r$

$$1.4592 = 1 + r \quad (8.3.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = 0.4592000000]] \quad (8.3.2)$$

Tallet omregnes til procent.

$0.4592000000 \cdot 100$

$$45.92000000 \quad (8.3.3)$$

Dvs. at den årlige vækstrate er ca. 46%

Vi bestemmer nu fordoblingstiden.

$T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(1.4592)}$

$$T_2 = \frac{6.093294889 \ln(2)}{\ln(10)} \quad (8.3.4)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$T_2 = 1.8343 \quad (8.3.5)$$

Dvs. fordoblingstiden er ca. 1.83 år eller nærmere 2 år.

Opgave 9 - *Potensfunktioner*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi kan bestemme tallene a og b pr. håndkraft, men vi benytter regression alligevel for den her potensmodel.

Vi definerer som gjort tidligere, vores x og y værdier.

$x := [3, 15]$

$$[3, 15] \quad (9.1.1)$$

$y := [100, 50]$

$$[100, 50] \quad (9.1.2)$$

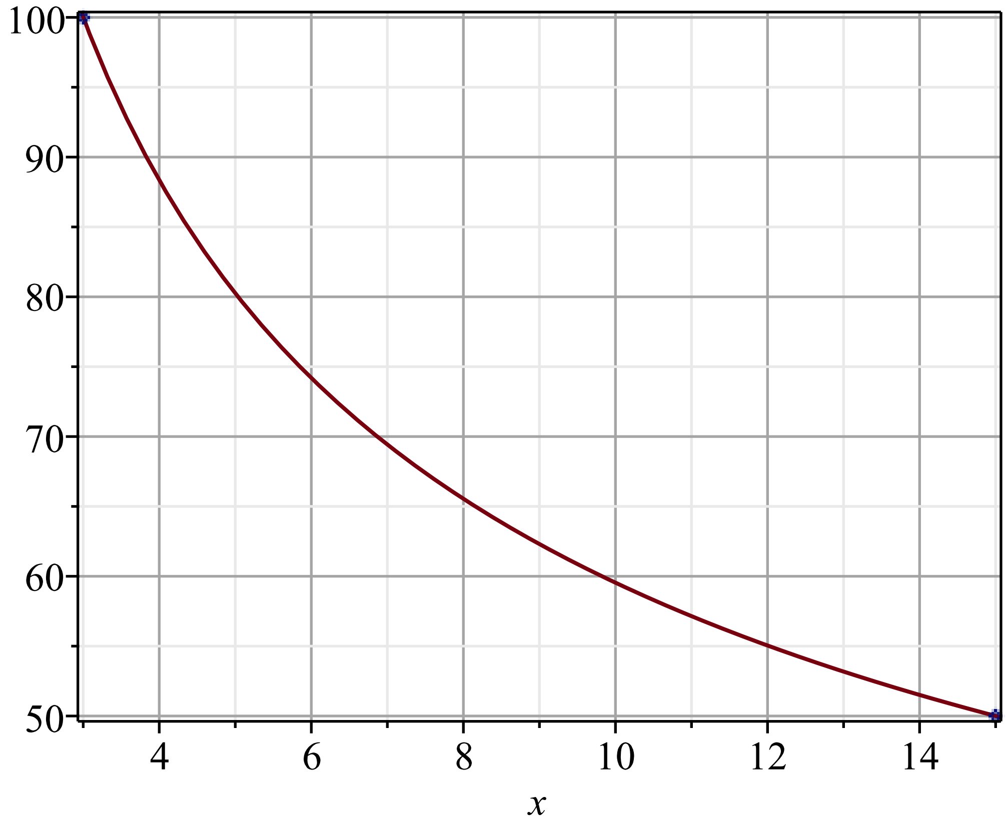
Vi laver regression for potensfunktionen.

$PowReg(x, y)$

Potens Regression

$$y = 160.50 \cdot \frac{1}{x^{0.43068}}$$

Forklaringsgrad $R^2 = 1.$



Dvs. tallene a og b samt modellen blev bestemt.

$$f(x) := 160.50 \cdot \left(\frac{1}{x^{0.43068}}\right)$$

$$x \rightarrow 160.50 \frac{1}{x^{0.43068}} \quad \textbf{(9.1.3)}$$

Hvor tallet $a = -0.43068$, og $b = 160.50$.

Delopgave b)

Vi skal her bestemme $f(20)$ og dette gøres her:

$f(20)$

$$44.17203811 \quad \textbf{(9.2.1)}$$

Dvs. når $x = 20$, så er $f(x) = 44.17203811$.

Vi ønsker nu at bestemme den procentvise ændring, når x vokser med 70%. Følgende formel bruges: $r_y = \left(\left(1 + r_x\right)^a - 1\right) \cdot 100$

Så vi indsætter 70.

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{70}{100}\right)\right)^{-0.43068} - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = -20.42983504 \tag{9.2.2}$$

Så vores procentvise fald, er ca. 20.4%

Opgave 10 - *Differentialregning & Monotoniforhold*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi definerer vores polynomium

$$f(x) := x^6 - 5x^3 + 4$$

$$x \rightarrow x^6 - 5x^3 + 4 \tag{10.1.1}$$

Vi skal finde skæringspunktet for første kvadrant. Vi løser en ligning for *f*.

$$f(x) = 0$$

$$x^6 - 5x^3 + 4 = 0 \tag{10.1.2}$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\{x=1\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right\}, \{x = 2^{2/3}\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\,2^{2/3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,2^{2/3}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\,2^{2/3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,2^{2/3}\right\} \tag{10.1.3}$$

Her ses en række løsninger, men vi er kun interesseret i $x \in \mathbb{R}$ og ikke de andre komplekse rødder. Så x har skæring i

$x = 1$ og $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Da f skal ramme x-aksen, ved vi, at $y = 0$. Derfor har vi koordinatsættene

$$x = 1, y = 0$$

$$x = 1, y = 0 \tag{10.1.4}$$

og

$$x = 2^{\frac{2}{3}}, y = 0$$

$$x = 2^{2/3}, y = 0 \tag{10.1.5}$$

Hvilket er det ønskede i denne opgave.

