Matemaattiset perustaidot

Versio 30.7.2018

Matematiikan perusteita lukiolaisille

Materiaalin jokaisessa tehtävässä on linkki mallivastaukseen, linkit eivät välttämättä toimi oikein kaikilla pdf-lukijoilla. Ainakin Adobe-readerilla linkit toimivat oikein. Jos linkit eivät toimi lukijallasi, kokeile toista lukijaa.

Materiaali on kehitysasteella. Sen saa toistaiseksi ladata ilmaiseksi henkilökohtaiseen käyttöön. Vaihtelevasta sivukoosta johtuen materiaali ei sovellu kovin hyvin printattavaksi. Mikäli huomaat jotain korjattavaa, anna palautetta sähköpostitse: jarnontunnit@gmail.com.

Nettisivut: jarnontunnit.com
Sähköposti: jarnontunnit@gmail.com

Sisältö

Laskujärjestyssopimus

Laskujärjestys

Jos laskujärjestyksestä ei olisi sopimusta, vaan laskettaisiin vaikka aina vasemmalta oikealle, monimutkaisemmista laskuista tulisi sekavia ja vaikeita lukea. Siksi On sovittu, että laskut lasketaan tietyssä järjestyksessä. Perusperiaate on, että ensin lasketaan kehittyneimmät laskutoimitukset ja siitä edetään yksinkertaisempiin. Yksinkertaisimmat laskutoimitukset ovat yhteen- ja vähennyslasku. Ne ovat myös laskujärjestyssopimuksessa samanarvoisia. Seuraavaksi kehittyneemmät laskutoimitukset ovat kerto- ja jakolaskut. Ne ovat myös sopimuksessa keskenään samanarvoiset. Kehittyneimmät laskutoimitukset ovat potenssit, juuret ja logaritmit. Niihin yleensä liittyy merkintätapoja, jotka ilmaisevat hyvin keskinäisen järjestyksen.

Jos on tarpeen ilmaista, että halutaan laskea eri järjestyksessä, voidaan käyttää sulkeita. Sulkeissa olevat laskut lasketaan ensin. Sulkeiden sisällä noudatetaan laskujärjestyssopimusta.

Laskujärjestyssopimus kuuluu:

Sulkeiden sisällä ja ulkopuolella noudatetaan seuraavaa laskujärjestystä:

1. Ensin sulkeet.
2. Seuraavaksi lasketaan potenssit, juuret ja logaritmit.
3. Seuraavaksi lasketaan kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle.
4. Lopuksi yhteen ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle.

Esimerkki: Lasketaan $5 - 14 : 2 - 6 \cdot (2 + 5 \cdot 2)$.

$$\begin{aligned} 5 - 14 : 2 - 6 \cdot (2 + 5 \cdot 2) &= 5 - 14 : 2 - 6 \cdot (2 + 10) && \text{ensin sulkeet} \\ &= 5 - 14 : 2 + 6 \cdot 12 \\ &= 5 - 7 + 72 && \text{kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle} \\ &= -2 + 72 && \text{yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle} \\ &= 70 \end{aligned}$$

Laskujärjestystä voidaan ilmaista myös muilla tavoin.

Jakoviivan ylä- ja alapuolella olevat toimitukset lasketaan ensin, laskujärjestyssopimusta noudattaen, sitten itse jakolasku.

Esimerkki:

$$\frac{6 + 2 \cdot 27}{3^2 \cdot 2 + 2} \quad \text{tarkoittaa samaa kuin} \quad (6 + 2 \cdot 27) : (3^2 \cdot 2 + 2)$$

$$\begin{aligned} \frac{6 + 2 \cdot 27}{3^2 \cdot 2 + 2} &= \frac{6 + 2 \cdot 27}{9 \cdot 2 + 2} && \text{ensin potenssit ja juuret} \\ &= \frac{6 + 54}{18 + 2} && \text{kerto- ja jakolaskut} \\ &= \frac{60}{20} && \text{yhteen- ja vähennyslaskut} \\ &= 3 && \text{lopuksi murtoviivan osoittama jakolasku} \end{aligned}$$

Juuren alla olevat laskut lasketaan ensin laskujärjestyssopimusta noudattaen.

Esimerkki:

$$2 \cdot \sqrt[3]{161 - 6^2} - 4 \quad \text{voisi ilmaista} \quad 2 \cdot \sqrt[3]{(161 - 6^2)} - 4$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt[3]{161 - 6^2} - 4 &= 2 \cdot \sqrt[3]{161 - 36} - 4 && \text{ensin juuren alla olevat laskut laskujärjestyssopimuksen mukaan} \\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{125} - 4 && \text{tästä eteenpäin normaalisti, eli ensin potenssit ja juuret} \\ &= 2 \cdot 5 - 4 \\ &= 10 - 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

On olemassa paljon laskutapoja (laskusääntöjä), joilla voidaan kiertää laskujärjestyssopimusta muuttamatta laskun lopputulosta. Näihin laskusääntöihin tutustutaan tulevissa kappaleissa.

Muista! Yhteenlasku ja kertolasku ovat vaihdannaisia laskutoimituksia, eli niiden jäsenten paikkaa saa vaihtaa vapaasti.

Harjoitustehtävä 1. Laske ilman laskinta

a) $2 + 20 : 4$

b) $2 \cdot 3^2$

c) $\dfrac{293 - 5^3}{6}$

d) $2 + 8 \cdot \sqrt{25 - 4^2} - 1$

Vastaus

Murtoluvut

Käsitteet

Murtoluvun, $\dfrac{a}{b}$, ylempää osaa kutsutaan osoittajaksi ja alempaa nimittäjäksi. Murtoluvun nimittäjä ei voi olla nolla.

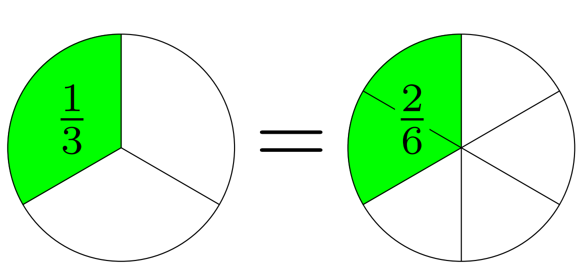
Hyviä muistisääntöjä: Ylempää voisi myös kutsua tähtiin osoittajaksi, se on ylempänä, koska sen pitää osoittaa tähtiä kohden. ”Otsa osoittaja, nenä nimittäjä.” Otsa on ylempänä ja nenä alempana kasvoissa. :)

Murtoluvuilla on sellainen hauska ominaisuus, että on murtolukuja, jotka ovat täsmälleen yhtä suuria, vaikka ne ovat eri näköisiä. Esimerkiksi murtoluvut $\frac{2}{4}$ ja $\frac{1}{2}$ ovat yhtä suuria, eli ne ovat täsmälleen sama luku. Samoin luvut $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ ja $\frac{5}{10}$ ovat täsmälleen yhtä suuria kuin $\frac{1}{2}$. Luku $\frac{1}{3}$ on täsmälleen sama kuin vaikkapa $\frac{2}{6}$ ja luku $\frac{2}{3}$ on täsmälleen sama kuin esimerkiksi $\frac{8}{12}$. Näitä kutsutaan murtolukujen muodoiksi. Luvut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ ja $\frac{3}{6}$ ovat siis yhtä suuria, mutta ne ovat eri muotoa. Murtolukuja voidaan helposti muuntaa näiden muotojen välillä supistamalla ja laventamalla, tätä käsitellään seuraavissa kappaleissa.

Murtoluvun laventaminen

Murtoluvun osoittajan ja nimittäjän kertomista samalla luvulla kutsutaan laventamiseksi. Laventaminen voidaan merkitä murtoluvun vasemmalle puolelle.

$$^{2)}\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}$$



Murtoluvun arvo pysyy samana: Yksi pala kolmeen osaan leikatusta kakusta on täsmälleen yhtä paljon kuin kaksi palaa samanlaisesta kuuteen osaan leikatusta kakusta.

Murtolukujen vertaileminen

Jos murtolukujen suuruuksia halutaan verrata, on yleensä tarpeen muuttaa ne samannimisiksi. Murtoluvut saadaan muutettua samannimisiksi laventamalla toistensa nimittäjillä.

Esimerkki: Lavennetaan murtoluvut $\dfrac{2}{5}$ ja $\dfrac{5}{6}$ samannimisiksi toistensa nimittäjillä.

$$^{6)}\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30} \qquad ^{5)}\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$$

Nyt voidaan verrata: huomataan, että $\dfrac{25}{30}$ on suurempi, koska siinä on enemmän saman kokoisia murto-osia.

Huomaa! Minkä tahansa luvun voi muuttaa murtolukumuotoon merkitsemällä luvun nimittäjäksi yksi. Esimerkiksi

$$9 = \frac{9}{1}.$$

Ykkösen voi muuttaa monissa laskuissa kätevästi murtoluvuksi, kun tiedetään, että luku jaettuna itsellään on yksi. Niinpä ykkönen voidaan ilmaista murtolukuna, jossa osoittaja ja nimittäjä ovat samat. Esimerkiksi

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{15}{15} = ...$$

Harjoitustehtävä 2. Lavenna murtoluvut samannimisiksi. Kumpi luvuista on suurempi?

a) $\dfrac{3}{5}$ ja $\dfrac{8}{15}$ b) $\dfrac{4}{5}$ ja $\dfrac{5}{7}$ c) $\dfrac{12}{8}$ ja $\dfrac{8}{5}$ d) 7 ja $\dfrac{55}{8}$

Vastaus

Samannimisiksi muutettaville murtoluvuille löytyy joskus yksinkertaisemmat laventajat kuin toistensa nimittäjät.

Harjoitustehtävä 3. Kumpi luvuista on suurempi? Etsi yksinkertaisimmat mahdolliset laventajat.

a) $\dfrac{25}{9}$ ja $\dfrac{31}{12}$ b) $\dfrac{7}{12}$ ja $\dfrac{17}{30}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 4. Perhe vei Mikan syntymäpäivänään pitsalle. Sisarukset päättivät kilpailla, kuka jaksaa syödä eniten pizzaa. Mika kehui syöneensä kolme viidesosaa pitsastaan. Joonas kertoi ahmineensa seitsemän yhdeksäsosaa omasta pitsastaan. Emma väitti jättäneensä vain neljäsosan syomättä. Kuka heistä oli syönyt pitsaa eniten ja kuka vähiten?

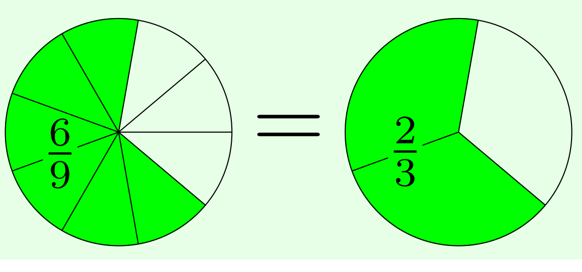
Vastaus

Murtoluvun supistaminen

Osoittajan ja nimittäjän jakamista samalla luvulla kutsutaan supistamiseksi. Edelleen murtoluvun arvo ei muutu. Murtoluvun supistaminen voidaan merkitä murtoluvun oikealle puolelle.

Esimerkki:

$$\frac{6}{9}^{(3} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$



Harjoitustehtävä 5. Supista murtoluvut (ilman laskinta)

a) $\dfrac{2}{8}$ b) $\dfrac{4}{12}$ c) $\dfrac{10}{15}$ d) $\dfrac{48}{6}$

Vastaus

Murtoluvut voidaan supistaa myös siten, että osoittaja ja nimittäjä jaetaan tekijöihin ja supistetaan yhteiset tekijät. Tekijöihin jakaminen tarkoittaa sitä, että esitetään jokin luku kertolaskuna. Esimerkiksi

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{tai} \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Murtoluku voidaan supistaa esimerkiksi seuraavasti

$$\frac{12}{16} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{4 \cdot \cancel{4}} = \frac{3}{4}$$

Harjoitustehtävä 6. Jaa seuraavat luvut kahden kokonaisluvun tuloksi (Eli jaa tekijöihin).

a) 6 b) 21 c) 18 (esitä kahdella eri tavalla)

Vastaus

Harjoitustehtävä 7. Minkä kokoisiin yhtä suuriin ryhmiin luokan oppilaat voidaan jakaa, kun luokassa on
a) 8 b) 15 c) 24 d) 30 oppilasta?

Vastaus

Harjoitustehtävä 8. Supista murtoluvut tekijöihin jako -menetelmällä.

a) $\dfrac{18}{15}$ b) $\dfrac{36}{9}$ c) $\dfrac{20}{24}$ d) $\dfrac{14}{42}$

Vastaus

Tehtäviä tehdessä lavennukset ja supistukset voi tehdä yleensä ”lennossa”, eikä niihin liittyviä merkintöjä tai välivaiheita välttämättä tarvitse merkitä näkyviin.

Murtolukuina annettavat tehtävien vastaukset pitää aina antaa supistetuimmassa muodossaan.

Harjoitustehtävä 9. Jaakon koulumatka oli yhteensä 30 kilometriä. Tästä ensimmäiset kuusi kilometriä oli hiekkatietä, seuraavat yhdeksän kilometriä asfaltoitua moottoritietä, seuraavat 12 kilometriä asfaltoitua maantietä ja loput kolme kilometriä kaupunkikatuja. Kuinka suuri osuus Jaakon koulumatkasta oli kutakin tietyyppiä? Anna vastaukset murtolukuina.

Vastaus

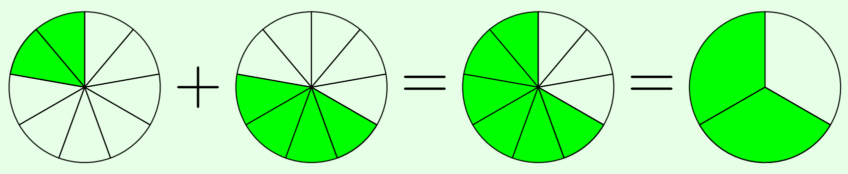
Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Jotta murtolukuja voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan, on niillä oltava sama nimittäjä. Tämä yhteinen nimittäjä tulee lopputuloksen nimittäjäksi ja osoittajat lasketaan yhteen tai vähennetään.

Esimerkki: Lasketaan $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$

Koska murtoluvuilla on valmiiksi sama nimittäjä, eli kyseessä ovat samanlaiset murto-osat, voidaan ne laskea yhteen. Osoittajat lasketaan yhteen ja nimittäjäksi tulee 9, koska murto-osat ovat edelleen samanlaisia; vain niiden lukumäärä muuttui. Lopuksi supistetaan vastaus sievimpään mahdolliseen muotoon.

$$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+4}{9}=\frac{6^{(3}}{9}=\frac{2}{3}$$



Kaksi palaa kakusta, joka on leikattu yhdeksään osaan lisättynä neljällä palalla yhdeksään osaan leikatusta kakusta on yhteensä kuusi palaa yhdeksään osaan leikatusta kakusta. Murtolukujen yhteenlaskussa lasketaan samanlaisia murto-osia yhteen. Tästä syystä nimittäjä pysyy samana.

Jos yhteenlaskettavilla murtoluvuilla on eri nimittäjät, ne pitää ensin muuttaa samannimisiksi.

Esimerkki: Riina söi keksipaketista neljäsosan ja Miska kaksi viidesosaa. Kuinka suuren osan kekseistä he söivät yhteensä?

Osuus saadaan, kun murtoluvut lasketaan yhteen. Koska ne ovat erinimiset, aloitetaan laventamalla ne samannimisiksi.

$${}^{5)}\frac{1}{4}+{}^{4)}\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{5+8}{20}=\frac{13}{20}$$

Harjoitustehtävä 10. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{9}+\frac{14}{9}$ d) $\frac{5}{12}+\frac{11}{15}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 11. Koulun oppilaista $\frac{1}{4}$ harrastaa jalkapalloa, $\frac{5}{24}$ jääkiekkoa ja $\frac{3}{8}$ jotain muuta liikuntaa. Kuinka iso osa koulun oppilaista tämän perusteella harrastaa liikuntaa?

Vastaus

Murtolukujen vähennyslasku lasketaan samalla periaatteella kuin yhteenlasku. Niillä on oltava sama nimittäjä, joka tulee lopputuloksen nimittäjäksi ja osoittajat vähennetään.

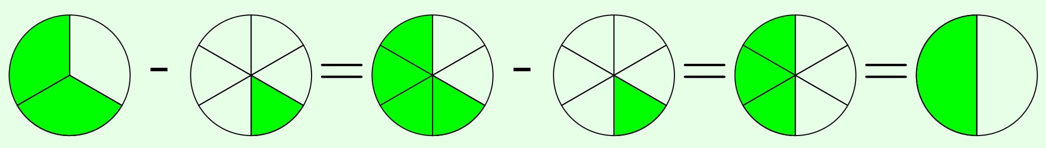
Esimerkki: Vili pani kaksi kolmasosaa kesätyöpalkastaan säästöön. Viikon kuluttua hän osti uuden skeittilaudan, jonka hinta oli kuudesosa alkuperäisestä palkasta. Kuinka paljon hänelle jäi rahaa säästöön ostoksen jälkeen.

Rahaa jäi säästöön $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$ alkuperäisestä palkasta.

Luvut on ensin lavennettava samannimisiksi, sen jälkeen voidaan laskea vähennyslasku.

$${}^{2)}\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3^{(3}}{6}=\frac{1}{2}$$

Alkuperäisestä palkasta on jäljellä puolet.



Murtoluvut lasketaan yhteen tai vähennetään seuraavasti.

1. Lavennetaan murtoluvut/luvut samannimisiksi.
2. Osoittajat lasketaan yhteen tai vähennetään, yhteinen nimittäjä säilyy muuttumattomana.

Harjoitustehtävä 12. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{11}{12}-\frac{8}{12}$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$ c) $-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 13. Sahalle tulevasta raakapuuerästä jäi esivalmistelujen, kuten kuorimisen ja oksantynkien poiston, jälkeen jäljelle $\frac{6}{7}$. Poistettu puuaines myytiin energialaitokselle. Tuotetun sahatavaran osuus koko erästä oli $\frac{11}{21}$. Sahatavaran tuotannossa yli jäänyt puuaines myytiin paperitehtaalle.

Kuinka iso osa koko erästä meni energialaitokselle ja kuinka iso osa paperitehtaalle?

Vastaus

Sekamurtoluvut

Sekamurtoluvut, eli lyhyesti sekaluvut, ovat kokonaisluvun ja murtoluvun yhdistelmiä. Ne ovat muotoa $a + \frac{b}{c}$, joka tyypillisesti lyhennetään muotoon $a\frac{b}{c}$. Jos murtoluvun arvo on suurempi kuin yksi tai pienempi kuin miinus yksi, se voidaan esittää sekamurtolukuna.

Esimerkiksi $\frac{3}{2}$ voidaan muuttaa sekamurtoluvuksi. Jos sinulla on 3 puolikasta omenaa, se on sama kuin sinulla olisi yksi kokonainen ja lisäksi yksi puolikas omena.

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Seuraavassa esimerkissä käytetään tekniikkaa, jossa erotellaan summan tai erotuksen jäsenten yhteinen nimittäjä jäsenten omiksi nimittäjiksi. Tämä perustuu siihen, että koska murtolukujen summassa merkitään samat nimittäjät yhteiseksi

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

on luonnollisesti sallittua tehdä myös toisin päin, eli muuttaa yhteinen nimittäjä yhteen- tai vähennyslaskun erillisiksi nimittäjiksi

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Esimerkki: Muutetaan $\frac{18}{5}$ sekamurtoluvuksi.

$\frac{18}{5} = \frac{15+3}{5}$ Selvitetään, mikä on ensimmäinen osoittajaa pienempi luku joka jakautuu tasan viidellä, se on 15. Ilmaistaan 18 muodossa $15+3$.

$= \frac{15}{5} + \frac{3}{5}$ Erotetaan yhteinen nimittäjä yhteenlaskettavien omiksi nimittäjiksi.

$= 3 + \frac{3}{5}$ Sievennetään

$\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

Harjoitustehtävä 14. Muuta sekamurtoluvuksi.

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{32}{5}$

Vastaus

Murtoluku voidaan muuttaa sekamurtoluvuksi myös jakokulmassa. Tällöin sekaluvun murto-osa on $\frac{\text{[jakojäännös]}}{\text{[jakaja]}}$.

Esimerkki: Muutetaan murtoluku $\frac{221}{18}$ sekamurtoluvuksi jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l} & 12 \\ \hline 18 & 221 \\ & -18 \\ \hline & 41 \\ & -36 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \frac{221}{18} = 12\frac{5}{18}$$

Harjoitustehtävä 15. Muuta sekamurtoluvuksi jakokulmassa.

a) $\frac{445}{14}$ b) $\frac{797}{219}$

Vastaus

Sekamurtoluvut muutetaan murtoluvuksi laventamalla kokonaisosa murto-osan nimittäjällä.

Esimerkki: Muutetaan $2\frac{4}{5}$ murtoluvuksi.

$$2\frac{4}{5} = {}^{5)}2 + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

Harjoitustehtävä 16. Muuta murtoluvuksi lavennustekniikalla.

a) $2\frac{1}{3}$ b) $4\frac{3}{8}$ c) $15\frac{9}{10}$

Vastaus

Toinen tapa on käyttää muistikaavaa. Murtoluvun nimittäjäksi tulee murto-osan nimittäjä. Osoittaja saadaan, kun kokonaiset kerrotaan murto-osan nimittäjällä ja lisätään siihen murto-osan osoittaja. Alla vielä kaava johdettuna.

$$\begin{aligned} a\frac{b}{c} &= {}^{c)}a + \frac{b}{c} \\ &= \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} \\ a\frac{b}{c} &= \frac{ac+b}{c} \end{aligned}$$

Esimerkki: Muutetaan $3\frac{3}{4}$ murtoluvuksi muistikaavalla.

$$3\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{15}{4}$$

Esimerkki: Muutetaan $2\frac{1}{8}$ murtoluvuksi.

$$2\frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 1}{8} = \frac{17}{8}$$

Harjoitustehtävä 17. Muuta murtoluvuksi muistikaavalla.

a) $3\frac{2}{5}$ b) $20\frac{9}{16}$ c) $293\frac{3}{10}$

Vastaus

Sekamurtolukuja voi laskea yhteen tai vähentää sellaisenaan, joskus voi kuitenkin olla helpompaa muuttaa ne ensin murtoluvuiksi. Muiden laskutoimitusten kanssa on yleensä suositeltavaa muuttaa sekamurtoluvut ensin murtoluvuiksi.

Harjoitustehtävä 18. Laske ilman laskinta.

a) $5\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}$ b) $7\frac{3}{5} - 2\frac{14}{15}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 19. Olli osti tynnyrillisen suolakurkkuja. Tynnyri painoi täytenä $9\frac{3}{4}$ kg. Kun kaikki kurkut oli käytetty, tynnyri ja säilöntävesi painoivat $5\frac{2}{5}$ kg. Kuinka paljon tynnyrissä oli kurkkuja?

Vastaus

Murtolukujen kertolasku

Murtoluvut kerrotaan keskenään siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään. Sääntöä voi myös soveltaa luku kertaa murtoluku -tyyppisiin tilanteisiin. Katsotaan erilaisia kertolaskuja joissa on mukana murtoluku/murtoluku ja laskusääntöjen perusteluja.

Tilanne [luku] · [murtoluku], eli $a \cdot \frac{b}{c}$.

Esimerkki: Pizzabuffetissa pizzat jaetaan 8 yhtä suureen palaan. Tarjolla on neljää eri pizzalaatua. Heikki söi 3 palaa kustakin pizzasta. Kuinka paljon pizzaa hän söi yhteensä?

Yksi pizzapala on $\frac{1}{8}$ kokonaisesta pizzasta. Heikki söi kustakin pizzasta $\frac{3}{8}$. Yhteensä hän söi

$$4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+3+3+3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Yhteensä Heikki söi siis puolitoista pizzaa.

Edellisen esimerkin mukaan

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{b}{c} &= \overbrace{\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \ldots + \frac{b}{c}}^{a \text{ kpl}} \\ &= \frac{\overbrace{b + b + \ldots + b}^{a \text{ kpl}}}{c} \qquad \text{murtolukujen yhteenlasku; yhteinen nimittäjä} \\ a \cdot \frac{b}{c} &= \frac{a \cdot b}{c} \end{aligned}$$

Muista! Koska kertolasku on vaihdannainen laskutoimitus, pätee sama sääntö toisinkin päin.

$$\frac{b}{c} \cdot a = \frac{b \cdot a}{c}$$

Yleisin tilanne, jossa luvut tulevat intuitiivisesti toisin päin on, kun kysytään esimerkiksi, kuinka paljon on kolme viidesosaa luvusta viisitoista.

Esimerkki: Sinulla on keksipaketti, jossa on 15 keksiä ja syöt niistä $\frac{3}{5}$, kuinka monta keksiä söit?

Vastaus saadaan, kun selvitetään, kuinka paljon on $\frac{3}{5}$ luvusta 15, mikä saadaan kertolaskulla

$$\frac{3}{5} \cdot 15 = \frac{3 \cdot 15}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = 9.$$

Harjoitustehtävä 20. Laske ilman laskinta

a) $2 \cdot \frac{3}{5}$ b) $4 \cdot \frac{5}{6}$ c) $\frac{9}{10} \cdot 3$ d) $\frac{3}{5} \cdot 15$ e) $13 \cdot \frac{3}{52}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 21. Kuinka paljon on

a) neljä viidesosaa luvusta 40
b) kaksi kolmasosaa luvusta 9
c) kolme neljäasosaa luvusta 100

Vastaus

Harjoitustehtävä 22. Kilogramma lenkkimakkaraa maksaa kaupan lihatiskillä 4 euroa. Kuinka paljon maksaa $\frac{3}{5}$ kg. Anna lopullinen vastaus euroina ja sentteinä.

Vastaus

Katsotaan seuraavaksi yksinkertaista tilannetta $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

Olet tilannut pizzan kahden kaverisi kanssa. Pizza on valmiiksi jaettu neljään osaan, joten kun jokainen on syönyt yhden palan, jäljellä on yksi neljäsosan kokoinen pala. Jos tämä pala jaetaan vielä tasan kolmelle, minkä kokoisen palan saat syötäväksi?

Selvitetään, kuinka paljon on yksi kolmasosa luvusta yksi neljäsosaa. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

Yksi kolmasosa neljäsosasta

Jaetaan kaikki muut (kuvitteelliset) neljäsosat myös kolmeen osaan, jolloin koko pizza jakautuu 12 osaan, joten $3 \cdot 4 = 12$ tulee lopputuloksen nimittäjäksi. Osoittajaksi tulee yksi.

Syöt siis itse pizzasta yhden kahdestoistaosan. Joten voidaan päätellä, että

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}.$$

Tästä saadaan säännöksi

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}.$$

Harjoitustehtävä 23. Laske ilman laskinta

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{18}$

Vastaus

Katsotaan lopuksi yleisesti tilannetta [murtoluku] · [murtoluku].

Esimerkki: Erään koulun oppilaista $\frac{4}{5}$ harrastaa jotakin urheilulajia. Urheilevista oppilaista kaksi kolmesta pelaa jalkapalloa. Kuinka suuri osa koulun oppilaista on jalkapalloilijoita?

Katsotaan, kuinka paljon on $\frac{2}{3}$ luvusta $\frac{4}{5}$, mikä saadaan kertolaskulla $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.

Esitetään urheilevien oppilaiden osuus piirakkadiagrammilla.

Jaetaan ensin jokainen viidesosan kokoinen lohko kolmeen osaan, näitä osia tulee yhteensä $3 \cdot 5 = 15$ kappaletta, käsitellään siis viidestoistaosia koko koulun oppilasmäärästä. Lopputuloksen nimittäjä on siis $3 \cdot 5 = 15$.

Otetaan jokaisesta urheilevia kuvaavasta neljästä lohkosta kaksi palaa, eli yhteensä 8 palaa, jolloin otetaan $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ urheilevien osuudesta. Lopputuloksen osoittajaksi tulee palojen määrä, siis $2 \cdot 4 = 8$.

Lopullisen murtolukuvastauksen nimittäjä saatiin kertomalla nimittäjät keskenään ja osoittaja kertomalla osoittajat keskenään. Vastaus on siis $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

Koulun oppilaista $\frac{8}{15}$ pelaa jalkapalloa.

Tästä saadaan murtolukujen kertolaskun lopullinen sääntö

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Eli osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään.

Harjoitustehtävä 24. Laske ilman laskinta

a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 25. Kuinka paljon on

a) viisi kuudesosaa luvusta 21?
b) kolme viidesosaa luvusta viisi kahdesosaa?
c) kaksi kolmasosaa luvusta yhdeksän kuudestoistaosaa?

Vastaus

Harjoitustehtävä 26. Sukulan perhe sai perinnönjaossa $\frac{5}{12}$ isovanhempien maatilan maista, joita oli yhteensä $6\frac{9}{10}$ hehtaaria. Kuinka monta hehtaaria he perivät maata?

Vastaus

Käänteisluku

Minkä tahansa reaaliluvun, nolla poislukien, käänteisluku muodostetaan jakamalla ykkönen tällä luvulla. Nollalla ei ole käänteislukua.

Esimerkiksi luvun 2 käänteisluku on $\frac{1}{2}$ ja luvun 45 käänteisluku on $\frac{1}{45}$.

Harjoitustehtävä 27. Anna lukujen käänteisluvut ja vastaa perustellusti e-kohdan kysymykseen.
a) 5 b) 30 c) 1 d) -12 e) Miksi nollalla ei ole käänteislukua?

Vastaus

Harjoitustehtävä 28. Selvitä murtolukujen käänteisluvut ohjeen mukaan.

I) Muodosta ensin käänteisluku jakamalla ykkönen kyseisellä luvulla.

II) Lavenna näin muodostunut murtoluku nimittäjän nimittäjällä. Esimerkki:
$$^{3)}\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{3 \cdot \frac{2}{3}}$$

III) Sievennä.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{9}{2}$

Vastaus

Murtoluvun $\left(\frac{a}{b}\right)$ käänteisluku saadaan, kun osoittajan nimittäjän paikat vaihdetaan keskenään.

$$^{b)}\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{\cancel{b} \cdot \frac{a}{\cancel{b}}} = \frac{b}{a}$$

Esimerkiksi luvun $\frac{1}{3}$ käänteisluku on $\frac{3}{1} = 3$ ja luvun $\frac{5}{9}$ käänteisluku on $\frac{9}{5}$.

luku	käänteisluku
a	$\frac{1}{a}$
$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$

Harjoitustehtävä 29. Mitkä ovat lukujen käänteisluvut
a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $2\frac{3}{4}$

Vastaus

Kertolasku ja jakolasku ovat toistensa käänteistoimituksia samoin kuin yhteen- ja vähennyslasku. Esimerkiksi puolet 12 eurosta saadaan toisaalta jakamalla luku 12 luvulla 2, mutta toisaalta myös kertomalla luku 12 luvun 2 käänteisluvulla $\frac{1}{2}$. Kolmasosa 15 keksistä saadaan jakamalla 15 luvulla 3 tai kertomalla luku 15 luvulla $\frac{1}{3}$.

$$12 : 2 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \qquad 15 : 3 = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5$$

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Jakaminen on sama kuin käänteisluvulla kertominen

Murtolukujen jakolasku

Murtolukujen jakolasku lasketaan hyödyntäen periaatetta jakaminen on sama kuin käänteisluvulla kertominen. Jakaja muutetaan käänteisluvuksi ja jakomerkki vaihdetaan kertomerkiksi, minkä jälkeen jatketaan loppuun normaalisti murtolukujen kertolaskun sääntöjen avulla. Katsotaan erilaisia tilanteita, joissa murtoluku on osa jakolaskua.

Katsotaan miten toimii tilanne [murtoluku] : [kokonaisluku].

Millan synttäreillä on tarjolla täytekakkua. Kun kuuden juhlijan seurue saapuu myöhässä, on kakusta jäljellä enää $\frac{3}{8}$. Kuinka suuren palan kukin juhlija saa, jos loput kakusta jaetaan tasan juhlijoiden kesken.

Jaetaan jäljelle jäänyt kakku kuuteen yhtä suureen osaan.

$$\frac{3}{8} : 6 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\cancel{3}^{1}}{8 \cdot \cancel{6}_{2}} = \frac{1}{16}$$

Jokainen myöhästynyt juhlija saa $\frac{1}{16}$ kakusta.

Tästä voidaan muodostaa muistisääntö: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$.

Harjoitustehtävä 30. Laske ilman laskinta

a) $\frac{3}{8} : 3$ b) $\frac{6}{7} : 2$ c) $\frac{7}{4} : 7$ d) $\frac{2}{5} : 4$

Vastaus

Harjoitustehtävä 31. Kilon vehnäjauhopussista oli jäljellä $\frac{18}{25}$ Siitä leivottiin 12 sämpylää. Kuinka paljon jauhoja meni kuhunkin sämpylään?

Vastaus

Katsotaan tilannetta [kokonaisluku] : [murtoluku].

Opetaja on päättänyt palkita parhaiten matematiikan kokeessa menestyneet oppilaat leipomallaan piirakalla, kukin parhaiten menestynyt oppilas saa kaksi kolmasosapalaa. Opettajalla on 4 piirasta mukanaan, kuinka monta parhaiten menestynyttä oppilasta opettaja voi palkita?

Selvitetään, kuinka monta $\frac{2}{3}$-kokoista palaa saa neljästä piiraasta jakamalla 4 luvulla $\frac{2}{3}$.

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Opettaja voi palkita 6 parasta oppilasta.

Huomaa! Tässä tehtävässä hyödynnetään jakolaskun toista periaatetta. Ala-asteella jakolasku opetetaan yleensä periaatteella "kuinka monta kukin saa". Esimerkiksi, keksipaketissa on 12 keksiä, kuinka monta keksiä kukin perheen kolmesta lapsesta saa, jos keksit jaetaan heille tasan? Toinen jakolaskun käyttökohde, jota ei välttämättä kaikille ole opetettu peruskoulussa on "kuinka moneen määrätyn kokoiseen osaan jokin voidaan jakaa". Esimerkiksi, taskussasi on 18 euron kolikkoa, kuinka monta kolmen euron tuoppia voit ostaa taskussasi olevilla rahoilla. Kuinka monta kolmen euron kokoista osuutta on 18 eurossa, saadaan jakamalla 18 kolmella.

Harjoitustehtävä 32. Laske ilman laskinta

a) $4 : \frac{2}{5}$ b) $1 : \frac{4}{7}$ c) $15 : \frac{5}{3}$ d) $6 : \frac{1}{6}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 33. Panimossa valmistettiin 834 litraa olutta. Kuinka monta $\frac{3}{4}$ litran pulloa siitä saatiin myyntiin.

Vastaus

Katsotaan lopuksi tilannetta [murtoluku] : [murtoluku]

Perttu valmisti keräämistään mustikoista mehua $\frac{9}{2}$ litraa. Pertulla on käytössä $\frac{3}{4}$ litran vetoisia pulloja. Kuinka monta pulloa tarvitaan mehun säilömiseen.

Katsotaan kuinka monta kertaa luku $\frac{3}{4}$ menee lukuun $\frac{9}{2}$.

$$\frac{9}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 6$$

Perttu tarvitsee kuusi pulloa mehun säilömiseen.

Murtolukujen jakolaskusta selvitään aina, kun hyödynnetään periaatetta jakaminen on sama kuin käänteisluvulla kertominen.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Muista! Jakolasku ei ole vaihdannainen, joten kun jakaminen muutetaan käänteisluvulla kertomiseksi, pitää käänteisluvuksi muuttaa nimenomaan jakaja, ei koskaan jaettava.

Harjoitustehtävä 34. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$ d) $\frac{9}{10} : \frac{5}{6}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 35. Laske jakolaskut.

a) $2\frac{1}{4} : 3$ b) $12 : 1\frac{3}{5}$ c) $2\frac{5}{8} : 8\frac{3}{4}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 36. Villasukkapariin kuluu $\frac{2}{5}$ kg villalankaa. Kuinka monta sukkaparia saadaan kudottua $7\frac{3}{5}$ kilosta villalankaa?

Vastaus

Lisää harjoitustehtäviä murtoluvuista

37. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{3}{4} - 1$ b) $2\frac{1}{6} + \left(-\frac{3}{8}\right)$ c) $-1\frac{1}{3} - \left(2\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$ d) $2 - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)$

Vastaus

38. Paketissa oli $15\frac{1}{2}$ desilitraa pyykinpesujauhetta. Kuinka paljon jauhetta jää jäljelle, jos siitä käytetään

a) $4\frac{3}{4}$ dl b) $7\frac{1}{2}$ dl c) $13\frac{1}{4}$ dl?

Vastaus

39. Supista murtoluvut (ilman laskinta).

a) $\frac{30}{18}$ b) $\frac{15}{40}$ c) $\frac{714}{21}$ d) $\frac{55}{231}$

Vastaus

40. Juomaan sekoitetaan $\frac{3}{4}$ litraa appelsiinimehua, $\frac{1}{3}$ litraa omenamehua ja $\frac{1}{2}$ litraa vettä. Mahtuuko juoma tyhjään $1\frac{1}{2}$ litran limsapulloon?

Vastaus

41. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{18}{35}$ b) $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$ c) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}$ d) $2\frac{1}{7} \cdot 1\frac{2}{5}$

Vastaus

42. Viiden hengen piirakkareseptin mukaan taikinaan tarvitaan $3\frac{1}{3}$ dl jauhoja Kuinka paljon jauhoja tarvitaan, jos piirakka tehdään kolmelle hengelle?

Vastaus

43. Laske ilman laskinta

a) $\frac{3}{7} + \frac{20}{7} : \frac{1}{3}$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{11}{27}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$ d) $\left(3\frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right) : \frac{21}{20}$

Vastaus

44. Keksipaketissa on 20 keksiä. Mari söi kekseistä $\frac{2}{5}$ ja Riikka jäljelle jääneestä määrästä kolmasosan. Kuinka monta keksiä jäi jaettavaksi muille kavereille?

Vastaus

45. Maisa söi $1\frac{7}{8}$ kilogramman painoisesta kakusta kuudesosan, Paavo jäljelle jääneestä kakusta kaksi viidesosaa ja Laura lopusta kolmasosan. Kuinka paljon kakkua oli vielä syömättä?

Vastaus

46. 12 litraa mansikkamehua säilötään pulloihin. Kuinka monta pulloa tarvitaan, kun pullojen tilavuus on

a) $\frac{2}{3}$ litraa b) $\frac{3}{4}$ litraa c) $1\frac{1}{2}$ litraa?

Vastaus

47. Tiina söi karamelleista yhden neljäsosan, Anu söi kolmasosan ja Katja neljä viidestoistaosaa. Loput annettiin Musti-koiralle. Kuinka suuren osan karamelleista Musti sai?

Vastaus

48. Elsa osti $2\frac{1}{2}$ kg omenoita ja maksoi niistä kolme ja puoli euroa. Mikä oli omenoiden kilohinta?

Vastaus

49. Kahdeksan hengen tonnikalapastaan tarvitaan 160 g tonnikalaa ja 12 dl pastaa. Kuinka paljon tonnikalaa ja pastaa tarvitaan seitsemän hengen annokseen?

Vastaus

50. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{5}{18} \cdot 6$ b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{3}$ c) $\frac{9}{4} \cdot \frac{4}{45}$

d) Kuinka paljon on kolme viidesosaa luvusta $2\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5}$

Vastaus

51. Vintin siivousurakan työt jaettiin aluksi tasan perheen kolmen lapsen kesken. Elisa joutui kuitenkin jättämään työt kesken soittotunnin takia, jolloin Jonna teki puolet ja Iiro viidesosan Elisan osuudesta.

a) Kuinka suuren osan töistä kukin lapsista teki?

b) äiti antoi lapsille siivouspalkkioksi 20 euroa. Kuinka paljon rahaa kukin sai?

Vastaus

52. Ellan valmistujaisjuhlissa on tarjolla boolia, jota hän on valmistettu reseptin mukaan $4\frac{1}{5}$ litraa. Juomassa on $\frac{5}{42}$ vodkaa, $\frac{1}{21}$ kuohuviiniä, $\frac{5}{7}$ spritea ja lisäksi likööriä. Kuinka monta litraa kutakin ainesosaa on? Kuinka suuri osa boolista on likööriä?

Vastaus

53. Milla kiersi $4\frac{4}{5}$ kilometrin ladun kolme kertaa, neljännellä kerralla hän joutui keskeyttämään puolessa välissä rikkoutuneen suksisiteen takia. Kuinka pitkän matkan Milla oli hiihtänyt? Elsa sanoi hiihtäneensä samalla ladulla yhteensä 14 km. Kuinka monta kertaa (kokonaiset ja murto-osat) Elsa oli kiertänyt ladun?

Vastaus

54. Kuinka monta $\frac{2}{5}$ litran pakastusrasiaa tarvitaan, jos pakastettavia marjoja on

a) 1 litra? b) puoli litraa? c) $2\frac{3}{4}$ litraa?