Delopgave b)

Vi bestemmer monotoniforholde for *f*. Vi skal først differentiere *f*.

$$f'(x)$$

$$6\,x^5 - 15\,x^2 \qquad \textbf{(10.2.1)}$$

Her ses den afledte af *f*.

Vi ønsker nu at bestemme hvor *x* er størst. Vi løser derfor en ligning for *x*.

$f'(x) = 0$

$$6\,x^5 - 15\,x^2 = 0 \qquad \textbf{(10.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x=0],\ [x=0],\ \left[x=\frac{1}{2}\,20^{1/3}\right],\ \left[x=-\frac{1}{4}\,20^{1/3}+\frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,20^{1/3}\right],\ \left[x=-\frac{1}{4}\,20^{1/3} - \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,20^{1/3}\right]\right] \qquad \textbf{(10.2.3)}$$

Vi har tre reelle løsninger (ℝ) og kan nu bestemme det sted, hvor *x* er størst. Vi ved, at der er tale om en vandret vendetangent, idet der er to ens rødder.

Vi finder ud af, hvornår *x* er voksende, derfor vælges tal der er forskelligt fra *x*. Jeg vælger -1,1 og 2

$f'(-1)$

$$-21 \qquad \textbf{(10.2.4)}$$

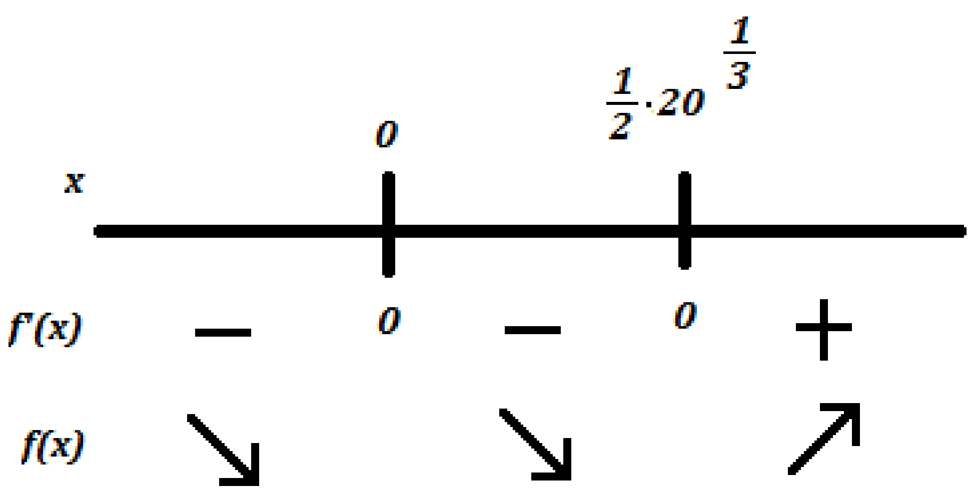
$f'(1)$

$$-9 \qquad \textbf{(10.2.5)}$$

$f'(2)$

$$132 \qquad \textbf{(10.2.6)}$$

Her ses det, hvornår *f* er voksende samt aftagende. Jeg tegner en linje i Paint.



Vi kan i denne opgave vurdere, om hvornår *f* er voksende og aftagende.

f er aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$

f er aftagende i intervallet $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\cdot 20^{\frac{1}{3}}\right[$

f er voksende i intervallet $\left[\frac{1}{2}\cdot 20^{\frac{1}{3}}\ ;\infty\right[$

Vi kan endvidere bestemme lokale maksimum og lokale minimum ved indsættelse af x. Vi bestemmer det lokale maksimum

$f(0)$

$$4 \tag{10.2.7}$$

Nu det lokale minimum.