Vastaus

Yhtälönratkaisu

Yhtälönratkaisun perusteet

Kuten kappaleessa lausekeet, yhtälöt ja funktiot opittiin, yhtäläisyysmerkin, =, vasemmalla ja oikealla puolella olevien lukujen on oltava täsmälleen yhtä suuret.

Yhtälönratkaisussa käytetään apuna laskutoimitusten tekemistä puolittain. Tämä tarkoittaa sitä, että yhtälön kummallekin puolelle tehdään sama laskutoimitus. Tällöin yhtälön kummatkin puolet pysyvät yhtä suurina.

katsotaan esimerkkejä. Muodostetaan hyvin yksinkertainen yhtälö $a = b$.

$a = b$		a on yhtä suuri kuin b.
$a = b$	$\|\| + c$	Näin voidaan merkitä laskutoimituksen tekemistä puolittain. Tässä on merkitty, että yhtälön kummallekin puolelle on tarkoitus lisätä luku c.
$a + c = b + c$		Yhtälön molemmat puolet ovat edelleen yhtä suuria, koska ne muuttuivat täsmälleen yhtä paljon.

Lisäesimerkki:

$1 = 1$	$\|\| + 19$	Yhtälöön voidaan lisätä puolittain
$1 + 19 = 1 + 19$		
$20 = 20$		
$20 = 20$	$\|\| - 5$	Yhtälöstä voidaan vähentää puolittain
$20 - 5 = 20 - 5$		
$15 = 15$		
$15 = 15$	$\|\| \cdot 3$	Yhtälö voidaan kertoa puolittain
$15 \cdot 3 = 15 \cdot 3$		
$45 = 45$		
$45 = 45$	$\|\| : 15$	Yhtälö voidaan jakaa puolittain
$45 : 15 = 45 : 15$		
$3 = 3$		
$3 = 3$	$\|\|^4$	
$3^4 = 3^4$		Yhtälö voidaan korottaa puolittain potenssiin
$81 = 81$		

Kaikissa tapauksissa yhtälön oikea ja vasen puoli pysyvät yhtä suurina. Korottamiseen puolittain potenssiin liittyy muutamia erikoissääntöjä tietyissä tilanteissa. Lisäksi yhtälöstä voi ottaa puolittain esim. neliö- tai minkä tahansa muun juuren, tähän liittyy myös erikoissääntöjä. Myös logaritmin (opitaan myöhemmin) voi ottaa puolittain. Koko puolittain laskemis -konseptia voi soveltaa luovasti eri tilanteissa. Esimerkiksi, kun yhtälön kummatkin puolet ovat yhtä suuret, ovat myös niiden käänteisluvut yhtä suuret.

Esimerkki:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{8} \qquad \text{Muutetaan yhtälön puolet käänteisluvuikseen.}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{8}{1}$$

$$x = 8$$

Yhtälönratkaisussa tavoitteena on usein selvittää tuntemattoman luvun suuruus.

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $12 = x + 5$.

Aivan aluksi, jos tuntematon on yhtälön oikealla puolella, on hyvä idea (joskaan ei välttämätöntä) vaihtaa yhtälön oikea ja vasen puoli päittäin.

$$12 = x + 5$$
$$x + 5 = 12$$

Seuraavaksi tavoitteena on muokata yhtälöä siten, että tuntematon jää yksin yhtälön vasemmalle puolelle. Tässä esimerkissä yhtälön vasemmalla puolella on tuntemattomaan lisätty luku viisi. Kumotaan +5 vähentämällä yhtälöstä puolittain 5.

$$x + 5 = 12 \qquad || - 5$$
$$x + 5 - 5 = 12 - 5$$
$$x = 7$$

Koska puolittain tehdyissä laskutoimituksissa yhtälön puolet säilyvät yhtä suurina, päädytään tilanteeseen, jossa tuntemattoman suuruus tulee selkeästi näkyville.

Tarkistetaan vielä, menikö kaikki oikein, eli alkuperäisen yhtälön oikea puoli oli 12, joten vasen puoli pitäisi myös olla 12, kun 7 sijoitetaan x:n tilalle.

$$x + 5 = 7 + 5 = 12$$

Yhtälö on ratkaistu oikein.

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $\frac{2t-5}{7} = 15$

Tuntematon on valmiiksi vasemmalla. Edetään vaiheittain niin, että joka kerta kumotaan vasemmalla laskujärjestyssopimuksen mukaan viimeinen laskutoimitus tekemällä puolittain sen käänteistoimitus.

$\frac{2t-5}{7} = 15$	$\|\| \cdot 7$	Jakoviivalla osoitettu seitsemällä jakaminen on laskujärjestyssopimuksen mukaan viimeisenä. Kumotaan se kertomalla puolittain seitsemällä.
$\frac{2t-5}{\cancel{7}} \cdot \cancel{7} = 15 \cdot 7$		
$2t - 5 = 105$	$\|\| + 5$	Nyt vasemmalla viimeinen laskutoimitus vitosen vähentäminen. Kumotaan se lisäämällä puolittain viisi.
$2t \cancel{-5} \cancel{+5} = 105 + 5$		Huomaa, että lopputulos on sama kuin, jos vitosen olisi vain siirtänyt vasemmalta oikealle ja vaihtanut etumerkin.
$2t = 110$	$\|\| : 2$	Nyt viimeisenä toimituksena vasemmalla on kakkosella kertominen. Kumotaan jakamalla kahdella.
$t = \frac{110}{2}$		
$t = 55$		

Tarkistetaan sijoittamalla $t = 55$ alkuperäisen yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin siitä pitäisi tulla sama kuin oikeasta, eli 15.

$$\begin{aligned}
\frac{2t-5}{7} &= \frac{2 \cdot 55 - 5}{7} && t = 55 \\
&= \frac{110-5}{7} \\
&= \frac{105}{7} && (105 = 21 \cdot 5 = 3 \cdot 7 \cdot 5) \\
&= \frac{3 \cdot 5 \cdot \cancel{7}}{\cancel{7}} \\
&= 15
\end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on myös 15, yhtälö on ratkaistu oikein.

Yhtälönratkaisu on luovaa toimintaa, sitä pitää harjoitella aktiivisesti, jotta siihen kehittyy intuitio. Kaikkia mahdollisia tilanteita ei ole mitenkään mahdollista opiskella kirjoista lyhyessä ajassa. Varaudu siis henkisesti siihen, että joudut soveltamaan kaikkia taitojasi yhtälönratkaisussa.

Harjoitustehtävä 55. Ratkaise tuntematon yhtälöistä.

a) $2a - 5 = 1$ b) $\frac{95-3t}{t} = 2$

Vastaus

Polynomilaskuja 1

Mitä polynomit ovat

Polynomit ovat summalausekkeita. Esimerkiksi lauseke $a + b$ on polynomi. Polynomilausekkeessa summan jäseniä kutsutaan termeiksi.

$$\overbrace{2a}+\overbrace{3b^2}^{\text{termejä}}-\overbrace{28}$$

Termi saattaa koostua useammasta tekijästä. Esimerkiksi yllä olevan esimerkin termi $2a$ koostuu tekijöistä 2 ja a. Termi $3b^2$ koostuu tekijästä 3 ja kahdesta tekijästä b.

Termi	Selitys	Esimerkki
Monomi	Yksiterminen summalauseke	$a, \quad 2h, \quad 3x^2, \quad 10ab$
Binomi	Kaksiterminen summalauseke	$a - b, \quad 2x + 3y, \quad t - 5$
Trinomi	Kolmiterminen summalauseke	$g + h + i, \quad 8x^3 - 9x + 1$
...		
Polynomi	Summalausekkeiden yleisnimitys	Kaikki yllä olevat, $ax^3 + bx^2 + cx + d$

Monomin ja polynomin tulo

Katsotaan, miten saadaan sievennettyä lauseke, joka on muotoa monomi kertaa polynomi. Tee ensin johdantotehtävä ja sen jälkeen katsotaan läpi itse teoria.

Harjoitustehtävä 56. Tiedät, että esimerkiksi

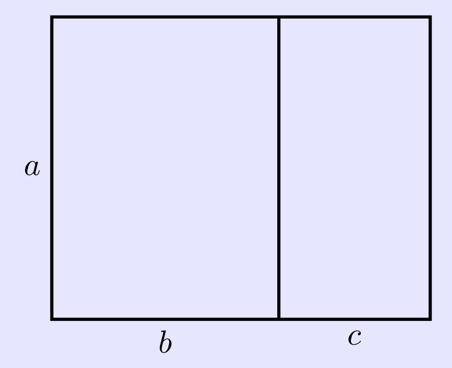
$$2a = a + a \quad \text{ja että} \quad -3x = -x - x - x.$$

Sievennä perustellusti välivaiheittain seuraavat lausekkeet.

a) $2(r+6)$ b) $4(3-7x)$ c) $-3(2-t)$ d) $2(a+3b-5)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 57. Tarkastellaan suorakaidetta, joka on jaettu toisen sivun suuntaisella janalla kahteen osaan. Suorakaiteen korkeus on a ja kannan osien pituudet ovat b ja c.



I) Määritä kannan pituus.

II) Määritä ison suorakaiteen pinta-ala kannan ja korkeuden avulla.

III) Määritä kahden pienemmän suorakaiteen pinta-alat.

IV) Muodosta ison suorakaiteen pinta-ala sen osien summana.

Vastaus

Monomin ja binomin tulo

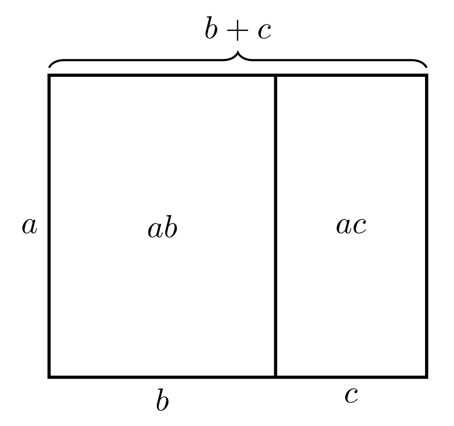
Tarkastellaan lauseketta $a \cdot (b+c)$ ja sen sieventämistä. Tehdään se ensin algebralla.

$$
\begin{aligned}
\overset{\text{kertoja}}{a} \cdot \underset{\text{kerrottava}}{(b+c)} &= \overbrace{(b+c)+(b+c)+...+(b+c)}^{a \text{ kpl.}} \\
&= b+c+b+c+...+b+c && \text{Sulkuja ei tarvita.} \\
&= \overbrace{b+b+...+b}^{a \text{ kpl.}} + \overbrace{c+c+...+c}^{a \text{ kpl.}} && \text{Järjestetään uudelleen.} \\
a(b+c) &= ab+ac && \text{Lyhennetään}
\end{aligned}
$$

Toisaalta, on myös mahdollista vaihtaa kertojan ja kerrottavan rooleja. Tulos pysyy luonnollisesti samana.

$$
\begin{aligned}
(b+c)a &= \overbrace{a+a+...+a}^{b+c \text{ kpl.}} \\
&= \overbrace{a+a+...+a}^{b \text{ kpl.}} + \overbrace{a+a+...+a}^{c \text{ kpl.}} \\
&= ba+ca \\
(b+c)a &= ab+ac
\end{aligned}
$$

Kuten johdantotehtävässä X opittiin, voidaan kaava johtaa myös geometrisesti.



$$a(b+c) = ab+ac$$

Yhteenvetona tässä siis kävi niin, että binomin kummatkin termit kerrottiin monomilla. Yleinen periaate monomi kertaa binomi -tilanteen sieventämiseen on binomin termien kertominen monomilla.

$$a(b+c) = \_(ab+ac) = ab+ac$$

Esimerkkejä monomi-binomi-tulon sievennyksestä:

Esimerkki 1:

$$
\begin{aligned}
2a(1-3a) &= 2a \cdot 1 - 2a \cdot 3a \\
&= 2a - 6 \cdot a \cdot a \\
&= 2a - 6a^2
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2:

$$
\begin{aligned}
(2x+y)xy &= 2x \cdot xy + xy \cdot y \\
&= 2x^2y + xy^2
\end{aligned}
$$

Esimerkki 3:

$$
\begin{aligned}
-4t(5t-2t^2) &= -4t \cdot 5t - (-4t) \cdot 2t^2 \\
&= -4 \cdot 5 \cdot t \cdot t + 4 \cdot 2 \cdot t \cdot t^2 \\
&= -20t^2 + 8t^3 \\
&= 8t^3 - 20t^2
\end{aligned}
$$

Harjoitustehtävä 58. Sievennä lausekkeet.

a) $3(2x+5)$ b) $(t-3)5t$ c) $-3ab(4a-bc)$

Vastaus

Monomin ja polynomin tulo yleisesti

Monomin ja binomin tulo on vain erikoistapaus monomin ja polynomin tulosta. Monomin ja polynomin tulo saadaan samalla periaatteella, eli polynomin jokainen termi kerrotaan monomilla.

$$
\begin{aligned}
a(b_1+b_2+...+b_n) &= \overbrace{(b_1+b_2+...+b_n)+(b_1+b_2+...+b_n)+...+(b_1+b_2+...+b_n)}^{a \text{ kpl.}} \\
&= b_1+b_2+...+b_n+b_1+b_2+...+b_n+...+b_1+b_2+...+b_n \\
&= \overbrace{b_1+b_1+...+b_1}^{a \text{ kpl.}} + \overbrace{b_2+b_2+...+b_2}^{a \text{ kpl.}} + ... + \overbrace{b_n+b_n+...+b_n}^{a \text{ kpl.}} \\
a(b_1+b_2+...+b_n) &= ab_1+ab_2+...+ab_n
\end{aligned}
$$

$$a(b_1+b_2+...+b_n) = \_(ab_1+ab_2+...+ab_n) = ab_1+ab_2+...+ab_n$$

Esimerkkejä polynomien sievennyksestä:

Esimerkki 1:

$$
\begin{aligned}
(5-2b+3a)2a &= 2a \cdot 5 - 2a \cdot 2b + 2a \cdot 3a \\
&= 10a - 4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a \cdot a \\
&= 10a - 4ab + 6a^2
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2:

$$yz(x-2xy+3yz+2z) = xyz - 2xy^2z + 3y^2z^2 + 2yz^2$$

Esimerkki 3:

$$
\begin{aligned}
-5c(5c-2c^2+1+2b) &= -25c^2 + 10c^3 - 5c - 10bc \\
&= 10c^3 - 25c^2 - 5c - 10bc
\end{aligned}
$$

Harjoitustehtävä 59. Sievennä polynomien kertolaskut.

a) $5(2x-5y+12)$ b) $6t(-5t^2-12t+5)$ c) $-ef^2(6e-7f+8e^2-9ef+e^2f)$

Vastaus

Polynomit - jakaminen tekijöihin yhteisten tekijöiden erottamisella

Aiemmin opittiin, että lukujen jakaminen tekijöihin tarkoittaa jonkin luvun ilmaisemista kertolaskuna. Esimerkiksi

$$18 = 2 \cdot 9 \qquad \text{tai} \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Lausekkeen, esimerkiksi polynomin, jakaminen tekijöihin tarkoittaa sen ilmaisemista muiden lausekkeiden ja/tai suureiden kertolaskuna.

Kappaleessa monomin ja polynomin tulo opittiin sieventämään esimerkiksi seuraavat lausekket

$$5(a + 9) = 5a + 45 \qquad \text{ja} \qquad 2a(a + 3b) = 2a^2 + 6ab.$$

Jos lausekkeista olisikin annettu jälkimmäinen muoto ja pitäisi ilmaista ne ensimmäisessä, eli kertolaskumuodossa, turvaudutaan tekijöihin jakamiseen yhteisten tekijöiden avulla.

Harjoitustehtävä 60. Kokeile, pystytkö päättelemään, minkälaisen monomin ja binomin tulosta seuraavat lausekkeet on sievennetty.

a) $3x + 3y$ b) $6t - 12u$ c) $2ab + 10ac$

Vastaus

Polynomilausekkeet, joilla on kaikille termeille yhteisiä tekijöitä, jaetaan tekijöihin erottamalla yhteinen tekijä. Yhteinen tekijä otetaan pois termeistä ja siirretään koko lausekkeen eteen kertojaksi.

Esimerkki: Jaetaan lauseke $4a + 2ac$ tekijöihin.

Etsitään ensin yhteiset tekijät. Jaetaan kummatkin termit tekijöihin ja merkitään, mitkä tekijöistä ovat kummallekin termille yhteisiä.

$$4a + 2ac = 2 \cdot \boxed{2 \cdot a} + \boxed{2 \cdot a} \cdot c$$

Seuraavaksi siirretään yhteiset tekijät lausekkeen eteen kertojaksi.

$$2 \cdot 2a + 2ac = 2a(2\_ + \_c)$$

Näin lauseke saatiin jaettua tekijöihin.

$$4a + 2ac = 2a(2 + c)$$

Muista: kaikilla luvuilla on tekijä 1, esimerkiksi $6 = 6 \cdot 1$ tai $a = 1 \cdot a$.

Vaativampi esimerkki: Jaetaan lauseke $6ax^3 - 9a^2x^2 + 3ax^2$ tekijöihin. Aloitetaan etsimällä yhteiset tekijät.

$$6ax^3 - 6a^2x^2 + 3ax = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x + 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x + 3 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot 1$$

Huomaa, että koska viimeinen termi koostuu vain yhteisistä tekijöistä, lisättiin sinne näkyviin ylimääräinen tekijä 1. Jatketaan siirtämällä yhteiset tekijät lausekkeen eteen kertojaksi.

$$2 \cdot 3ax^2 \cdot x - 3 \cdot 3ax^2 \cdot a + 1 \cdot 3ax^2 = 3ax^2(2\_x - 3\_ax + 1\_)$$

Näin saatiin tämäkin lauseke jaettua tekijöihin.

$$6ax^3 - 9a^2x^2 + 3ax^2 = 3ax^2(2x - 3a + 1)$$

Jos viimeisestä termistä olisi unohdettu sinne jäävä ykkönen, olisi tekijöihin jaettu muoto mennyt pahemman kerran pieleen. Kokeile vaikka. Lauseke $3ax^2(2x - 3a)$ ei auki purettuna enää tuotakaan tehtävän alussa annettua lauseketta.

Joskus voi olla tarpeen järjestää tekijät niin, että esimerkiksi muuttuja tulee viimeiseksi. Seuraavassa esimerkissä ajatellaan, että t on muuttuja ja muut suureet ovat vakioita.

Vielä yksi esimerkki:

$$\begin{aligned} 5akt - 10kt + 30ckt &= 5kt \cdot a - 5kt \cdot 2 + 5kt \cdot 6c \\ &= 5kt(a - 2 + 6c) \\ &= 5k(a - 2 + 6c)t \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 61. Jaa seuraavat polynomit tekijöihin.

a) $2tu - 4t$ b) $4a + 12a^2$ c) $-xy - 5x^2y^2 - 10x^2y$

Vastaus

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälö, jossa on yksi tuntematon ja joka on mahdollista saattaa muotoon $ax = b$ (x on tuntematon), on ensimmäisen asteen yhtälö.

Yhtälö, jossa on kaksi muuttujaa ja joka on mahdollista saattaa muotoon $y = ax + b$ (x ja y ovat muuttujia) on kahden muuttujan ensimmäisen asteen yhtälö.

Jos yhtälön jokainen muuttuja tai tuntematon esiintyy yksistään termin osana, ei siis esimerkiksi korotettuna mihinkään potenssiin, on yhtälö ensimmäisen asteen yhtälö.

Olet jo ratkonut monia yhden tuntemattoman sisältäviä ensimmäisen asteen yhtälöitä murtoluku-, prosenttilaskenta- ja verrannollisuustehtävissä, joten ne ovat jo ennestään tuttuja. Kahden muuttujan ensimmäisen asteen yhtälöä käytetään kuvaamaan kahden suureen välistä lineaarista riippuvuutta, tähän tutustututaan tarkemmin kappaleessa lineaarinen riippuvuus.

Tässä kappaleessa kerrataan ja syvennetään yhtälön muodostamista ja yhtälönratkaisua.

Harjoitustehtävä 62. Ratkaise yhtälöt.

a) $3x = 12$ b) $x + 6 = 2$ c) $2t + 7 = 11$

d) $\frac{a}{3} + 1 = 6$ e) $\frac{3y}{2} + 6y = -20$ f) $42 - 5h = \frac{h}{4}$

Vastaus

Lisätehtäviä yhtälöistä ja lausekkeista

63. DVD-elokuvia myytiin alennuksella $6,40$ euron hintaan. Vesa huomasi, että seitsemän elokuvaa maksoi nyt saman verran kuin neljä elokuvaa ilman alennusta. Mikä oli alentamaton hinta?

Vastaus

64. Kun jaakko oli syönyt viidesosan ja Pentti kaksi kolmasosaa maapähkinöistä, muille jäi 44 pähkinää. Kuinka monta pähkinää Jaakko söi ja kuinka monta söi Pentti?

Vastaus

65. Kuinka pitkä matka pitää ajaa, jotta keskinopeuden nostaminen nopeudesta 80 km/h nopeuteen 85 km/h lyhentäisi ajoaikaa viisitoista minuuttia?

Vastaus

66. Tyytyväinen autoilija: ”Bensiinin litrahinta on viime viikosta laskenut 16 senttiä niin, että tänään maksoin 55 litrasta tasan neljä euroa vähemmän kuin viime viikolla 51 litrasta.” Mikä on uusi litrahinta?

Vastaus

67. Olipa kerran talonpoika. Talonpoika osti markinoilta kanoja. Palatessaan kotiin hän joutui kulkemaan kolmen tulliaseman kautta. Kullakin tulliasemalla hän joutui luovuttamaan tullina kolmanneksen hallussaan olevista kanoista, mutta lohdutukseksi joka asemalla yksi luovutetuista kanoista palautettiin takaisin. Kotiin päästyään hänellä oli 11 kanaa. Kuinka monta kanaa talonpojalla oli alun perin? (amk TELI 2007k/6, muokattu)

Vastaus

Prosenttilaskenta

Prosentin määritelmä

Prosentti on sadasosa.

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Prosentti on vakiintunut tapa ilmaista suhdelukuja. Lisäksi on harvemmin käytetty promille, joka on määritelmällisesti yksi tuhannesosa.

$$1\ ‰ = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Esimerkiksi kolme prosenttia tarkoittaa samaa kuin kolme sadasosaa.

$$3\ \% = \frac{3}{100} = 0,03$$

Prosentteja käytetään desimaali- ja murtolukujen ohella ilmaisemaan mm. suhteita, suhteellista muutosta, todennäköisyyksiä ym.

Sana prosentti (englanniksi percent) tulee latinan sanasta *per centum*, eli sataa kohden tai *pro centum*, sadasta.

Desimaali- ja murtoluvun muuttaminen prosentiksi

Desimaaliluvut muutetaan prosenteiksi siirtämällä pilkkua kaksi kertaa oikealle. Esimerkiksi

$$0,19 = 19\ \% \quad \text{tai} \quad 4,971 = 497,1\ \%.$$

Murtoluvut kannattaa muuttaa ensin desimaaliluvuksi (esimerkiksi jakokulmassa) ja siitä prosenteiksi. Joissakin tapauksissa murtoluvun saa muutettua prosenteiksi intuitiivisesti. Kolmas-, neljäs- ja viidesosat kannattaa opetella muuttamaan desimaaliluvuiksi ja prosenteiksi päässä. 20-osat saa muutettua sadasosiksi laventamalla viidellä, 25-osat laventamalla neljällä ja 50-osat laventamalla kahdella. Esimerkkejä:

$$^{4)}\frac{18}{25} = \frac{72}{100} = 72\ \% \quad \text{tai} \quad ^{2)}\frac{61}{50} = \frac{122}{100} = 122\ \%.$$

Prosenttien muuttaminen desimaaliluvuksi ja päin vastoin pitää opetella täysin automaattiseksi, lukiotasolla siihen ei pitäisi kulua yhtään ylimääräistä miettimisaikaa.

Harjoitustehtävä 68. Muunna desimaaliluvut prosenteiksi.

a) 0,98 b) 0,3 c) 0,02 d) 1,23 e) 2 f) 0,005

Vastaus

Harjoitustehtävä 69. Muunna murtoluvut desimaaliluvuksi ja prosentiksi.

a) $\frac{73}{100}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{14}{25}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{33}{40}$ f) $\frac{6}{5}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 70. Nuorten lentopalloleirillä neljäsosa leiriläisistä asui teltoissa, kaksi viidesosaa mökeissä, kahdeksasosa leirikeskuksessa, loput kävivät leirillä kotoaan. Kuinka monta prosenttia asui

a) teltoissa
b) mökeissä
c) leirikeskuksessa
d) kävi leirillä kotoaan?

Vastaus

Prosentin muuttaminen murto- ja desimaaliluvuksi

Prosentit muutetaan murtoluvuksi yksinkertaisesti merkitsemällä nimittäjäksi 100 ja supistamalla. Desimaaliluvuksi prosentit muutetaan siirtämällä pilkkua kaksi kertaa vasemmalle.

Esimerkkejä prosentin ja promillen muuttamisesta desimaali- ja murtoluvuksi.

prosentti	desimaaliluku	murtoluku
32%	$0,32$	$\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$
145%	$1,45$	$\frac{145}{100} = \frac{29}{20}$
$12,8\%$	$0,128$	$^{10)}\frac{12,8}{100} = \frac{128}{1000} = \frac{16}{125}$
948‰	$0,948$	$\frac{948}{1000} = \frac{237}{250}$

Prosentin muuttaminen desimaaliluvuksi on hyvä osata lennosta. Jos muunnokseen kuluu yli puoli sekuntia, pitää taitoa vielä harjoitella.

Harjoitustehtävä 71. Muunna desimaaliluvuksi ja murtoluvuksi.

a) 7% b) 85% c) $0,28\%$ d) 90% e) 204% f) 24‰

Vastaus

Harjoitustehtävä 72. Muunna desimaaliluvuksi ja murtoluvuksi.

a) Muunna prosentiksi $2\frac{4}{5}$
b) Muunna prosentiksi, pyöristä prosentin sadasosan tarkkuuteen.
i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{2}{3}$
c) Muunna promilleksi ja murtoluvuksi $1,2\ \%$
d) Muunna prosentiksi ja murtoluvuksi 8 ‰
e) Muunna prosentiksi $3,5$
f) Muunna desimaali- ja murtoluvuksi 86 %

Vastaus

Prosenttilaskennan perusyhtälö

Jos kysytään, kuinka monta prosenttia b on a:sta, kysytään näiden välistä suhdelukua, $\frac{b}{a}$, mutta ilmoitetaan se murtoluvun tai desimaaliluvun sijaan prosentteina.

Prosenttilaskennan perusyhtälö on muotoa

$$p = \frac{b}{a}.$$

Tässä a on se, mihin verrataan, nk. perusarvo. b on se, mitä verrataan, nk. prosenttiarvo tai vertailuarvo. p on näiden välinen suhdeluku, nk. prosenttiosuus.

Prosenttiosuuden laskeminen

Esimerkki: kuinka monta prosenttia on luku 14 luvusta 25?

Prosenttiosuus voidaan laskea suoraan:

$$\frac{14}{25} = 0,48 = 48~\%,$$

tai voidaan sijoittaa luvut $a = 14$ ja $b = 25$ prosenttilaskennan perusyhtälöön ja laskea p.

$$\begin{aligned} p &= {}^{4)}\frac{14}{25} \\ p &= \frac{48}{100} \\ p &= 48~\% \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 73. Kuinka monta prosenttia on

a) luku 18 luvusta 30?

b) 12 minuuttia tunnista?

c) 150 euroa 1250 eurosta?

d) luku 260 luvusta 125?

e) 49 g painoinen kakunpala 980 g kakusta?

Vastaus

Harjoitustehtävä 74. Jaana sai kesätöistä palkkaa 1800 €. Tienesteistään hän käytti 1200 euroa mopoon ja 360 euroa tietokoneeseen. Loput hän pani säästöön. Kuinka suuren osan kesätyöpalkasta hän käytti mopoon ja tietokoneeseen ja kuinka suuren osan hän säästi? Anna vastaus murtolukuna ja prosentteina.

Vastaus

Prosenttiarvon selvittäminen

Eli se, kuinka paljon on x prosenttia luvusta a. Tämäkin voidaan tehdä joko suoraan tai prosenttilaskennan perusyhtälön avulla.

Murtolukulaskennan yhteydessä opittiin laskemaan esimerkiksi $\frac{3}{4}$ luvusta 60. Tämä selvisi kertomalla luku 60 luvulla $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$$

Jos pitäisi selvittää, kuinka paljon on 25 % luvusta 60, selvitetään se samalla tavalla, eli kertomalla 60 prosentilla. Prosentin voi muuttaa desimaali tai murtoluvuksi.

$$25~\% \cdot 60 = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15 \quad \text{tai} \quad 25~\% \cdot 60 = 0,25 \cdot 60 = 15$$

Sama voidaan selvittää myös prosenttilaskennan perusyhtälöstä.

Esimerkki: Kuinka paljon on 18 % luvusta 450?

Jokin luku b on $p = 18~\%$ luvusta $a = 450$. Sijoitetaan luvut perusyhtälöön ja ratkaistaan b.

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{a} \\ 18~\% &= \frac{b}{450} && || \cdot 450 \\ b &= 0,18 \cdot 450 \\ b &= 81 \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 75. Kuinka paljon on

a) 22% luvusta 50?

b) 30% 300 eurosta?

c) 150% luvusta 30?

d) 25% luvusta 5?

Vastaus

Harjoitustehtävä 76. Silli sisältää 18% rasvaa, 14% proteiinia ja 9,6% hiilihydraatteja. Kuinka paljon kutakin ravintoainetta on 350 grammassa perattua silliä.

Vastaus

Perusarvon ratkaiseminen

Joskus tiedetään, kuinka paljon on x prosenttia luvusta b ja pitäisi selvittää luku b.

Esimerkki: Määritä luku a, kun tiedetään, että 85 % siitä on 153.

Muodostetaan prosenttilaskennan perusyhtälö.

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{a} \\ 85~\% &= \frac{153}{a} && || \cdot a \\ 0,85a &= 153 && || : 0,85 \\ a &= \frac{153}{0,85} \\ a &= 180 \end{aligned}$$

15 % voisi muuttaa myös murtoluvuksi, tällöin kannattaa jakamisen sijaan kertoa käänteisluvulla.

$$\begin{aligned} \frac{\overset{17}{\cancel{85}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} &= \frac{24}{a} && || \cdot a \\ \frac{17}{20} \cdot a &= 24 && || \cdot \frac{20}{17} \\ a &= \frac{20}{\cancel{17}} \cdot \overset{9}{\cancel{153}} \\ a &= 180 \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 77.

a) 25% luvusta c on 12. Määritä c.

b) 976 on 8% luvusta h. Laske h:n suuruus.

Vastaus

Harjoitustehtävä 78. Tuomaksen tuloveroprosentti oli koko vuodelta 26%. Kyseisenä vuonna hän maksoi tuloveroa 5993 euroa. Kuinka suuret olivat Tuomaksen nettotulot?

Vastaus

Vertailu- ja muutosprosentti

Osioissa prosentin määritelmä ja prosenttilaskennan perusyhtälö käsiteltiin vain vertailuprosenttia, eli verrattiin kahta lukua suoraan toisiinsa. Joskus on tarpeen tarkastella muutosta tai eroa. Esimerkiksi, kuinka monta prosenttia a on suurempi kuin b, tai lukua t alennetaan n-prosenttia. Monissa tilanteissa on helpointa laskea vertailuprosentti muutosprosentista ja laskee loppuun aiemmin opituilla prosenttilaskennan taidoilla. Joskus voidaan laskea myös suoraan absoluuttisen muutoksen avulla. Katsotaan kumpaakin tapaa johdantotehtävissä.

Harjoitustehtävä 79. Hammastahnatuubin tilavuutta kasvatettiin 240 millilitrasta 300 millilitraan.

a) Kuinka monta millilitraa tuubin tilavuutta kasvatettiin?
b) Kuinka monta prosenttia tilavuuden lisäys on vanhasta tilavuudesta?
c) Kuinka monta prosenttia uusi tilavuus on vanhasta?
d) Miten laskemasi prosentit näyttävät liittyvän toisiinsa?

Vastaus

Harjoitustehtävä 80. Halpuuttamisen johdosta lakkahillopurkin hinta aleni $6,20$ eurosta $5,27$ euroon.

a) Kuinka monta euroa alennus oli?
b) Kuinka monta prosenttia alennus on alkuperäisestä hinnasta?
c) Kuinka monta prosenttia uusi hinta on alkuperäisesti hinnasta?
d) Mitä yhteistä laskemillasi prosenteilla näyttäisi olevan?

Vastaus

Vertailuprosentti ilmaisee, kuinka monta prosenttia luku b on luvusta a. Yllä olevissa tehtävissä laskettiin myös muutosprosentti. Muutosprosentti ilmaisee kuinka monta prosenttia b on suurempi tai pienenmpi kuin a. Tärkeintä on hahmottaa vertailu- ja muutosprosentin välinen yhteys ja osata muuttaa ne toisikseen (mielellään päässä).

Vertailuprosentti muunnetaan muutosprosentiksi kahdella eri tavalla riippuen sen suuruudesta. Jos vertailuprosentti on yli 100 %, eli kun vertailuarvo on suurempi kuin perusarvo, vähennestään vertailuprosentista sata prosenttia. Jos vertailuprosentti on pienempi kuin 100 %, jolloin vertailuarvo on pienempi kuin perusarvo, vähennetään vertailuprosentti sadasta prosentista (alla tapa 1).

Vaihtoehtoisesti voit laskea muutosprosentin aina vähentämällä vertailuprosentin sadasta prosentista. Näin saadun prosentin etumerkki kertoo muutoksen/eron suunnan (alla tapa 2).

Esimerkki: Uuden pakastimen tilavuus on $1,9$-kertainen vanhaan verrattuna, eli 190 % vanhasta. Kuinka monta prosenttia suurempi on uuden pakastimen tilavuus kuin vanhan?

Uuden pakastimen tilavuus on $90\ \% - 100\ \% = 90\ \%$ isompi. (tavat 1 ja 2)

Toinen esimerkki: Osakkeen arvo romahti 37 prosenttiin edellispäivän arvosta. Kuinka monta prosenttia osakkeen arvo pieneni?

Osakkeen arvo pieneni $100\ \% - 37\ \% = 63\ \%$. (tapa 1)

Arvon muutos: $37\ \% - 100\ \% = -63\ \%$, eli osakkeen arvo pieneni 63 %. (tapa 2)

Muutosprosentti muunnetaan vertailuprosentiksi lisäämällä tai vähentämällä se sadasta prosentista.

Esimerkki: Uuden auton hintaa alennettiin 20 %. Kuinka monta prosenttia uusi hinta on vanhasta?

Uusi hinta on $100\ \% - 20\ \% = 80\ \%$ vanhasta.

Esimerkki: Maustetehtaan henkilöstön määrää kasvatettiin 14 %. Kuinka monta prosenttia uusi henkilöstämäärä on vanhasta?

Uusi henkilöstömäärä on on $100\ \% + 14\ \% = 114\ \%$ vanhasta.

Muutos- ja vertailuprosenttien määrittäminen toisistaan kannattaa opetella tekemään päässä sujuvasti.

Harjoitustehtävä 81.

a) Osakkeen arvo laski 8%. Kuinka monta prosenttia osakkeen uusi arvo oli vanhasta.
b) Yrityksen liikevaihto kasvoi 50%. Kuinka monta prosenttia uusi liikevaihto oli vanhaan nähden.
c) Helsingin ilman pienhiukkaspitoisuus oli erään syyskuun alussa 58% toukokuun alun pitoisuudesta. Kuinka monta prosenttia pienhiukkaspitoisuus oli laskenut?
d) Uudistusten johdosta tehtaan tuotantokapasiteettia saatiin nostettua 146 prosenttiin alkuperäisestä. Kuinka monta prosenttia suurempi oli uusi tuotantokapasiteetti?.

Vastaus

Harjoitustehtävä 82. Maatila omista kaksi lehmää. Mustikki tuotti vuodessa 4680 litraa maitoa ja Heluna 3900 litraa. Kuinka monta prosenttia enemmän Mustikki tuotti maitoa kuin Heluna. Kuinka monta prosenttia vähemmän Heluna tuotti maitoa kuin Mustikki.

Vastaus

Luvun korottaminen tai alentaminen jollakin prosenttimäärällä voidaan tehdä vertailu- tai muutosprosentin avulla. Laskimella ja monimutkaisissa laskuissa on helpompi laskea vertailuprosentin avulla. Päässä on kuitenkin joskus helpompi laskea vertailuprosentin avulla. Katsotaan kahdessa seuraavassa tehtävässä kumpaakin tapaa.

Harjoitustehtävä 83. Jarkon kuukausipalkka oli 2170 €. Jarkko sai ylennyksen ja 10 % palkankorotuksen.

Laske Jarkon uusi nettopalkka kahdella tavalla:

I) Laske ensin palkankorotuksen suuruus ja lisää se vanhaan nettopalkkaan.
II) Mieti, miten tämän saisi laskettua yhdellä kertolaskulla. Eli millä luvulla alkuperäinen palkka pitäisi kertoa? (Vihje: Alkuperäinen palkka on 100 % ja siihen lisätään 10 %.)

Vastaus

Harjoitustehtävä 84. Autonvalmistaja jäi kiinni huijauksesta päästötesteissä ja joutui sen seurauksena muuttamaan erään automallin moottorin ohjelmointia. Uudelleenohjelmoinnin seurauksena tehokkaimman, 175 kilowattia tuottavan, moottorin huipputeho laski 16 %.

Laske moottorin uusi huipputeho kahdella tavalla.

I) Laske ensin moottorin tehon muutos ja vähennä se alkuperäisestä.
II) Mieti, miten tämän saisi laskettua yhdellä kertolaskulla. Eli millä luvulla alkuperäinen teho pitäisi kertoa? (Vihje: kuinka monta prosenttia jostakin jää jäljelle kun siitä otetaan pois 16 %.)

Vastaus

Jos tiedetään muutosprosentti ja uusi/muuttunut määrä, voidaan alkuperäinen selvittää niin, että lasketaan ensin vertailuprosentti ja ratkaistaan perusarvo prosenttilaskennan perusyhtälöstä.

Harjoitustehtävä 85. Pentti ja Sara poimivat herkkutatteja. Päivän lopussa Pentin saalis oli $7,2$ kg, mikä oli 20% enemmän kuin Saran saalis. Kuinka paljon Sara poimi tatteja?

Vastaus

Harjoitustehtävä 86. Maatilalla on maita yhteensä 323 hehtaaria. 50 vuotta sitten maatila oli isompi, mutta siitä myytiin 32% rakennuskäyttöön. Kuinka suuri maatila oli ennen vanhaan.

Vastaus

Harjoitustehtävä 87.

a) Kasvata lukua 1825 8 prosenttia.
b) Pienennä lukua 1080 15 prosenttia.

Vastaus

Harjoitustehtävä 88. Kodinkoneliike alensi 450 euroa maksavan taulutelevision hintaa 30%. Mikä oli uusi hinta?

Vastaus

Harjoitustehtävä 89. Makeistuottaja mainosti kasvattaneensa nallekarkkipussin painoa 15% 184 grammaan. Kuinka paljon nallekarkkipussi painoi ennen muutosta?

Vastaus

Prosenttien vertaaminen ja prosenttiyksikkö

Prosenttiyksiköllä tarkoitetaan osuutta viiteryhmästä. Muutoksia voidaan ilmaista joskus sekä prosentteina että prosenttiyksiköinä.

Esimerkki 1: Suomen työttömyysaste oli vuoden 2000 alussa 10 % ja vuoden 2010 alussa 8 %.

Työttymyysasteen muutoksen voi tässä ilmaista kahdella tavalla. Prosenttiyksiköinä tai prosentteina. Aiemmin opittiin, että muutos prosentteina voidaan selvittää kahdella tavalla. Joko selvitetään ensin vertailuprosentti ja sen perusteella lasketaan muutosprosentti

$$\frac{0,08}{0,10} = 0,80 \qquad 1 - 0,80 = 0,20 = 20\ \%$$

tai selvitetään ensin muutos ja selvitetään, montako prosenttia se on alkuperäisestä

$$10\ \% - 8\ \% = 2\ \% \qquad \frac{0,02}{0,10} = 0,20 = 20\ \%$$

Työttömyysaste on siis pienentynyt 20 %. Mutta jälkimmäisessä tavassa tuli esille luku 2 %, joka saatiin vähentämällä työttömyysasteet toisistaan. Tätä, työttömyysasteen prosenttiluvun absoluuttista muutosta kutsutaan prosenttiyksiköksi.

Jos vielä työväestön määrä olisi suunnilleen sama koko aikana, voitaisiin työttömien määrän muutos laskea joko prosenttiyksikön avulla tai muutosprosentin avulla. Jos lasketaan muutosprosentin avulla, pitäisi laskea 20 % vanhasta työttömien määrästä. Jos kuitenkin laskettaisiin prosenttiyksikön avulla, pitäisi laskea 2 % koko työväestön määrästä. Prosenttiyksikkö siis kertoo muutoksen ”isossa viitekehyksessä”, tässä tapauksessa työväestössä. Muutosprosentti kertoo muutoksen työttömien joukossa.