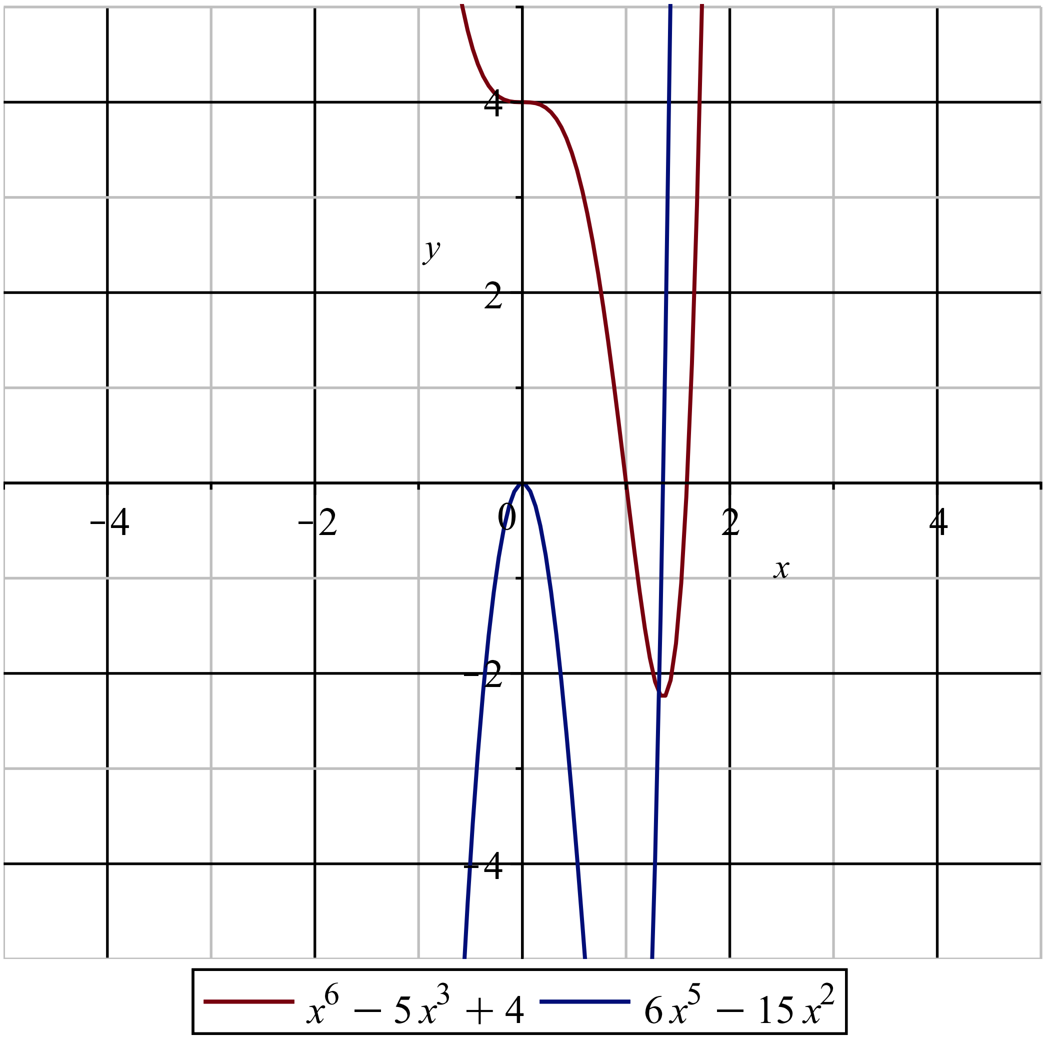
$f\left(\frac{1}{2}\cdot 20^{\frac{1}{3}}\right)$

$$-\frac{9}{4} \tag{10.2.8}$$

Her fik vi så vores maksimale og minimale ekstrema.

I Maple kan vi få f og f' visualiseret.

$plot([f(x), f'(x)], x=-5..5, y=-5..5, legend=[f(x), f'(x)])$



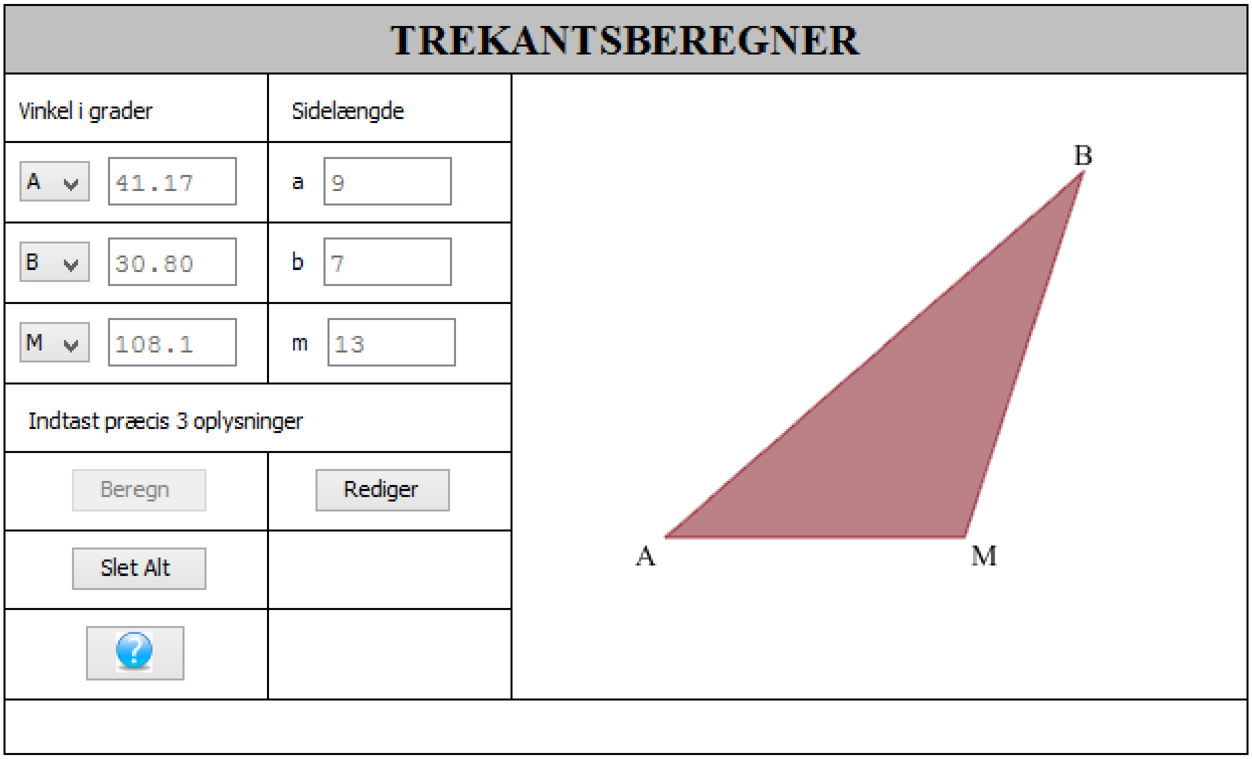
Dette er det ønskede.