Harjoitustehtävä 90. Vuonna 2013 arvonlisävero nostettiin Suomessa 23 prosentista 24 prosenttiin.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä arvonlisävero muuttui?

b) Kuinka monta prosenttia arvonlisävero muuttui?

Vastaus

Potenssilaskuja 1

Tässä kappaleessa tutustutaan tärkeisiin potenssien laskusääntöihin. Niitä käytetään esimerkiksi lausekkeiden sieventämiseen ja muokkaamiseen mukavampaan muotoon. Tässä kappaleessa on hyvin vähän sanallisia tehtäviä, mutta myöhemmissä kappaleissa tulee vastaan sanallisia tehtäviä, joita tehdessä tämän kappaleen asioiden hallinnasta on paljon hyötyä. Tämän kappaleen asioiden osaaminen auttaa myös tulevien kappaleiden teorioiden omaksumisessa.

Tee ensin seuraava harjoitustehtävä, jotta saat intuitiota potenssilaskujen pyörittelyyn.

Tiedät, että

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ kappaletta}}.$$

Tiedät myös, että jos jakoviivan ylä- ja alapuolella on vain kertolaskua, voit supistaa yhteiset tekijät. Esimerkiksi

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot b}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{a}} = \frac{2b}{5}.$$

Näitä tietoja hyväksi käyttäen sievennä seuraavat potenssilaskut, aloita aina purkamalla potenssit kertolaskuksi.

Harjoitustehtävä 91. Sievennä potenssilausekkeet (ilman laskinta).

a) $\frac{9^7}{9^5}$ b) $\frac{a^2b^3}{ab^4}$ c) $\frac{(12^2)^3}{12^3 \cdot 12^4}$ d) $\frac{(qr)^4}{q^3r^4}$ e) $\left(\frac{g}{h}\right)^2 \cdot h^4$

Vastaus

Potenssien kertolasku

Potenssien kertolaskussa voi tulla vastaan kahdenlaisia tilanteita. Joko kantaluku on sama $(k^a \cdot k^b)$ tai eksponentti on sama $(a^n \cdot b^n)$. Opetellaan kumpaankin tilanteeseen liittyvät laskusäännöt.

Sama kantaluku

Harjoitellaan ensin samankantaisten potenssilausekkeiden sieventämistä intuition avulla ja sen jälkeen käydään läpi yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 92. Sievennä lausekkeet ohjeen mukaan.

I) Pura kummatkin potenssit kertolaskuksi. Huomaa, että koska kertominen on vaihdannainen laskutoimitus, ei mitään tarvitse merkitä sulkeisiin

II) Muuta koko kertolasku yhdeksi potenssilausekkeeksi.

a) $x^3 \cdot x$ b) $c^3 \cdot c^5$ c) $a^4 \cdot a^2$

Vastaus

Harjoitustehtävä 93. Potenssilaskun, jossa eksponentti on tuntematon, voi purkaa auki esimerkiksi näin: $6^n = \overbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}^{n \text{ kpl.}}$.

Selvitä, kuinka monta kertaa vitonen on kerrottuna itsellään laskussa

$$5^a \cdot 5^b.$$

Vastaus

Potenssit, joilla on sama kantaluku, kerrotaan keskenään seuraavasti.

$$k^a \cdot k^b = \underbrace{\overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{a \text{ kpl}} \cdot \overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{b \text{ kpl}}}_{\text{yhteensä } a+b \text{ kpl}}$$

$$\boxed{k^a \cdot k^b = k^{a+b}}$$

Eksponentit lasketaan yhteen, yhteinen kantaluku säilyy muuttumattomana. Sama sääntö toimii siis hyvin myös tilanteissa, joissa on monta samankantaista potenssilaskua kerrottuna keskenään.

Esimerkki: Sievennetään lauseke $u^5 \cdot u^2 \cdot u^3$.

$$u^5 \cdot u^2 \cdot u^3 = u^{5+2+3} = u^{10}$$

Harjoitustehtävä 94. Sievennä samankantaisten potenssien kertolaskun muistikaavan avulla.

a) $d^{12} \cdot d^{15}$ b) $x^6 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x$

Vastaus

Sama eksponentti

Haetaan taas intuitiota harjoitustehtävien avulla ja katsotaan lopuksi läpi teoria.

Harjoitustehtävä 95. Sievennä lausekkeet ohjeen mukaan.

I) Pura kummatkin potenssit kertolaskuksi.

II) Järjestele kertolaskun tekijät xy-pareiksi. Muista, että kertolaskun tekijöiden paikkaa voi vaihtaa vapaasti.

III) Kuinka monta xy-paria kertolaskussa esiintyy? Muuta kertolasku yhdeksi potenssilausekkeeksi.

a) $a^2 \cdot b^2$ b) $x^5 \cdot y^5$

Vastaus

Harjoitustehtävä 96. Sievennä lausekkeet
a) $2^a \cdot 3^a$ b) $12^n \cdot 5^n$ c) $20^t \cdot 20^t$

Vastaus

Potenssit, joilla on sama eksponentti, kerrotaan keskenään siten, että kantaluvut kerrotaan keskenään ja yhteinen eksponentti säilyy.

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ kpl.}} \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b \\ &= \overbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}^{n \text{ kpl. } ab\text{-pareja}} \end{aligned}$$

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Jos kertolaskussa esiintyy monta potenssilaskua, joilla on kaikilla sama eksponentti, voidaan ne yhdistää kerralla.

Esimerkki: Sievennetään lauseke $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$.

$$a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (abc)^3$$

Harjoitustehtävä 97. Sievennä potenssilausekkeet muistikaavalla.

a) $2^x \cdot 6^x$ b) $b^{12} \cdot e^{12}$ c) $6^t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Vastaus

Samankantaisten potenssien jakolasku

Katsotaan ensin, miten toimii samankantaisten potenssien jakolasku. Harjoitellaan ensin ilman kaavoja ja katsotaan lopuksi yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 98. Sievennä/laske lausekkeet ohjeen mukaan.

I) Pura potenssit kertolaskuksi

II) Supista yhteiset tekijät

a) $\frac{18^3}{18}$ b) $\frac{155^5}{155^4}$ c) $\frac{c^5}{c^2}$ d) $\frac{h^2}{h^3}$ e) $\frac{12^3}{12^5}$ f) $\frac{z^3}{z^7}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 99. Potenssilaskun voi jakaa useamman potenssilaskun tuloksi esimerkiksi seuraavasti.

$$a^6 = a^2 \cdot a^4$$

Hyödynnä tätä tietoa ja sievennä seuraavat potenssilaskut.

a) $\frac{z^{52}}{z^{30}}$ b) $\frac{e^{12}}{e^{40}}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 100. Monta kertaa luku kuusi esiintyy seuraavassa laskussa, kun se ensin sievennetään?

$$\frac{6^a}{6^b}, \quad \text{kun } a > b$$

Vastaus

Samankantaisten potenssien jakolaskulle voidaan johtaa yleinen kaava.

$$\begin{aligned}\frac{k^a}{k^b} &= \frac{\overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{a \text{ kpl.}}}{\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{b \text{ kpl.}}} \qquad \text{Tehdään tässä oletus } a > b \\ &= \frac{\overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{a-b \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{\cancel{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}}^{b \text{ kpl.}}}{\underbrace{\cancel{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}}_{b \text{ kpl.}}} \\ &= \overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{a-b \text{ kpl.}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{k^a}{k^b} = k^{a-b} \qquad \text{kun } a > b}$$

Toisaalta, jos $b > a$, voidaan toimia seuraavasti.

$$\begin{aligned}\frac{k^a}{k^b} &= \frac{\overbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}^{a \text{ kpl.}}}{\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{b \text{ kpl.}}} \qquad \text{Tehdään tässä oletus } b > a \\ &= \frac{\overbrace{\cancel{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}}^{a \text{ kpl.}}}{\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{b-a \text{ kpl.}} \cdot \underbrace{\cancel{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}}_{a \text{ kpl.}}} \\ &= \frac{1}{\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{b-a \text{ kpl.}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{k^a}{k^b} = \frac{1}{k^{b-a}} \qquad \text{kun } b > a}$$

Kummatkin kaavat toimivat oikein, vaikka eksponenttien suuruudet olisivat toisin päin kuin yllä on oletettu. Tällöin esimerkiksi laskusta

$$\frac{5^7}{5^{10}}$$

tulee ylemmällä kaavalla

$$5^{7-10} = 5^{-3},$$

mikä on täysin oikea tulos. Kappaleessa negatiivinen eksponentti opitaan laskemaan potenssilaskuja, joissa eksponentti on miinusmerkkinen luku. Hyvä laskija voi kuitenkin jo nyt päätellä, mikä on laskun 5^{-3} vastaus.

Harjoitustehtävä 101. Sievennä lausekkeet tai laske.

a) $\frac{a^{12}}{a^{34}}$ b) $\frac{5^{17}}{5^{14}}$ c) $\frac{5^{32}x^{128}y^{120}}{(5x)^{24}(xy)^{112}}$ d) $\frac{2^{23}}{2^{30}}$

Vastaus

Potenssien jakolasku, sama eksponentti

Harjoitellaan potenssien jakolaskun käsittelyä ensin harjoitustehtävien avulla ja katsotaan lopuksi yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 102. Sievennä lausekkeet tai laske.

Kun eksponentti on tuntematon, voit merkitä esimerkiksi: $2^n = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ kpl.}}$

Huomaa, että myös c- ja d-kohdissa osoittajassa ja nimittäjässä on yhtä monta tekijää.

a) $\dfrac{57^4}{19^4}$ b) $\dfrac{9^3}{36^3}$ c) $\dfrac{8^a}{2^a}$ d) $\dfrac{3^c}{18^c}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 103. Laske seuraavat potenssilaskut ilman laskinta. Aloita purkamalla potenssi kertolaskuksi.

a) $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

Vastaus

Harjoitustehtävä 104. Käytä hyväksesi edellisissä tehtävissä opittuja taitoja ja muuta lauseke $\dfrac{e^3}{f^3}$ murtoluvun potenssiksi.

Vastaus

Harjoitustehtävä 105. Erottele eksponentti erikseen osoittajan ja nimittäjän eksponentiksi. Eli tee edellisen tehtävän vaiheet käänteisessä järjestyksessä.

$$\left(\frac{r}{t}\right)^4$$

Vastaus

Potenssien jakolasku $\dfrac{a^n}{b^n}$ voidaan yhdistää yhden eksponentin alle $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ tai päin vastoin, jakolaskun yhteinen eksponentti voidaan erotella jaettavan ja jakajan omiksi eksponenteiksi. Alla perustelu kaavalle.

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{b^n} &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ kpl.}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ kpl.}}} \\ &= \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \frac{a}{b}}^{n \text{ kpl.}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

Potenssin potenssi

Katsotaan, miten potenssin potenssi $(k^a)^b$ saadaan purettua auki. Haetaan ensin intuitiota harjoitustehtävien avulla ja katsotaan lopuksi yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 106. Sievennä seuraavat potenssilausekkeet ilman laskinta.

a) $(k^2)^3$ b) $(t^5)^2$ c) $(a^6)^5$

Vastaus

Harjoitustehtävä 107. Kuinka monta kertaa luku 8 esiintyy kertolaskussa. $(8^a)^b$?

Katso tarvittaessa mallia edellisen tehtävän c-kohdasta.

Vastaus

Potenssin potenssi voidaan sieventää siten, että eksponentit kerrotaan keskenään. Toisaalta eksponenttien kertolasku voidaan tarvittaessa muuttaa potenssin potenssiksi.

$$\begin{aligned}(a^b)^c &= \overbrace{a^b \cdot a^b \cdot \ldots \cdot a^b}^{c\text{ kpl}} \\ &= \left.\begin{array}{l} \overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{b\text{ kpl}} \\ \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \\ \cdot \ldots \\ \cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\end{array}\right\} \begin{array}{l} c\text{ kpl} \\ \text{yhteensä } b\cdot c \text{ kpl } a\text{:ta}\end{array}\end{aligned}$$

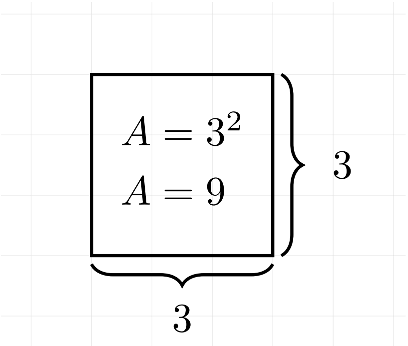
$$\boxed{(a^b)^c = a^{b\cdot c}}$$

Juurilaskut

Neliöjuuri

Neliöjuuri on määritelmällisesti toiseen potenssiin korottamisen käänteistoimitus. Muistetaan, että jos neliön sivun pituus tiedetään, saadaan sen pinta-ala korottamalla sivun pituus potenssiin kaksi.

Esimerkiksi neliön, jonka sivun pituus on 3, pinta-ala saadaan laskemalla $3^2 = 9$.

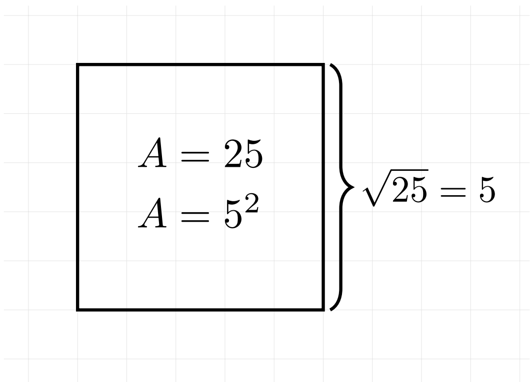


Jos käykin niin päin, että neliön pinta-ala tunnetaan, mutta sivun pituus pitäisi selvittää. Pitäisi miettiä, mikä luku korotettuna potenssiin kaksi tuottaa pinta-alan. Tätä laskutoimitusta voidaan merkitä neliöjuurella, $\sqrt{\ }$.

$$\boxed{\sqrt{a} = \text{"mikä luku korotettuna potenssiin kaksi tuottaa luvun } a\text{"}}$$

Neliön sivun pituus saadaan siis laskemalla neliöjuuri sen pinta-alasta.

Esimerkiksi neliön, jonka pinta-ala on 25, sivun pituus saadaan laskemalla $\sqrt{25}$.
$\sqrt{25} =$ "mikä luku korotettuna potenssiin kaksi tuottaa 25?" Kokeilemalla saadaan selville, että kysytty luku on 5, joten $\sqrt{25} = 5$.



Huomaa, että neliöjuuri voidaan ottaa vain positiivisista luvuista ja nollasta. Esimerkiksi $\sqrt{-9}$ ei voi laskea, koska ei ole olemassa lukua, joka korotettuna potenssiin kaksi tuottaisi -9. (Negatiivisille luvuille voidaan määrittää neliöjuuri, kun lasketaan kompleksiluvuilla, joihin sisältyy lukuja lukusuoran ulkopuolelta. Kompleksiluvut eivät kuitenkaan ole mukana lukion oppimäärässä.)

Harjoitustehtävä 108. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 109. Neliön pinta-ala on 36. Mikä on sen sivun pituus?

Vastaus

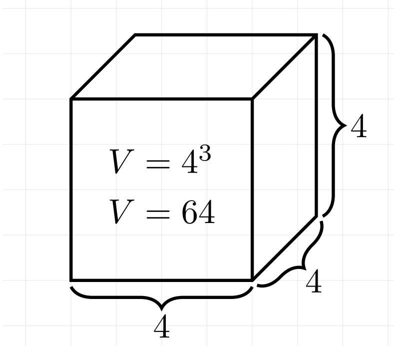
Harjoitustehtävä 110. Neliön muotoisen kasvimaan pinta-ala on 81 m^2. Kuinka pitkä aita tarvitaan sen ympäröimiseen.

Vastaus

Kuutiojuuri

Kuutiojuuri on määritelmällisesti kolmanteen potenssiin korotuksen käänteistoimitus. Muistetaan, että kuution tilavuus saadaan laskettua korottamalla särmän pituus potenssiin kolme.

Esimerkiksi kuution, jonka särmän pituus on 4, tilavuus saadaan laskemalla $4^3 = 64$.

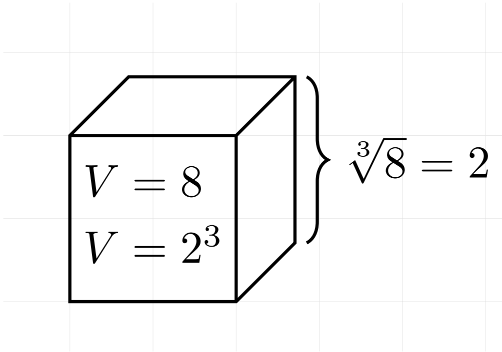


Jos halutaan selvitää kuution särmän pituus, kun tilavuus tunnetaan. Pitäisi miettiä, mikä luku korotettuna potenssiin kolme tuottaa tilavuuden. Tätä laskutoimitusta voidaan merkitä kuutiojuurella, $\sqrt[3]{\ }$.

$\boxed{\sqrt[3]{a}=\text{"mikä luku korotettuna potenssiin 3 tuottaa luvun } a\text{?"}}$

Kuution särmän pituus saadaan siis laskemalla sen tilavuuden kuutiojuuri.

Esimerkiksi kuution, jonka tilavuus on 8, särmän pituus saadaan laskemalla $\sqrt[3]{8}$.
$\sqrt[3]{8} =$ "mikä luku korotettuna potenssiin kolme tuottaa 8" Kokeilemalla saadaan selville, että kysytty luku on 2, joten $\sqrt[3]{8} = 2$.



Toisin kuin neliöjuuri, kuutiojuuri voidaan ottaa myös negatiivisista luvuista. Esimerkiksi $\sqrt[3]{-8} = -2$, koska $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Harjoitustehtävä 111. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[3]{1}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 112. Kuution tilavuus on 125. Mikä on sen särmän pituus?

Vastaus

Harjoitustehtävä 113. Ohuesta teräsputkesta hitsataan kuution muotoista allasta varten tukikehikko, jossa putket muodostavat kuution särmät. Altaan tilavuus on 64 kuutiometriä. Kuinka monta metriä putkea tarvitaan?

Vastaus

Harjoitustehtävä 114. Vanerista valmistetaan kuution muotoinen kanneton laatikko, jonka tilavuus on 216 litraa. Kuinka paljon laatikon valmistamiseen kuluu vaneria neliömetreissä?

Vastaus

Yleinen juuri

Neliö- ja kuutiojuurta seuraavia juuria nimitetään tyypillisesti neljäs juuri, viides juuri, jne. Huom! neliöjuureen ei tyypillisessti merkitä juurilukua, mutta sitä voisi merkitä myös $\sqrt[2]{}$.

Juurilasku on yleisesti määriteltynä potenssiinkorotuksen käänteistoimitus. Tämä tarkoittaa sitä, että jos potenssiin korotus ja vastaavan juuren ottaminen tehdään jollekin luvulle peräkkäin, saadaan tulokseksi se luku, mistä lähdettiin liikkeelle.

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}^{\,n} = a$$

Ylläolevassa määritelmällä on muutama rajoitus. Määritelmä toimii aina, kun n on pariton luku. Parillisilla luvuilla määritelmä toimii, kun luku a on positiivinen. Tätä käsitellään tarkemmin kappaleessa juuren ja potenssin yhdistäminen.

Yleinen juuri voidaan määritellä seuraavasti:

$$\sqrt[n]{a} = \text{"mikä luku korotettuna potenssiin } n \text{ tuottaa luvun } a\text{"}$$

Muista! Parillisen juuren voi ottaa vain positiivisesta luvusta tai nollasta. Parittoman juuren voi ottaa myös negatiivisista luvuista.

Harjoitustehtävä 115. Laske ilman laskinta

a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-49}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[5]{-32}$ f) $\sqrt[6]{64}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 116. Laske ilman laskinta

a) $\sqrt[5]{1}$ b) $\sqrt[5]{-1}$ c) $\sqrt[4]{-1}$ d) $\sqrt[3]{0}$ e) $\sqrt[3]{-1}$ f) $\sqrt[4]{625}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 117. Mari otti ensimmäisenä yliopistovuotenaan kiinteäkorkoista opintolainaa 3000,00 euroa, eikä ottanut uutta opintolainaa myöhempinä vuosina. Opintolainan korot lisätään pääomaan vuosittain opintojen päättymiseen asti. 5 vuoden kuluttua Marin valmistuttua lainapääoma oli noussut $3215,96$ euroon. Mikä oli lainan vuosikorko?

Vastaus

Harjoitustehtävä 118. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt{6^2}$ b) $\sqrt{9}^2$ c) $\sqrt[3]{4^3}$ d) $\sqrt[3]{(-2)^3}$ e) $\sqrt[3]{-8}^3$ f) $\sqrt{(-6)^2}$

Vastaus

Juuren ja vastaavan potenssin yhdistäminen

Pariton juuri ja vastaava potenssi

Juuren määritelmän mukaan juuri ja vastaava potenssin kumoavat toisensa: $\sqrt[n]{a}^n = \sqrt[n]{a^n} = a$, kun n on pariton luonnollinen luku ja a on mikä tahansa reaaliluku.

Parillinen juuri ja vastaava potenssi

Tässä tapauksessa on väliä sillä, missä järjestyksessä juuri ja potenssi ovat laskussa. Juuren määritelmän mukaan $\sqrt[n]{a}^n = a$, kun n on parillinen luonnollinen luku. Huomaa kuitenkin, että parillinen juuri voidaan ottaa vain positiivisesta luvusta ja nollasta, joten $a \geqslant 0$.

Katsotaan, mitä tapahtuu lausekkeelle $\sqrt[n]{a^n}$, kun n on parillinen luonnollinen luku.

Esimerkiksi $\sqrt{a^2}$

a	a^2	$\sqrt{a^2}$
3	$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
1	$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
0	$0^2 = 0$	$\sqrt{0} = 0$
-1	$(-1)^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
-2	$(-2)^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
-3	$(-3)^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$

Positiivisesta luvusta tulee aina luku itse, mutta negatiivisesta luvusta tulee vastaava positiivinen luku. Tätä matemaattista ilmiötä kutsutaan itseisarvoksi, sitä merkitään tyypillisesti $|a| =$ itseisarvo luvusta a.

Näin ollen $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, kun n on parillinen ja a mikä tahansa reaaliluku.

Yhteenvetona:

$$\sqrt[n]{a}^n = \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \text{kun } n \text{ on pariton ja } a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{a}^n = a, \quad \text{kun } n \text{ on parillinen ja } a \geqslant 0$$
$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad \text{kun } n \text{ on parillinen ja } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{kaikissa } n \in \mathbb{N}_+$$

Harjoitustehtävä 119. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt[3]{-15}^3$ b) $\sqrt{19^2}$ c) $\sqrt[4]{(-27)^4}$ d) $\sqrt[8]{-256}^8$

Vastaus

Juuren ja potenssin yhdistäminen yleisesti

Jos eksponentti ja juuriluku ovat eri suuria, ne voi usein ”supistaa” samaan tapaan kuin murtoluvun.

Esimerkiksi $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{6}\,2}} = 2^2 = 4$ tai $\sqrt[\cancel{6}\,2]{2}^{\cancel{3}} = \sqrt{2}$.

Ole kuitenkin tarkkana negatiivisten lukujen kanssa. Muista, että negatiivinen luku korotettuna parilliseen potenssiin tuottaa positiivisen luvun.

Esimerkiksi $\sqrt[\cancel{4}\,2]{(\cancel{-}9)^{\cancel{2}}} = \sqrt{9} = 3$.

Lauseketta $\sqrt[6]{-8}^2$ taas ei voi supistaa, koska parillisen juuren alla on miinusmerkkinen luku ja näin lausekkeen arvoa ei voi laskea.

Harjoitustehtävä 120. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt[5]{32}^3$ b) $\sqrt[4]{(-9)^2}$ c) $\sqrt[3]{-125}^2$ d) $\sqrt[3]{-8^6}$

Vastaus

Juurien kerto- ja jakolasku

Katsotaan, ensin miten juurien kerto- ja jakolaskuista selvitään tähän mennessä opittujen perusteiden avulla. Lopuksi opetellaan kaavat.

Johdantotehtäviä varten tulee osata "laventaa" ja "supistaa" juuri-potenssi-lausekkeita. Lisäksi pitäisi osata potenssien kerto- ja jakolasku. Jos jokin näistä on unohtunut, kertaa ne ensin aiemmista kappaleista.

$$a = \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}^n$$

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \qquad \text{potenssien tulo}$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \qquad \text{potenssien osamäärä}$$

Muistathan, että kaikki kaavat toimivat etu- ja takaperin. Niitä joudutaankin tässä soveltamaan kumpaankin suuntaan.

Harjoitustehtävä 121. Sievennä ja laske seuraavat laskut ohjeen mukaan.

I) "Lavenna": Korota koko lauseke potenssiin, joka on sama kuin juurilaskujen juuriluku. (Muista merkitä sulut.) Seuraavaksi merkitse koko hässäkän ympärille uudestaan sama juuri.

II) Erottele uloimman juuren sisällä oleva kertolaskun potenssi kahden potenssin tuloksi tai osamääräksi. (Potenssien kerto- tai jakolaskun kaava.)

III) Huomaa, että nyt voit kumota (supistaa) sisemmät juuri-potenssi-yhdistelmät.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ c) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 122. Laske seuraavat laskut ilman laskinta ja taulukkokirjaa. Sovella edellisen tehtävän välivaiheita takaperin.

a) $\sqrt{9 \cdot 49}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$ d) $\sqrt{7\dfrac{1}{9}}$

Vastaus

Opittiin juurten kerto- ja jakolaskuun liittyvät kaavat.

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Muistathan, että kaavat tulee opetella niin hyvin, että niitä pystyy soveltamaan kumminkin päin.

Lisää tehtäviä juurilaskuista

123. Neliön muotoisen lattian päällystämiseen kului 960 metriä 15 cm levyistä lautaa. Mitkä olivat lattian mitat?

Vastaus

124. Vanerista pitää valmistaa 128 litran (=dm^3) vetoinen laatikko, jonka pohja on neliö ja korkeus kaksi kertaa pohjasärmän pituus. Mitkä ovat laatikon mitat?

Vastaus

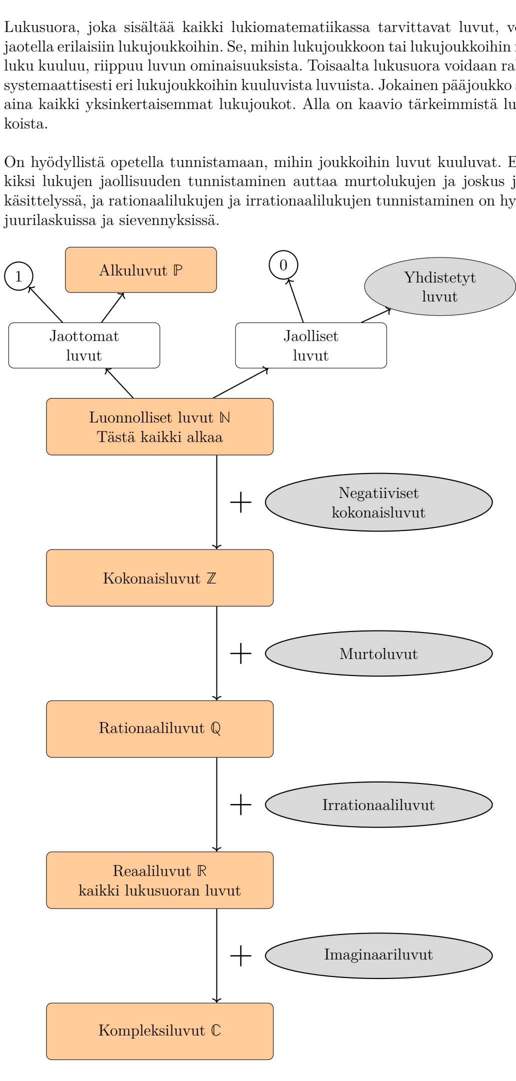
Lukujoukot

Lukuteorian alkeita: lukujoukot ja lukusuora

Lukusuoralla olevat erityyppisistä luvuista muodostuvat lukujoukot voidaan esittää kaaviona. Lukusuoran luvut voidaan jakaa ominaisuuksiensa perusteella viiteen päälukujoukkoon, lisäksi näitä voidaan edelleen jaotella pienempiin lukujoukkoihin, joista tärkeimmät ovat mukana kaaviossa.

Lukusuora, joka sisältää kaikki lukiomatematiikassa tarvittavat luvut, voidaan jaotella erilaisiin lukujoukkoihin. Se, mihin lukujoukkoon tai lukujoukkoihin mikäkin luku kuuluu, riippuu luvun ominaisuuksista. Toisaalta lukusuora voidaan rakentaa systemaattisesti eri lukujoukkoihin kuuluvista luvuista. Jokainen pääjoukko sisältää aina kaikki yksinkertaisemmat lukujoukot. Alla on kaavio tärkeimmistä lukujoukoista.

On hyödyllistä opetella tunnistamaan, mihin joukkoihin luvut kuuluvat. Esimerkiksi lukujen jaollisuuden tunnistaminen auttaa murtolukujen ja joskus juurien käsittelyssä, ja rationaalilukujen ja irrationaalilukujen tunnistaminen on hyödyksi juurilaskuissa ja sievennyksissä.



Luonnolliset luvut

Matematiikan peruslukujoukko, johon muut lukujoukot perustuvat on luonnollisten lukujen joukko. Luonnollisten lukujen määritelmä kuuluu seuraavasti: Luonnollisia lukuja ovat luvut, joita voidaan käyttää ilmaisemaan lukumäärää (2 autoa, 5 omenaa) tai järjestystä (3. ovi oikealla, 12. kerros).

Luonnollisia lukuja ovat $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään symbolilla ℕ (sanasta natural numbers). Positiivisten luonnollisten lukujen joukkoa, eli luonnollisten lukujen joukkoa ilman nollaa, voidaan tarvittaessa ilmaista $\mathbb{N}_+$.

Merkintä $x \in \mathbb{N}$ tarkoittaa, että luku x on luonnollinen luku. Kirjaimellisesti merkintä luetaan: luku x kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon. Tätä merkintätapaa käytetään jatkossa paljon.

Kaikki muut lukujoukot perustuvat luonnollisiin lukuihin. Käydään läpi ensin luonnollisia lukuja alkeellisempia lukujoukkoja. Luonnolliset luvut voidaan erotella jaollisiin ja jaottomiin lukuihin. Jaottomia lukuja kutsutaan ykköstä lukuunottamatta alkuluvuiksi. Alkuvut on näistä alkeellisista lukujoukoista merkittävin. Jaollisia lukuja, nollaa lukuunottamatta, kutsutaan yhdistetyiksi luvuiksi.

Jaottomat ja jaolliset luvut

Jos etsitään luonnollisten lukujen joukosta ne, jotka voidaan jakaa tasan **vain** yhdellä ja itsellään, saadaan jaottomat luvut (nimitys juuri siitä, että niitä ei voi jakaa tasan muilla luvuilla). Kaikilla muilla luvuilla on ominaisuus: ne ovat jaollisia muilla luvuilla kuin yhdellä ja itsellään (ei kuitenkaan poissulkien näitä). Katsotaan hieman myöhemmin vielä paremmin muotoillut määritelmät.

Nolla voidaan jakaa tasan ykkösellä tai millä tahansa suuremmalla luonnollisella luvulla, joten se sopii hyvin jaollisten lukujen määritelmään ja ei sovi jaottomien lukujen määritelmään. Lisäksi nollaa ei voi jakaa itsellään, siksikään se ei sovi jaottomien lukujen määritelmään.

Yksi on jaoton luku, sen voi jakaa tasan vain yhdellä ja itsellään.

Kaksi on jaoton luku, sitä ei pysty jakamaan tasan millään muulla luonnollisella luvulla kuin yhdellä ja kahdella.

Kolme on jaoton luku.

Neljä on jaollinen luku, koska se voidaan jakaa tasan myös kahdella.

Viisi on jaoton luku.

Kuusi on jaollinen luku, se voidaan jakaa tasan kahdella ja kolmella.

Seitsemän on jaoton luku.

jne...

Harjoitustehtävä 125. Selvitä, mitkä luvut väliltä 0-30 ovat jaollisia ja mitkä jaottomia.

Vastaus

Alkuluvut

Jaottomista luvuista ykkönen on hieman muista poikkeava, siltä puuttuu eräs ominaisuus. Katsotaan, mikä merkittävä ominaisuus luvuilla 5, 3, ja 2 on, mutta luvulla 1 ei ole.

Viisi on jaoton luku, mutta siitä eteen päin joka viides luku on jaollinen. $5, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 15 = 3 \cdot 5$ jne...

Kolme on jaoton luku, mutta siitä eteen päin joka kolmas luku on jaollinen. $3, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 9 = 3 \cdot 3$ jne...

Kaksi on jaoton luku, mutta siitä eteen päin joka toinen luku on jaollinen. $2, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 3 \cdot 2$ jne...

Toisin sanoen, viisi on ainut viidellä jaollinen jaoton luku; kolme on ainut kolmella jaollinen jaoton luku; ja kaksi on ainut kahdella jaollinen jaoton luku.

Sama ominaisuus ei kuitenkaan toimi luvulla 1. Sillä jos mennään tästä eteen päin yhden luvun askelia, tulee vastaan sekä jaollisia että jaottomia lukuja. Toisin sanoen, yksi ei ole ainut yhdellä jaollinen jaoton luku.

Tämä tarkastelu ominaisuus on merkittävä matemaattisessa tutkimuksessa ja monissa matemaattisissa teorioissa. Tästä syystä sen täyttävät luvut on määritelty omaksi perusjoukkojoukokseen, jota kutsutaan alkuluvuiksi. Alkulukujen määritelmä on: "Ykköstä suuremmat luonnolliset luvut, jotka ovat jaollisia vain yhdellä ja itsellään". Alkulukujen joukon symboli on ℙ (enlannin kielen sanasta prime number).

Yhdistetyt luvut

Jaollisista luvuista nolla on sitä erikoinen, että periaatteessa mikä tahansa luonnollinen luku voi olla sen tekijä ja toisaalta se itse ei ole minkään muun luonnollisen luvun tekijä. Kaikilla muilla jaollisilla luvuilla on seuraava ominaisuus: ne voidaan esittää alkulukujen tulona vain yhdellä tavalla.

Esimerkiksi luku 15 voidaan esittää vain tulona, jossa esiintyy kerran alkuluvut 3 ja 5. Luku 144 voidaan esittää vain tulona, jossa esiintyy neljä kertaa alkuluku 2 ja kaksi kertaa alkuluku 3.

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

Jaollisia lukuja ilman nollaa kutsutaan yhdistetyiksi luvuiksi (nimi siitä, että ne ovat muodostuvat alkulukujen yhdistelminä).

Lukujen jakaminen tekijöihin

Yllä opittiin, että yhdistetyt luvut voidaan ilmaista muiden lukujen tulona. Luvun jakaminen tekijöihin tarkoittaa juurikin ilmaisemista juuri tällä tavalla. Monet luvut voidaan jakaa tekijöihin myös useammalla tavalla.

Esimerkiksi: $\quad 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3^2$

Muutama helppo jaollisuussääntö:

Parilliset luvut ovat nimensä mukaisesti jaollisia kahdella. Parillisia ovat luvut, joiden viimainen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8.

Viidellä jaollisia ovat kaikki luvut, joiden viimeinen numero on 0 tai 5.

"Pyöreät" luvut. Huomaa, että luvut, joiden viimeinen numero on 0, ovat jaollisia sekä kahdella, että viidellä. Siispä ne ovat jaollisia myös $2 \cdot 5 = 10$:llä. Kahteen nollaan päättyvät luvut ovat jaollisia sadalla, kolmeen nollaan tuhannella jne.

Kolmella jaollisuuden selvittäminen on myös melko helppoa. Jos se ei ole heti ilmiselvää, etsi luvun lähellä joku sellainen luku, jonka tiedät olevan kolmella jaollinen. Seuraavaksi selvitä, onko testattava luku kolmosen monikerran etäisyydellä tunnetusta luvusta. Tämä perustuu siihen, että tunnetusta luvusta laskien sekä ylös että alas päin joka kolmas luku on kolmella jaollinen.

Esimerkki: Selvitetään, onko luku 198 jaollinen kolmella.

Tiedetään ainakin varmasti, että luku 210 on jaollinen kolmella. (Koska luku 21 on jaollinen kolmella. $210 = 10 \cdot 21 = 10 \cdot 3 \cdot 7$). Lukujen erotus on 12. Koska 12 on kolmosen monikerta (eli myös jaollinen kolmella), myös 210 on jaollinen kolmella.

Tätä tekniikkaa voi käyttää myös muiden jaollisuuksien selvittämiseen.

Luvun jakaminen alkulukutekijöihin tarkoittaa, että ilmaistaan luku alkulukujen tulona.

Esimerkki: Jaetaan luku 75 alkulukutekijöihin.

Koska luku päättyy vitoseen, se on jaollinen viidellä $\frac{75}{5} = 15$, eli $75 = 5 \cdot 15$. Viisi on alkuluku, joten sitä ei voi jakaa tekijöihin. Sen sijaan 15 ei ole vielä alkuluku, se on edelleen jaollinen viidellä, joten jatketaan tekijöihin jakamista. $15 = 5 \cdot 3$, saadaan $75 = 5 \cdot 5 \cdot 3$. Nyt tulon tekijöinä vain alkulukuja, joten sitä ei pysty enää jakamaan pienempiin osiin. Kirjoitetaan vastaus vielä nättiin muotoon järjestämällä kertolaskun luvut pienimmästä suurimpaan ja yhentämällä toistuvat luvut potenssilaskulla.

$$75 = 3 \cdot 5^2$$

Harjoitustehtävä 126. Jaa luvut alkulukutekijöihin

a) 8 b) 10 c) 18 d) 30 e) 126 f) 615

Vastaus

Negatiiviset kokonaisluvut

[illegible]

Kokonaisluvut

[illegible]

Murtoluvut

[illegible]

Rationaaliluvut

[illegible]

Murtoluvun ja desimaaliluvun muuttaminen toisikseen

[illegible]

Harjoitustehtävä 127. [illegible]

Vastaus

Harjoitustehtävä 128. [illegible]

Vastaus

[illegible]

Harjoitustehtävä 129. Muunna päättymättömät, jaksottomat desimaaliluvut murtoluvuiksi.

a) $0,666\ldots$ b) $0,181818\ldots$ c) $1,201201201\ldots$

Vastaus

Irrationaaliluvut

Irrationaaliluvut on joukko, joka sisältää kaikki luvut, joita (toisin kuin rationaalilukuja) ei voi ilmaista kahden kokonaisluvun jakolaskuna. Irrationaaliluvut ovat päättymättömiä, jaksottomia desimaalilukuja. Esimerkiksi π (ympyrän kehän suhde halkaisijaan), neperin luku e (opitaan myöhemmin), $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$.

Huomaa, jos kokonaisluvun juuri ei ole kokonaisluku, se on aina irrationaaliluku.

Reaaliluvut

Kun rationaalilukujen joukkoon lisätään irrationaaliluvut, saadaan kaikki lukusuoran luvut, eli reaaliluvut. Reaalilukujen symboli on ℝ (sanasta real numbers).

Luku, joka kuuluu, johonkin tiettyyn lukujoukkoon, kuuluu samalla kaikkiin kehittyneempiin päälukujoukkoihin. Esimerkiksi $\frac{2}{3}$ ja $0,555\ldots$ ovat rationaalilukuja, mutta ovat samalla myös reaalilukuja (ja kompleksilukuja). 0, 1, 4, 10 ovat luonnollisia lukuja, mutta samalla myös kokonaislukuja, rationaalilukuja ja reaalilukuja (ja myös kompleksilukuja). 2 ja 3 ovat alkulukuja, mutta kuuluvat myös kaikkiin kehittyneempiin lukujoukkoihin.

Harjoitustehtävä 130. Merkitse, mihin lukujoukkoihin luvut kuuluvat.

	Alkuluvut	Yhdistetyt luvu	Luonnolliset luvut	Negatiiviset kokonaisluvut	Kokonaisluvut	Murtoluvut	Rationaaliluvut	Irrationaaliluvut	Reaaliluvut
9									
$\frac{2}{3}$									
0									
1									
2									
3									
4									
$\sqrt{2}$									
-11									
11									
0,28									
π									
0,4333...									
0,1010010001...									

Vastaus

Imaginaariluvut ja kompleksiluvut eivät kuulu lukion oppimäärään, eikä niitä tarvitse siten välttämättä opiskella ollenkaan. Voit kuitenkin halutessasi tutustua niihin lyhyesti alla ja niiden konseptin ymmärtäminen auttaa matemaattisen ajattelun kehittymisessä.