Opgave 11 - *Trigonometri*

restart
with(Gym) :

Delopgave a)

Vi regner denne opgave v.h.a. Maple's smarte trekantsberegner. Jeg indsætter de oplyste tal fra opgaveformuleringen.



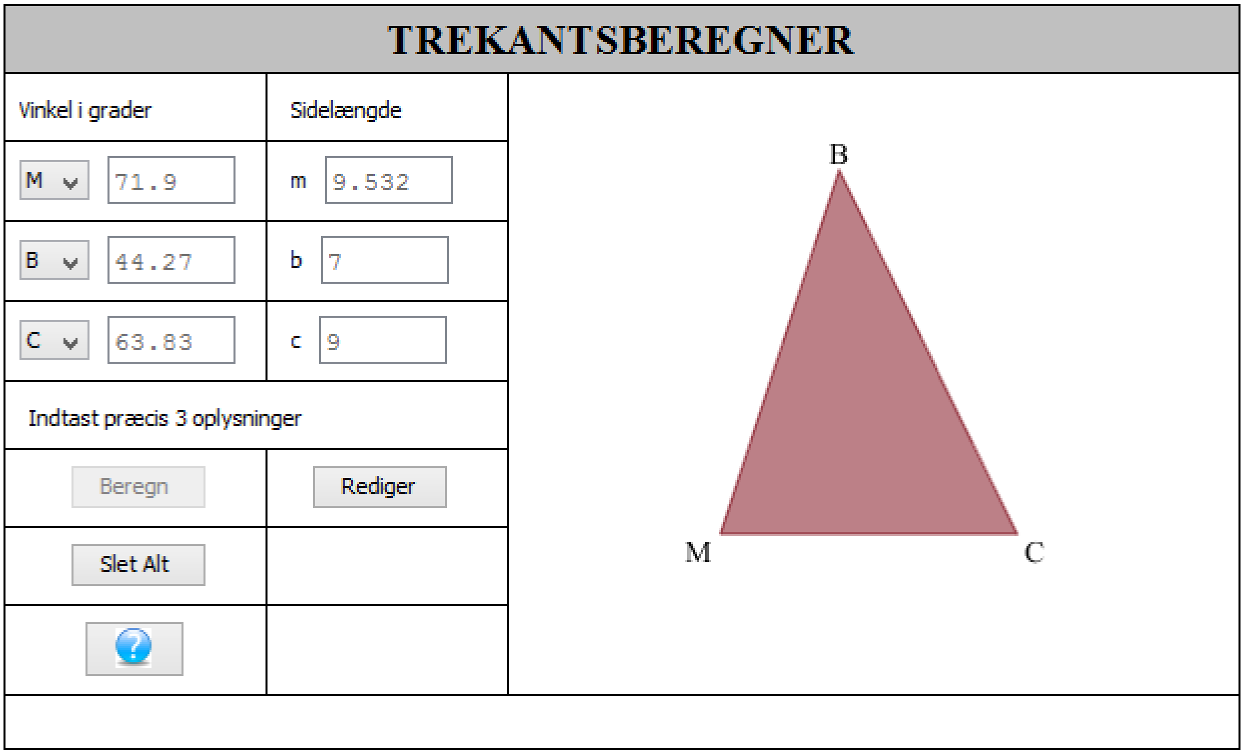
Bemærk, at a er $|BM|$, b er $|AM|$ og m er $|AB|$.

Her fik vi bestemt vinkel A. Vi skal nu regne den anden side af trekanten BMC. Det kræver lige nogle udregninger af bl.a. vinkel M.

$180 - 108.1$

$$71.9 \tag{11.1.1}$$

Så vinkel M i trekanten BMC er 71.9°. Vi ved, at M er midtpunktet, så må $|MC|$ være det samme som $|AM|$, dvs. 7. Vi har nu tilstrækelig tal for at finde den anden trekant.



Vi ser nu, at den anden trekant er fundet. Vi skal bestemme omkredsen af trekanten ABC og derfor regner vi længderne af trekanterne undtagen den længde $|BM|$.

$|AB| + (|AM| + |MC|) + |BC|$.

Vi indsætter tallene.