Imaginaariluvut

Reaaliluvut ovat intuitiivisia ja sopivat kuvaamaan monia ilmiöitä. Kaikille peruslaskutoimituksille ei kuitenkaan ole olemassa vastausta reaalilukujen joukossa. Tällaisia ovat esimerkiksi parilliset juuret negatiivisista luvuista. Laajennetaan lukujoukkoja merkitsemällä $\sqrt{-1}$ vastausta uudella lukutyypillä, imaginaariluvulla. $\sqrt{-1} = 1i$. Nyt esimerkiksi $\sqrt{-4} = 2i$. Imaginaariluvuille taas pätee $(1i)^2 = -1$. Kun imaginaariluvut lisätään Reaalilukuihin saadaan kompleksilukujen lukujoukko.

Kompleksiluvut

Kun reaalilukujen joukkoon lisätään imaginaariluvut, saadaan kompleksiluvut. Kompleksilukujen symboli on ℂ (sanasta complex number). Kompleksiluvut on kaikkien peruslaskutoimitusten suhteen suljettu lukujoukko, eli kaikille peruslaskutoimituksille jotka tehdään kompleksiluvuilla on olemassa vastaus kompleksilukujen joukossa muutamia määrittelemättömiä poikkeuksia lukuunottamatta. Kompleksilukuja voi kuvata lukutasolla, jossa koordinaattiakseleina ovat lukusuora ja imaginaariakseli.

Verrannollisuus

Suoraan verrannollisuus

Kaksi suuretta, joiden suhteelliset muutokset ovat aina samat, ovat suoraan verrannollisia. Tämä tarkoittaa sitä, että jos toinen kaksinkertaistuu, niin toinenkin kaksinkertaistuu. Toisen kolminkertaistuessa toinenkin kolminkertaistuu. Lisäksi, jos toinen suure on nolla, niin toinenkin on silloin aina nolla. Esimerkkejä tällaisista suurepareista ovat vaikkapa kaupasta ostettujen omenoiden paino ja hinta, ajomatka ja ajoaika, kun ajetaan koko ajan samalla nopeudella tai tietyn ruuan valmistamiseen tarvittavien ainesosasten määrät.

Tarkastellaan seuraavassa tehtävässä kahta suoraan verrannollista suuretta. Käytä hyödyksesi tietoa, että suureiden suhteelliset muutokset ovat aina samat.

Harjoitustehtävä 131. Kaupassa kaksi kiloa omenoita maksoi viisi euroa. Täydennä tämän perusteella alla oleva taulukko. Laske kolmanteen sarakkeeseen paino jaettuna hinnalla ja neljänteen hinta jaettuna painolla. Mikä on näiden lukujen merkitys?

paino (kg)	hinta (€)	$\frac{\text{paino}}{\text{hinta}}$	$\frac{\text{hinta}}{\text{paino}}$
0			
	1		
1			
2	5		
4			
	17,50		

Piirrä kuvaaja omenoiden hinta painon funktiona.

Muodosta lauseke, jolla saa laskettua omenoiden hinnan painon avulla.

Vastaus

Edellisessä tehtävässä huomattiin, että suoraan verrannollisten suureiden välinen suhdeluku pysyy aina samana. Tästä voidaan muodostaa sääntö.

Suure a	Suure b
a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_3

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = k$$

tai

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = k$$

Käänteisesti tiedetään, että jos tarkasteltavien suureiden suhde ei pysy samana, kysymys ei ole suoraan verrannollisista suureista.

Yllä olevaa sääntöä voidaan käyttää tuntemattoman selvittämiseen.

Esimerkki: Kolmeen annokseen pasta carbonaraa tarvitaan 240 grammaa spagettia. Kuinka paljon spagettia tarvitaan viiteen annokseen?

Spagetin ja annosten määrät ovat suoraan verrannollisia suureita, koska niiden on muututtava samassa suhteessa. Muistetaan, että suureiden keskinäinen suhde pysyy samana suoraan verrannollisilla suureilla.

Annokset	Spagetti
3	240
5	m

$$\frac{m}{5} = \frac{240}{3} \quad || \cdot 5$$
$$m = \frac{240}{3} \cdot 5$$
$$m = 400$$

Spagettia tarvitaan viiteen annokseen 400 grammaa.

Huomaa! Verrannollisuustehtävä on aina helpointa ratkaista, kun yhtälön rakentaa niin, että tuntematon tulee valmiiksi vasemmalle ja osoittajaan.

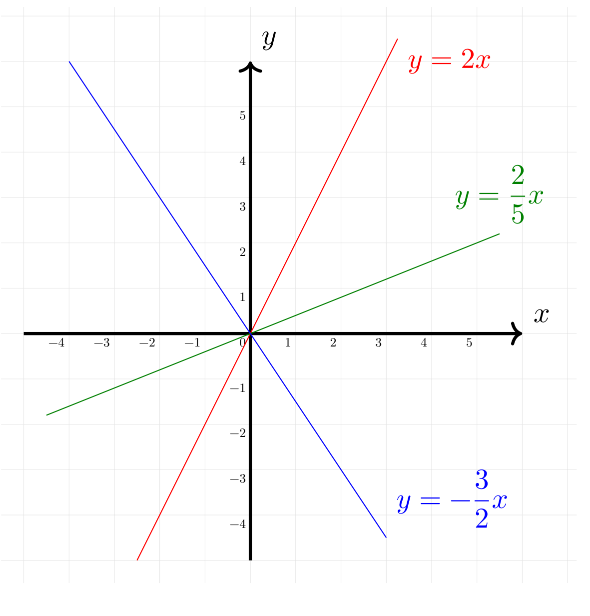
Suoraan verrannollisuutta kuvaava yhtälö saadaan, kun tiedetään, että suureparien suhde on aina vakio.

$$\frac{b}{a} = k \quad \text{tai} \quad \frac{y}{x} = k$$
$$b = ka \qquad y = kx$$

Muodostetaan spagettiesimerkistä yhtälö, jolla voidaan laskea tarvittava spagetin määrä annosten lukumäärän avulla. Merkitään annosten määrää x ja spagetin määrää y.

$$\frac{y}{x} = \frac{240}{3}$$
$$y = 80x$$

Suoran verrannollisuudessa verrannollisuuskerroin on myös tilannetta kuvaavan suoran kulmakerroin. (Ei haittaa, jos et vielä tiedä, mikä kulmakerroin on.) Viereisessä kuvassa on esitetty kuvaajia erilaisilla verrannollisuuskertoimilla. Jos kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva. Jos se on negatiivinen, suora on laskeva. Jos kulmakerroin on suuri luku (isosti positiivinen tai isosti negatiivinen), suora on jyrkkä. Jos se on lähellä nollaa oleva luku, suora on loiva.



Tarkastellaan vielä suureiden välistä muutossuhdetta. Muutossuhde on luku, joka saadaan laskemalla kahden suureparin erotusosamäärä. Erotusosamäärä kertoo suureparien erotusten, eli muutoksien suhteen. Sen kaava on siten

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Taulukoidaan ensin arvoja spagettiesimerkkiin ja lasketaan sen jälkeen muutossuhteita.

Annokset	Spagetti
0	0
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400

Annoskokojen 2 ja 5 suureparien välinen muutossuhde on

$$\frac{400 - 160}{5 - 2} = \frac{240}{3} = 80.$$

Annoskokojen 1 ja 3 välinen muutossuhde on

$$\frac{240 - 80}{3 - 1} = \frac{160}{2} = 80.$$

Suoraan verrannollisten suureiden muutossuhde pysyy siis vakiona ja kuten huomataan, se on sama luku kuin verrannollisuuskerroin. Huomaa, että verrannollisuuskerroin, joka oli suureparien välinen suhdeluku saataisiin, jos muutossuhteen kaavan toiseksi suurepariksi otettaisiin $(0, 0)$-pari.

Vielä lyhyesti suoraan verrannollisuuden tärkmeimmät ominaisuudet:

- Suureiden suhteelliset muutokset ovat samat.
- Suureiden välinen suhdeluku on aina sama. (kulmakerroin)
- Suureiden muutoksien suhde on aina sama. (kulmakerroin)
- Jos toinen on nolla, toinenkin on nolla.
- Suureiden välinen kuvaaja on suora ja kulkee origon kautta.

Harjoitustehtävä 132. Omakotitaloyhdistyksellä on edullisia vuokratyökaluja. Porakoneen vuokra on $1,60$ euroa/tunti. Muodosta yhtälö vuokrauksen kokonaishinta vuokra-ajan funktiona. Piirrä kuvaaja. Kuinka paljon maksaa 6 tunnin vuokra?

Vastaus

Harjoitustehtävä 133. Hilkka kutoi samanlaisia lapasia kuudelle lapsenlapselleen, yhden parin kullekin. Lapaset painoivat 450 grammaa. Kuinka monta lapasparia Hilkka voi kutoa myyntiin, kun hänellä on jäljellä 1200 grammaa samanlaista villalankaa?

Vastaus

Harjoitustehtävä 134. Jos jarrutusolot ovat samanlaiset, niin auton pysähtymiseen tarvittava jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kuivalla asfaltilla eräs auto pysähtyi nopeudesta 80 km/h 32 metrin matkalla.

a) Kuinka pitkä jarrutusmatka vähintään tarvitaan auton pysähtymiseen nopeudesta 50 km/h?

b) Kuinka suuri oli auton nopeus, kun jarrutusmatka oli 100 m?

c) Ilmaise yhtälöllä jarrutusmatkan s riippuvuus nopeudesta v. Piirrä yhtälön kuvaaja.

Vastaus

Kääntäen verrannollisuus

Kääntäen verrannolliset suureet muuttuvat aina käänteislukusuhteessa. Esimerkiksi, jos toinen suure kaksinkertaistuu, niin toinen puolittuu. Jos toinen kolminkertaistuu, niin toinen pienenee kolmasosaan jne. Esimerkkejä kääntäen verrannollisista suurepareista ovat matka-aika ja nopeus samalla matkalla, ojan kaivuuseen kuluva aika ja työntekijöiden määrä tai seuramatkan hinta ja osallistujien määrä, kun matkan hinta on kiinteä ja se jaetaan tasan osanottajien kesken.

Harjoitustehtävä 135. Asuntomessualueella on rivissä samanlaisia pientaloja. Tarkastellaan kahta muuttujaa, yhden talon maalaamiseen kuluvaa aikaa ja työntekijöiden lukumäärää. Ensimmäisen talon maalaamiseen kului 6 tuntia, kun töissä oli kolme maalaria. Täydennä tämän perusteella alla oleva taulukko. Laske kolmenteen sarakkeeseen, maalarien määrän ja työajan tulo. Mikä on tämän viimeisen sarakkeen luvun merkitys?

Piirrä kuvaaja, työhön kuluva aika työntekijöiden määrän funktiona. Muodosta funktion lauseke.

Maalarien lukumäärä	Työhön kuluva aika (h)	tulo
1		
	9	
3	6	
4		
6		
	2	
12		
	1	

Vastaus

Edellisessä tehtävässä huomattiin, että kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

Suure A	Suure B
a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_3

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = k$$

Tätä tietoa voidaan käyttää tuntemattoman selvittämiseen.

Esimerkki: Urkupillistä lähtevän äänen taajuus on kääntäen verrannollinen urkupillin pituuteen. Erään konserttitalon urkujen keskioktaavin A-sävelen taajuus oli 440 Hz ja sen tuottavan urkupillin pituus 39 cm. Mikä on saman urun keskioktaavin F-sävelen, 352 Hz, tuottavan urkupillin pituus?

Taajuus (Hz)	Pituus (cm)
440	39
352	l

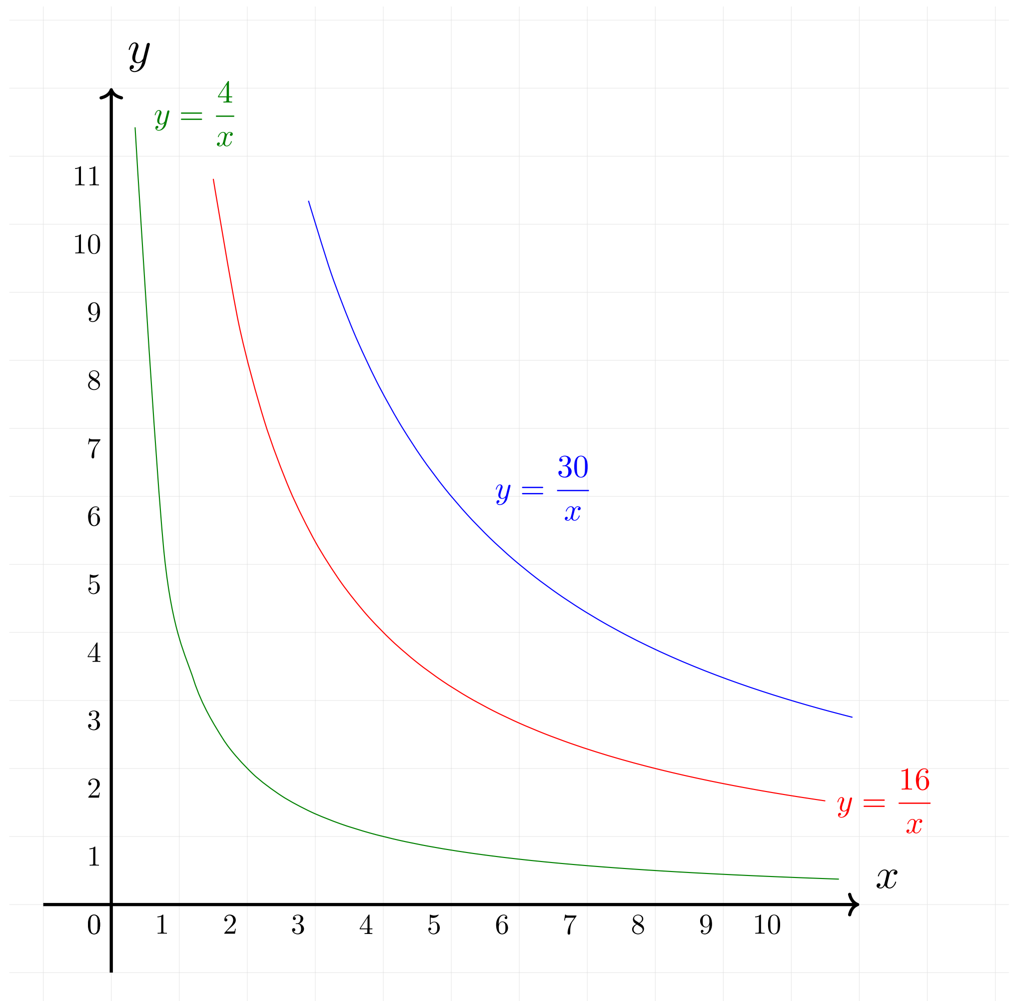
$$\begin{aligned} 352 \cdot l &= 440 \cdot 39 \\ l &= \frac{440 \cdot 39}{352} \\ l &= 48,75 \approx 49 \text{ cm} \end{aligned}$$

F-urkupillin pituus on 49 cm.

Kääntäen verrannollisuutta kuvaava yhtälö saadaan muodostettua tiedosta, että suureparien tulo on vakio.

$$a \cdot b = k \quad \text{tai} \quad x \cdot y = k$$
$$b = \frac{k}{a} \qquad y = \frac{k}{x}$$

Kääntäen verrannollisista suureista piirrettyä kuvaajaa kutsutaan hyperbeliksi.



Harjoitustehtävä 136. Kolme miestä maalasi aidan 9 tunnissa. Kuinka pitkään saman aidan maalaamiseen olisi kulunut viideltä mieheltä?

Vastaus

Harjoitustehtävä 137. Nopeusrajoitusta noudattaen matka taittuu 45 minuutissa. Ajamalla 10 km/h ylinopeutta säästää tasan 5 minuuttia.

a) Mikä on nopeusrajoitus, kun se on koko matkalla sama?

b) Mikä on matkan pituus?

Vastaus

Monimuuttujaverrannanto

Katsotaan, miten selvitään joistakin monen muuttujan verrannollisuustehtävistä. Tilanne, jossa on monta muuttujaa, jotka ovat kuitenkin kaikki suoraan verrannollisia toisiinsa, on helppo hahmottaa.

Otetaan esimerkiksi lohikeittoresepti, jonka mukaan 6 annosta varten tarvitaan 2 dl ruokakermaa, 2 sipulia, 5 perunaa ja 400 g lohta.

Tässä tehtävässä nähdään, että jos annosten määrää muutetaan, kaikkien muidenkin suureiden on muututtava samassa suhteessa. Jos esimerkiksi lohta käytetäänkin 600 grammaa, pitää muidenkin ainesosien määrät puolitoistakertaistaa. Samalla myös annosten määrä puolitoistakertaistuu. Tällaisesta verrannollisuustehtävästä ei tosin pysty muodostamaan yhtä yksinkertaista yhtälöä, jossa kaikki suureet ovat mukana vaan voidaan valita kaksi suuretta ja muodostaa niistä suoraan verrannollisuutta vastaava yhtälö.

Katsotaan seuraavassa harjoitustehtävässä tilannetta jossa on muuttujia, jotka ovat riippuvaisia toisistaan sekä suoraan että kääntäen verrannollisesti.

Harjoitustehtävä 138.

Mansikkapellolta saatiin kerättyä aamupäivän 5 ensimmäisen tunnin aikana 2400 kilogrammaa mansikoita, kun töissä oli 8 poimijaa.

Vastaa alla oleviin kysymyksiin.

Millä tavoin aika ja kerätty sato ovat verrannollisia, jos työntekijöiden määrä pysyy muuttumattomana?
Miten työntekijöiden määrä ja kerätty sato ovat verrannollisia, jos aika pysyy vakiona?
Miten työntekijöiden määrä ja aika ovat verrannollisia, jos halutaan saada määrätty sato kerättyä?

Täydennä alla oleva taulukko päättelemällä.

Työntekijöiden määrä	aika	kerätty sato
8	5	2400
8	10	
8	3	
4	5	
2		1800
	3	1800
	6	2520

Kahden suoraan verrannollisen suureen tapauksessa niiden suhde pysyi aina samana; kääntäen verrannollisten suureiden tapauksessa niiden tulo oli aina sama. Keksitkö, minkälainen vastaava yhteys on tämän tehtävän kolmella suureella.

Vastaus

Monen muuttujan verrannollisuutta kuvaavan yhtälön saa muodostettua siten, että valitaan yksi suure, jonka riippuvuus muista on helppo hahmottaa. Edellisessä esimerkissä se olisi vaikkapa poimitun sadon määrä. Tämä suure kerrotaan kaikilla siihen nähden kääntäen verrannollisilla suureilla ja jaetaan suoraan verrannollisilla.

$$\frac{a_1 \cdot [\text{kääntäen verrannolliset}]}{[\text{suoraan verrannolliset}]} = \frac{a_2 \cdot [\text{kääntäen verrannolliset}_2]}{[\text{suoraan verrannolliset}_2]} = ... = k$$

Tarkista lopuksi, että muiden suureiden keskinäiset suhteet ovat oikein, eli että suoraan verrannolliset ovat jakoviivan eri puolilla ja kääntäen verrannolliset samalla puolella, sillä joissakin tilanteissa ei pysty muodostamaan yhtä yksittäis yhtälöä.

Monimuuttujaverranto ja sen ymmärtäminen ovat tärkeitä luonnontieteissä ja sillä on monia taloudellisia sovelluksia, kuten edellisestä harjoitustehtävästä huomattiin. Yksi hyvä esimerkki monimuuttujaverrannosta fysiikassa on kahden kappaleen välinen gravitaatio, eli painovoima. Gravitaatio pitää ihmiset maan pinnalla. Aurinkokunta pysyy kasassa gravitaation avulla, ilman sitä planeetat eivät kiertäisi aurinkoa vaan lentäisivät suoraviivaisesti avaruudessa. Ylipäätään mitkään taivaankappaleet eivät olisi muodostuneet ilman gravitaatiota. Tutustu aiheeseen lisää seuraavan harjoitustehtävän avulla.

Harjoitustehtävä 139. Kahden kappaleen välinen painovoima (vetovoima) on suoraan verrannollinen kummankin kappaleen massaan ja kääntäen verrannollinen niiden massakeskipisteiden välisen etäisyyden neliöön. Painon yksikkö fysiikassa on Newton. (Kilogramma on massan yksikkö.) Esimerkiksi, ihminen, jonka massa on 65 kg, paino maan päällä on n. 650 N, mutta kuussa enää n. 100 N, vaikka massa ei muutu mihinkään.