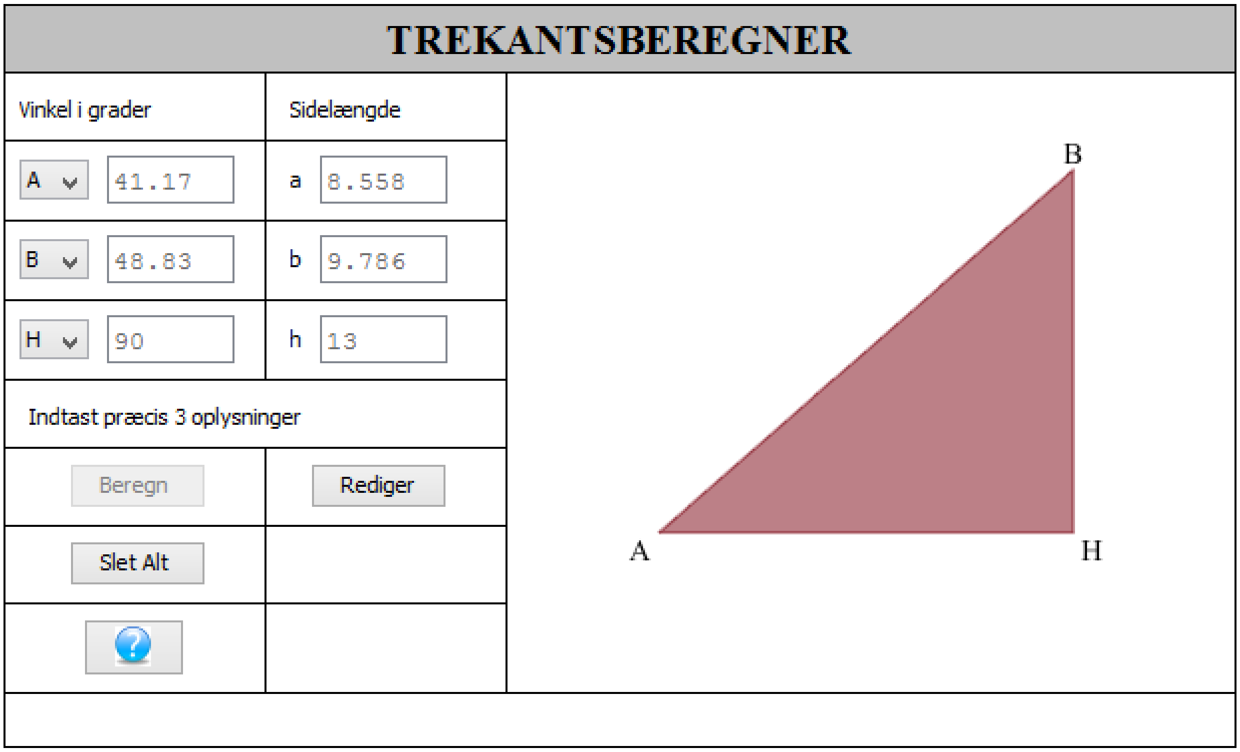
$13 + (7 + 7) + 9.532$

$$36.532 \tag{11.1.2}$$

Så omkredset af trekanten ABC er 36.532.

Delopgave b)

Vi har nu en trekant, der har en højde fra B til et nyt punkt. Lad os kalde det for H. Vi ved, at vinkel H er 90 grader, idet det skal være en retvinklet trekant. Vi kender allerede hypotenusen fra tidligere og vi kender vinkel A. Derfor benytter vi Maple's trekantsberegner, hvor de ovenstående oplysninger indsættes.



Vi fik nu bestemt højden til at være 8.558.

Opgave 12 - *Statistik*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

$$obs := \left[\frac{39}{300}\cdot 100, \frac{42}{300}\cdot 100, \frac{83}{300}\cdot 100, \frac{54}{300}\cdot 100, \frac{49}{300}\cdot 100, \frac{21}{300}\cdot 100, \frac{12}{300}\cdot 100\right]$$

$$\left[13, 14, \frac{83}{3}, 18, \frac{49}{3}, 7, 4\right] \tag{12.1.1}$$

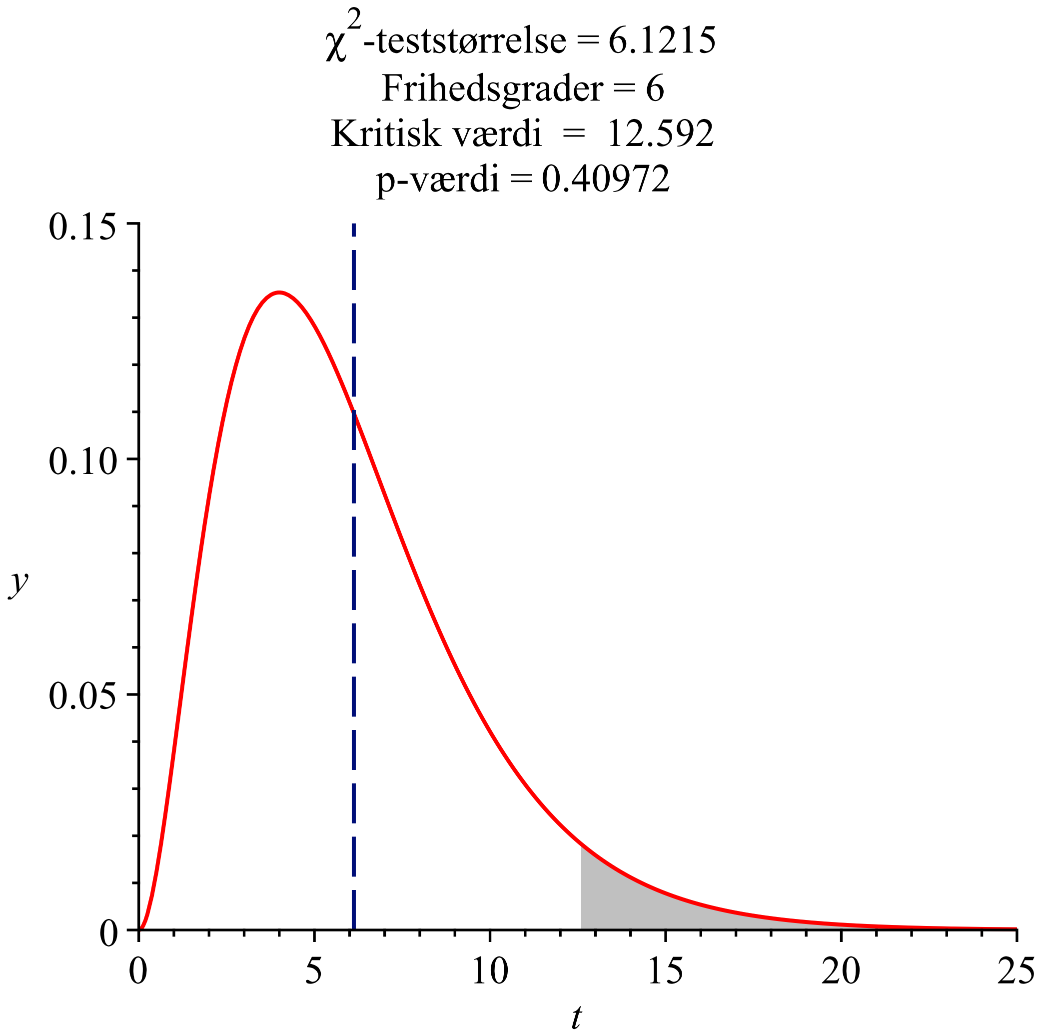
$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$[13., 14., 27.667, 18., 16.333, 7., 4.] \tag{12.1.2}$$

$forv := [15, 16, 19, 17, 17, 10, 6]$

$$[15, 16, 19, 17, 17, 10, 6] \tag{12.1.3}$$

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$



Det kan ses, at p-værdien er 40,972% som er større end 5% signifikant. Derfor accepteres nulhypotesen!

Delopgave b)

$$\frac{(13-15)^2}{15}$$

$$\frac{4}{15} \tag{12.2.1}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$0.26667 \tag{12.2.2}$$

$$\frac{(14-16)^2}{16}$$

$$\frac{1}{4} \tag{12.2.3}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$0.25000 \tag{12.2.4}$$

$$\frac{(18-17)^2}{17}$$

$$\frac{1}{17} \quad (12.2.5)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.058824 \quad (12.2.6)$$

$$\frac{(16.33-17)^2}{17}$$

$$0.02640588235 \quad (12.2.7)$$

$$\frac{(7-10)^2}{10}$$

$$\frac{9}{10} \quad (12.2.8)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.90000 \quad (12.2.9)$$

$$\frac{(4-6)^2}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad (12.2.10)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.66667 \quad (12.2.11)$$

$$\frac{(27.667-19)^2}{19}$$

$$3.953520474 \quad (12.2.12)$$

Det kan ses, at aldergruppeen 40-49 der giver det største bidrag til teststørrelsen.

Opgave 13 - *Analytisk Rumgeometri*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi skal her bestemme vinklen mellem bunden og en af de fire sidder. Vi ved, at bunden danner et kvadrat med 6cm på hver side. T er toppunktet og har koordinaterne $T(3, 3, 6)$ fordi den ligger i midtpunktet af kvadratet. Vi kan derfor bestemme den plan der grænser O, A og T. Bemærk, at bundfladen allerede danner en 'plan' så dette er ikke nødvendigt at lave.

VI vælger punktet fra origo, dvs. O$(0, 0, 0)$ og et andet punkt $A(6, 0, 0)$ og $B(6, 6, 0)$. Vi laver krydsprodukt ud af det. Men først defineres vores punkter.

$\mathrm{O} := \langle 0, 0, 0 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1.1)$$

$A := \langle 6, 0, 0 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1.2)$$

$T := \langle 3, 3, 6 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (13.1.3)$$

Vi kan nu trække fra.

$A - \mathrm{O}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1.4)$$

$T - \mathrm{O}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (13.1.5)$$

Vi definerer vores to nye punkter.

$\overrightarrow{OA} := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1.6)$$

$\overrightarrow{OT} := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (13.1.7)$$

Vi laver krydsprodukt ud af det.

$linalg[crossprod](\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT})$

$$\begin{bmatrix} 0 & -36 & 18 \end{bmatrix} \tag{13.1.8}$$

Vi laver en ligning for planen α. Planens ligning er angivet her:
$\alpha := a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Vi indsætter tallene og vælger punktet A.

$\alpha := 0(x - 6) - 36(y - 0) + 18(z - 0) = 0$

$$-36\,y + 18\,z = 0 \tag{13.1.9}$$

Dette er vores plan, α. Vi kan nu bestemme vinklen mellem planen α og grundfladen.

Grundfladen som er en xy-plan er 0, 0, 3. Vi bestemmer vinklen mellem planerne. Bemærk, at 3 vælges, idet planen for grundlinjen stadig er fladt, så højden har ingen indflydelse. Vinklen bestemmes ud fra normalvektoren for planen α samt grundfladen. Formlen for dette er givet ved: $cosv = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Vi benytter formlen nedenfor.

$Cos = \frac{(0\cdot 0) + (0\cdot(-36)) + (3\cdot 18)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}\sqrt{0^2 + (-36)^2 + 18^2}}$

$$Gym\text{:-}Cos = \frac{1}{5}\sqrt{5} \tag{13.1.10}$$

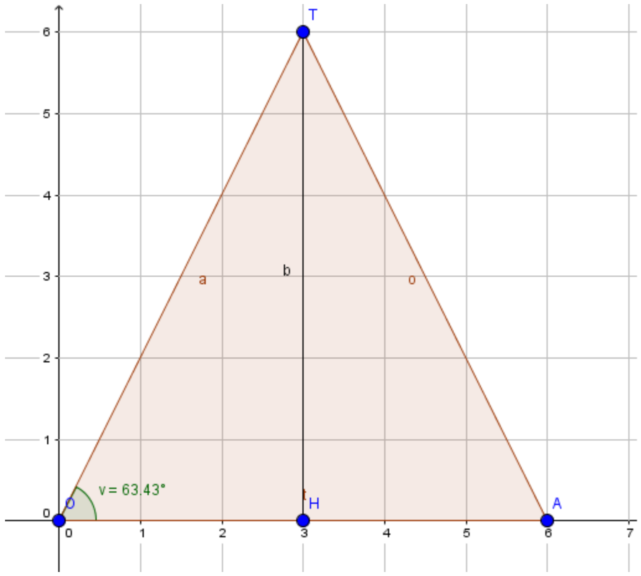
$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

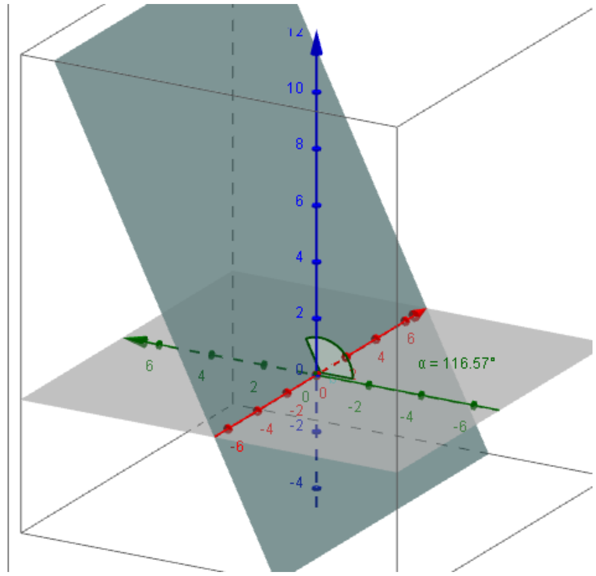
$$Gym\text{:-}Cos = 0.44722 \tag{13.1.11}$$

$invCos(0.44722)$

$$63.43453854 \tag{13.1.12}$$

Så vinklen mellem flødebollens sidder og grundfladen er 63.43453854°. Bemærk, at vinklen er spids, hvilket det også vises på figuren i tegningen, derfor må konklusionen være, at det passer. En skitse er lavet i CAS programmet GeoGebra, fra 2D og 3D.





Bemærk, at figuren i 3D viser en anden vinkel, den viser den stumpe vinkel mellem fladerne. Trækkes den vinkel fra 180 fås vores ønskede vinkel

$180 - 116.57$

$$63.43 \tag{13.1.13}$$

Dette passer.

Delopgave b)

Vi ønsker i denne opgave at bestemme overflade arealet. Dette gøres ved følgende arealformel.

$T = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$. Dette gælder for en trekant i rummet.

Vi indsætter vores krydsprodukt fra tidligere, hvor vi regnede en plan for en af siderne.

$Areal_{side} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + (-36)^2 + 18^2}$

$$Areal_{side} = 9\sqrt{5} \tag{13.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$Areal_{side} = 20.125 \tag{13.2.2}$$

Dette tal ganges med 4.

$Areal_{alle\ sider} = 4 \cdot 20.125$

$$Areal_{alle\ sider} = 80.500 \tag{13.2.3}$$

Vi har arealet af alle sider. Vi mangler kun grundfladen.

$Areal_{grundflade} = 6 \cdot 6$

$$Areal_{grundflade} = 36 \tag{13.2.4}$$

$Areal_{total} = 36 + 80.500$

$$Areal_{total} = 116.500 \quad (13.2.5)$$

Så det totale areal af flødebollen er $116.5\ cm^2$.

Opgave 14 - *Integralregning & Areal beregning*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har fået givet to funktioner, og jeg definerer dem begge for de enkelte opgaver.

$f(x) := 1.5^x$

$$x \rightarrow 1.5^x \quad (14.1.1)$$

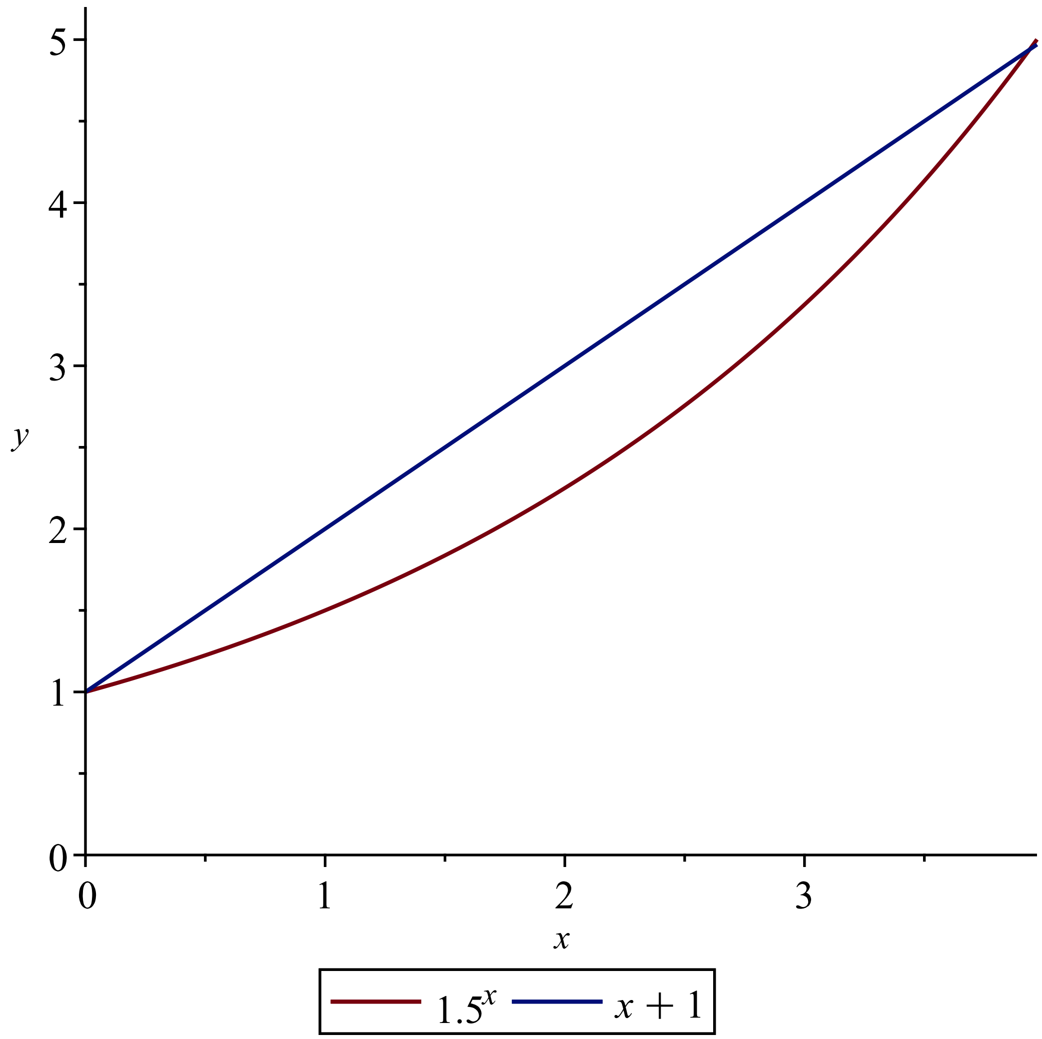
$g(x) := x + 1$

$$x \rightarrow x + 1 \quad (14.1.2)$$

Vi bestemmer nu arealet af M, som $f(x)$ og $g(x)$ afgrænser indenfor det punktmængde $x = 1$.

For at finde uf af, hvilken funktion der ligger øverst, kan vi plotte funktionerne f og g.

$plot([f(x), g(x)], x = 0..3.97, y = 0..5.2, legend = [f(x), g(x)])$



Vi ved nu, at $g(x)$ ligger øverst. Vi bestemmer nu arealet af M.

$$M = \int_0^1 g(x) - f(x)\, dx$$

$$M = 0.2668482688 \qquad \textbf{(14.1.3)}$$

Dvs. at M har arealet 0.2668482688.

restart
with(*Gym*) :

Delopgave b)

Vi har fået givet to funktioner, og jeg definerer dem begge for de enkelte opgaver.

$f(x) := a^x$

$$x \rightarrow a^x \qquad \textbf{(14.2.1)}$$

$g(x) := x + 1$

$$x \rightarrow x + 1 \qquad \textbf{(14.2.2)}$$

M, som er 0.4. Vi ved, at dette afgrænses indenfor det punktmængde $x = 1$.

$$0.4 = \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$$

$$0.4 = \frac{1}{2}\,\frac{2 - 2a + 3\ln(a)}{\ln(a)} \quad (14.2.3)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for a}}$$

$$[[a = 1.206454299]] \quad (14.2.4)$$

Derved har vi fået angivet den konstant, der kræves for at man kan få arealet til 0.4. Funktionen skal derfor se sådan ud:

$f(x) = 1.206454299^x$.

Dette er det ønskede.

Opgave 15 - *Differentialligninger*

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi skal i denne opgave opstille en differentialligning med oplysningerne $t = 162$, proportionalitetskonstant = 0.022 og antallet af smittede ved 3800.

$$\frac{dN}{dt} = 0.022 \cdot N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = 0.022\,N(t) \quad (15.1.1)$$

Dette er en differentialligning. Vi ønsker nu at bestemme antallet af smittede ved indsættelse af 162 i differentialligningen.

$$\frac{dN}{dt} = 0.022 \cdot 3800$$

$$\frac{dN}{dt} = 83.600 \quad (15.1.2)$$

Dvs. at der i forhold til væksthastigheden - vokser antallet af smittede med ca. 84 personer pr. døgn.

Delopgave b)

Vi opstiller en ny ligning. Bemærk, at jeg kalder den for M, idet vi allerede har brugt N.

$$M'(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot M(t) \cdot (13382 - M(t))$$

$$D(M)(t) = \frac{3}{1000000}\,M(t)\,(13382 - M(t)) \quad (15.2.1)$$

$$M'(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 3800 \cdot (13382 - 3800)$$

$$\mathrm{D}(M)(t) = \frac{273087}{2500} \quad (15.2.2)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$\mathrm{D}(M)(t) = 109.23 \quad (15.2.3)$$

Vi sammenligninger begge ligninger. Først for den ene og den anden. Endelig sættes tallene op mod hinanden.

$dsolve(\{N'(t) = 0.022 \cdot N(t), N(162) = 3800\}, N(t))$

$$N(t) = \frac{3800\, \mathrm{e}^{\frac{11}{500} t}}{\mathrm{e}^{\frac{891}{250}}} \quad (15.2.4)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$N(t) = 107.64\, \mathrm{e}^{0.022000\, t} \quad (15.2.5)$$

$N(t) := 107.64\, \mathrm{e}^{0.022000\, t}$

$$t \rightarrow 107.64\, \mathrm{e}^{0.022000\, t} \quad (15.2.6)$$

$N''(162)$

$$1.839266176 \quad (15.2.7)$$

Den accelererer med 1.83 smittede pr. døgn. Nu for den anden ligning.

$dsolve\left(\{M'(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot M(t) \cdot (13382 - M(t)), M(162) = 3800\}, M(t)\right)$

$$M(t) = \frac{25425800\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}}{4791\, \mathrm{e}^{-\frac{20073}{500000} t} + 1900\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}} \quad (15.2.8)$$

$$M(t) := \frac{25425800\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}}{4791\, \mathrm{e}^{-\frac{20073}{500000} t} + 1900\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}}$$

$$t \rightarrow \frac{25425800\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}}{4791\, \mathrm{e}^{-\frac{20073}{500000} t} + 1900\, \mathrm{e}^{-\frac{1625913}{250000}}} \quad (15.2.9)$$

$M''(162)$

$$\frac{2368483551}{1250000000} \quad (15.2.10)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$1.8948 \quad (15.2.11)$$

Den accelererer med 1.89 smittede pr. døgn. Nu for den anden ligning. Så den sidste model er en anelse hurtigere end den første.