Muodosta lauseke, jolla voidaan laskea kahden kappaleen välinen painovoima, kun niiden painot ja niiden välinen massakeskipisteiden välinen etäisyys tunnetaan. Voit merkitä verrannollisuuskerrointa tässä gammalla (γ). γ on ns. gravitaatiovakio, jonka suuruus on saatu selville kokeellisesti.

$$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Laske edellisen kaavan avulla maan ja kuun välisen gravitaatiovuorovaikutuksen suuruus seuraavien tietojen avulla:

Maan massa	$5,974 \cdot 10^{24}$ kg
Kuun massa	$7,348 \cdot 10^{22}$ kg
Etäisyys	$3,844 \cdot 10^{8}$ m

Vastaus

Lisää tehtäviä verrannollisuudesta

140. Puuro-ohjeen mukaan litraan kiehuvaa vettä sekoitetaan $2,5$ dl suurimoita. Aleksi mittasi kattilaan 6 kupillista vettä. Kuinka monta kupillista tarvitaan suurimoita?

Vastaus

141. Junamatka Helsingistä Hämenlinnaan kestää nykyisin 1 h 5 min keskinopeudella 100 km/h.

a) 100 vuotta sitten matka kesti 3[b] h 15 min, mikä oli keskinopeus silloin?

b) millä keskinopeudella matka menisi 50 minuutissa?

Vastaus

142. $2,4$ kg perunoita maksoi $1,80$ €. Ilmaise yhtälön avulla perunaerän hinnan h (€) riippuvuus erän painosta m (kg). Piirrä kuvaaja.

Vastaus

143. Onnettomuuspaikalla havaittiin 29 m pitkät jarrutusjäljet. Onnettomuustutkijat kokeilivat samanlaisilla renkailla varustetun vastaavan auton jarrutusmatkaa samalla paikalla ja mittasivat jarrutusmatkan pituudeksi 18 m, kun nopeus jarrutuksen alkaessa oli 60 km/h. Syyllistyikö onnettomuusauton kuljettaja ylinopeuteen, kun nopeusrajoitus paikalla oli 80 km/h?

Vastaus

144. Puutarhuri leikkaa nurmialueen viidessä tunnissa ruohonleikkurilla, jonka leikkausleveys on 60 cm. Puutarhuri haaveilee uudesta leikkurista, jonka nopeus on sama ja leveys 75 cm. Kuinka kauan nurmialueen leikkaaminen kestäisi tällä uudella leikkurilla?

Vastaus

145. 100 kuutiometrin uima-altaan tyhjentäminen kahdella samanlaisella vesipumpulla kesti kaksi tuntia. Kuinka kauan naapurin 120 kuutiometrin uima-altaan tyhjentäminen kestää, jos käytetään kolmea samanlaista pumppua kuin naapurilla oli?

Vastaus

146. Lankun kantokyky on suoraan verrannollinen lankun leveyteen ja paksuuden neliöön ja kääntäen verrannollinen lankun pituuteen. Tiedetään, että 200 cm pitkä, $10,0$ cm leveä ja $3,0$ cm paksu lankku kantoi 180 kg.

a) kuinka suuren massan samanlaisesta puusta sahattu 120 cm pitkä, $6,0$ cm leveä ja $2,0$ cm paksu lankku kantaa?

b) kuinka leveä 98 cm pitkän ja 7 cm paksun kattotuolin tulisi olla, jotta se kantaisi 600 kg?

c) kuinka paksu 280 cm pitkän ja 14 cm leveän lankun pitäisi olla, jotta se kantaisi 500 kg?

Vastaus

147. 800 m^2 parkkialueen asfaltoiminen kesti 5 tuntia, kun töissä oli 4 miestä. Kuinka monta miestä tarvitaan töihin, kun halutaan asfaltoida 1680 m^2 parkkialue 6 tunnissa?

Vastaus

Lineaarinen riippuvuus

Lineaarisella riippuvuudella ja suoraan verrannollisuudella on paljon yhteistä ja suoraan verrannollisuus onkin erikoistapaus lineaarisesta riippuvuudesta. Katsotaan seuraavassa esimerkkitehtävässä kahta tilannetta. Ensimmäisessä tilanteessa esiintyvät suureet ovat suoraan verrannollisia ja siten myös lineaarisesti riippuvaisia. Toisessa suureet ovat pelkästään lineaarisesti riippuvaisia.

Harjoitustehtävä 148. Puhelinoperaattori A veloittaa puheluista kiinteän minuuttihinnaston mukaan $0,15\,\frac{€}{\text{min}}$. Operaattori B veloittaa minuuttihinnan $0,15\,\frac{€}{\text{min}}$ ja puhelun aloitusmaksun $0,60€$. Täydennä alla oleva taulukko puhelun hinta ajan funktiona operaattoreilla A ja B. Muodosta viimeiselle riville lauseke puhelun hinnalle. Muodosta yhtälöt: puhelun hinta, y, ajan, x, funktiona kummallekin operaattorille. Piirrä yhtälöiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.

Puhelun kesto (min)	Operaattori A hinta (€)	Operaattori B hinta (€)
0		
1		
2		
3		
	0,75	
		2,10
...	...	...
x		

Vastaus

Kahden muuttujan (suureen) välistä lineaarista riippuvuutta voidaan kuvata ensimmäisen asteen yhtälöllä, jossa on kaksi muuttujaa. Tällainen ensimmäisen asteen yhtälö esitetään tyypillisesti muodossa

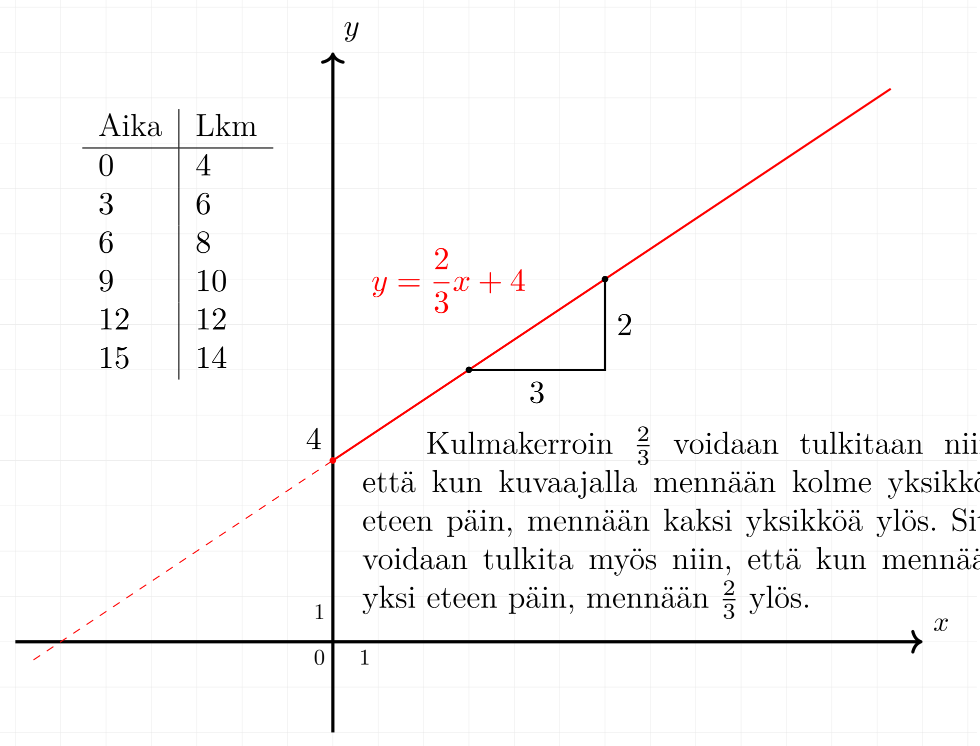
$$y = \overbrace{k}^{\text{kulmakerroin}} x + \underbrace{c}_{\text{vakiotermi}} \quad \text{tai} \quad y = ax + b.$$

Kahden muuttujan ensimmäisen asteen yhtälön kuvaaja on aina suora ja jokaisen suoran yhtälö on ensimmäisen asteen yhtälö. Tästä syystä ensimmäisen asteen yhtälöä sanotaan myös lineaariseksi yhtälöksi. Suoraan verrannolliset suureet ovat myös lineaarisesti riippuvaisia. Suoraan verrannollisuutta kuvaava yhtälö onkin erikoistapaus ensimmäisen asteen yhtälöstä. Yllä olevassa yhtälössä k (jälkimmäisessä a) on kulmakerroin ja c (jälkimmäisessä b) on vakiotermi (c englannin kielen sanasta constant). y ja x ovat muuttujia.

Kulmakerroin kertoo suoran suunnan ja jyrkkyyden. Kun kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva ja kun kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva. Jos kulmakerroin on lähellä nollaa oleva luku, on suora loiva, jos kulmakerroin on isosti negatiivinen tai isosti positiivinen luku, suora on jyrkkä.

Vakiotermi kertoo y-akselin leikkauspisteen.

Esimerkki: Erilaisia design-puutuotteita valmistava yritys pitää varastossaan valmiina neljää erikoismallisen tuolin runkoa. Jos yritys saa yksittäisen tilauksen, joka on tätä isompi, voidaan runkoja alkaa valmistaa heti, vauhdilla kaksi kappaletta jokaista kolmea tuntia kohden. Muodosta funktio, valmiiden tuolinrunkojen lukumäärä tilaushetkestä kuluneen ajan funktiona. Piirrä funktion kuvaaja.



Taulukosta ja kuvaajasta nähdään lineaarisesti riippuvaisten suureiden tärkein tunnuspiirre: suureiden muutossuhde pysyy samana. Kuvaajassa tämä näkyy siten, että jos kulmakertoimen määrittelyyn käytettyjä pisteitä siirrettäisiin kuvaajalla, muodostuvan kolmion sivujen suhde olisi edelleen $2:3$. Kahden suureparin välinen muutossuhde saatiin laskettua erotusosamäärän kaavalla.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Valitaan taulukosta muutama suurepari ja lasketaan niiden välisiä muutossuhteita.

$$\frac{14-6}{15-3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{8-4}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{12-6}{12-3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Muutossuhde on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin.

Harjoitustehtävä 149. Syöpäklinikalla havaittiin, että jokainen viiden päivän lisäys erään syövän puhkeamisen ja diagnoosin välillä heikensi selviämisennustetta 6 prosenttiyksikköä. Lisäksi tiedettiin, että jos diagnoosi tehtiin 5 viikon kuluttua taudin puhkeamisesta, selviämismahdollisuus on 48 %.

a) Kuinka paljon selviämistodennäköisyys heikkenee päivää kohden? Huomaa, että aika ja selviämistodennäköisyys ovat tässä lineaarisesti riippuvaisia, koska niiden muutosten suhde on aina sama.

b) Kuinka pitkä aika kuluu taudin puhkeamisesta siihen, että siitä on mahdoton selvitä?

c) Mikä on teoreettinen selviämistodennäköisyys, jos taudin puhkeamisen voisi havaita välittömästi?

d) Muodosta yhtälö, selviämistodennäköisyys ajan funktiona. Tämän voi tehdä useammalla tavalla, mutta jos et keksi itse, tee alla olevan ohjeen mukaan.

   Valitse kaksi kirjainta suureille aika (päivinä) ja todennäköisyys (esim. t ja p). Laskit jo a-kohdassa suureiden välisen muutossuhteen. Muodosta seuraavaksi muutossuhteelle lauseke tunnetun suureparin ja tuntemattomien avulla. Koska tiedetään, että muutossuhde on lineaarisesti riippuvaisilla suureilla kaikissa tilanteissa sama, voidaan muodostettu lauseke ja a-kohdassa laskettu merkitä yhtä suuriksi. Huomaa kuitenkin, että kun aika kasvaa, todennäköisyys pienenee, eli muutossuhteen luvun pitäisi oikeasti olla negatiivinen. Ratkaise tästä yhtälöstä todennäköisyys.

e) Piirrä yhtälön kuvaaja.

Vastaus

Lyhyesti vielä lineaarisen riippuvuuden tärkeimmät ominaisuudet:

- Suureiden muutosten suhde on aina sama. (kulmakerroin)
- Suureiden välinen kuvaaja on suora.

Harjoitustehtävä 150. Eräässä valtiossa suunniteltiin uutta tuloveromallia, jossa vuotuiset nettotulot 12 000 euroon asti ovat täysin verottomia. Tämän ylittävästä osasta maksetaan 20% tuloveroa. Muodosta yhtälö veron suuruus tulojen funktiona, kun tulot ovat yli 12 000. Piirrä kuvaaja.

Vastaus

Lisää tehtäviä lineaarisesta riippuvuudesta

151. Silakkakauppias laski, että jokainen $0,80$ € korotus kilohintaan vähentää päivittäistä myyntiä 25 kg. Maanantaina kauppias sai myytyä 80 kg silakoita, kun kilohinta oli 6[b] €/kg. Seuraavana päivänä kauppias sai myytäväkseen 100 kilogramman silakkaerän.

a) Mikä pitäisi korkeintaan asettaa silakoiden kilohinnaksi, jotta kauppias saisi kaikki silakat myytyä?

b) Mikä on tämän mallin mukaan silakan kilohinnan ns. kipuraja, jota kalliimmalla silakoita ei enää saa kaupaksi?

c) Muodosta päivttäisen myynnin määrä hinnan funktiona. Piirrä kuvaaja.

Vastaus

Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktio on tyypillisesti muotoa $y = a \cdot k^x$. Eksponenttifunktio kuvaa tilannetta, jossa toisen suureen muuttuessa tietyn määrän, toinen muuttuu tietyssä suhteessa. Esimerkiksi korkolaskut, joissa pääoma kasvaa yhden vuoden aikana aina yhtä monta prosenttia, radioaktiivinen ja biologinen hajoaminen, jossa tarkasteltavan aineen määrä pienenee tietyssä ajassa yhtä monta prosenttia tai absorptio, jossa esimerkiksi säteilyn määrä heikkenee aina yhtä monta prosenttia, kun se kulkee tietynpaksuisen seinämän läpi, ovat ilmiöitä, joita voi kuvata eksponenttifunktiolla.

Esimerkki: Johanna talletti vuoden 2012 alussa kiinteäkorkoiselle säästötilille 1500 euroa 10 vuodeksi. Tilin korko verojen jälkeen oli 3%. Kuinka paljon tilillä on rahaa

a) vuoden kuluttua, kun korko on ensimmäisen kerran maksettu?

b) kahden vuoden kuluttua?

c) vuonna 2022?

d) Muodosta tilin pääoma ajan funktiona.

Vuosikorko $3\ \% = 0,03$
Korkokerroin $1 + 0,03 = 1,03$

Tämän tyyppiset tehtävät kannattaa aloittaa aina taulukoimalla muuttujia. Tätä lähestymistapaa kannattaa soveltaa niin kauan, kun on epävarma taidoistaan.

vuodet	pääoma (€)	
0	1500	
1	$1500 \cdot 1,03$	Lasketaan uusi pääoma kertomalla edellisen vuoden pääoma korkokertoimella $1,03$.
2	$1500 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 1500 \cdot 1,03^2$	Edellisen vuoden määrä kerrotaan luvulla $1,03$.
3	$1500 \cdot 1,03^3$	
...	...	
10	$1500 \cdot 1,03^{10}$	
...	...	
t	$1500 \cdot 1,03^t$	

a) Lasketaan päässä: $1500 \cdot 1,03 = 1545$ €

b) $1500 \cdot 1,03^2 = 1591,35$ € Tämän saa päässä kertomalla a-kohdan tuloksen luvulla $1,03$.

c) $1500 \cdot 1,03^{10} = 2015,87$ €

d) $m(t) = 1500 \cdot 1,03^t$, missä m on tilin pääoma ja t on talletuksesta kulunut aika vuosina.

Edellisen esimerkin d-kohdassa muodostettu funktio on eksponenttifunktio. Eksponenttifunktio voidaan yleistää muotoon

$$\boxed{y = a \cdot k^x, \quad 0 < k < 1 \text{ tai } k > 1}$$

Kun $0 < k < 1$, funktio on aidosti vähenevä ja kun $k > 1$, funktio on aidosti kasvava.

Ohjeita harjoitustehtävien eksponenttifunktion muodostamiseen.

1. Määritä tarkasteltavan suureen muutoskerroin. Eksponentiaalisessa kasvussa (esimerkiksi korkolaskuissa) muutoskerroin on $1 + p$, jossa p on suhteellinen muutos (korkolaskuissa korkoprosentti). Eksponentiaalisessa vähenemisessä taas kerroin on $1 - p$.
2. Tarvittaessa muodosta taulukkoa alkaen nollasta yllä olevan esimerkkitehtävän mukaan.
3. Muodosta eksponenttifunktio. Esimerkiksi siten, että korvaat taulukossa muuttuvat luvut muuttujilla.

Harjoitustehtävä 152. Eläintutkijat selvittivät saarelle levinneen vieraslajin populaation kasvua. He havaitsivat, että populaatio kasvaa joka vuosi 50%. Vuoden 2000 alussa populaation suuruus oli 80 yksilöä. Kuinka suureksi populaatio on kasvanut vuoden 2002 loppuun mennessä, jos kasvu pysyy samanlaisena. Muodosta populaation suuruus ajan funktiona (vuodesta 2000 eteenpäin), kun kasvu pysyy samanlaisena. Taulukoi funktion arvoja välillä vuotta ja piirrä kuvaaja.

Vastaus

Harjoitustehtävä 153. Ratkaise yhtälöt. (Ilman laskinta)

a) $5 \cdot x^3 = 320$ b) $\dfrac{t^2}{6} = 24$ c) $4x^4 = 324$ d) $50h^2 = 72$

Vastaus

Harjoitustehtävä 154. Erään lääkeaineen pitoisuus potilaan elimistössä pienenee 25% tunnissa. Potilasta hoidettiin 160 milligramman kerta-annoksella, joka annettiin suoraan suoneen. Muodosta funktio, joka kuvaa lääkeaineen määrää elimistössä ajan funktiona. Piirrä kuvaaja. Kuinka paljon lääkeainetta on potilaan elimistössä 3 tunnin kuluttua?

Vastaus

Potenssilaskuja 2

Eksponenttina nolla tai negatiivinen luku

Katsotaan, mitä saadaan, kun jokin luku korotetaan potenssiin nolla. Mitä arvelisit tästä tulevan. Vastaus saattaa olla aluksi hieman epäintuitiivinen, sillä esimerkiksi 3^0 ei ole nolla. Selvitetään, mitä se on ja selvitetään myös miten saadaan laskettua potenssilaskuja, joissa eksponentti on negatiivinen.

Käydään aihetta läpi ensin johdantotehtävän avulla ja sen jälkeen harjoitellaan vahva perusta näiden peruslaskutoimitusten hallinnalle.

Harjoitustehtävä 155. Laske seuraavat potenssilaskut kahdella tavalla. Sievennä lasku ensin säännöllä $\frac{k^a}{k^b} = k^{a-b}$. Sen jälkeen laske se purkamalla potenssit auki ja supistamalla.

a) $\frac{4^3}{4^5}$ b) $\frac{5^3}{5^6}$ c) $\frac{t^3}{t^3}$, $t \neq 0$

Vastaus

Harjoitustehtävä 156.

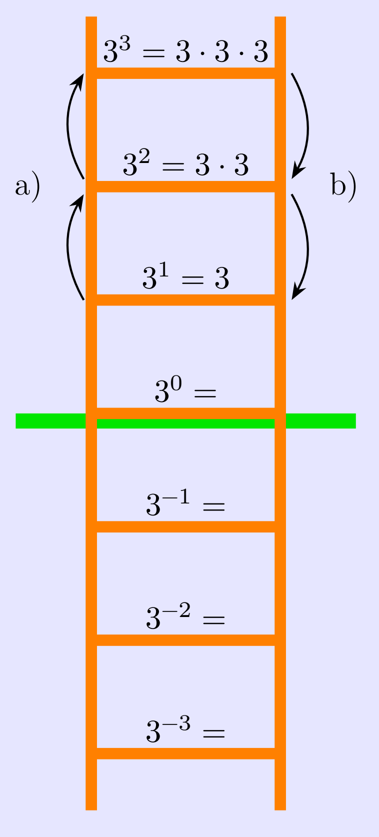
Opetellaan laskemaan kolmosen miinuspotensseja potenssitikapuiden avulla. Potenssitikapuissa eksponentti on askelman numero; esimerkiksi 3^1 tarkoittaa, että ollaan ensimmäisellä askelmalla maasta katsoen, 3^0 on maantasolla ja miinusmerkkiset ovat kellarin puolella.

Kuvitellaan, että seistään jollakin tikapuiden maan päällä olevalla askelmalla. Esimerkiksi askelmalla 1 tai 2.

a) Mikä laskutoimitus askelman luvulle pitää tehdä, jos halutaan nousta yksi askel ylös päin?

b) Mikä laskutoimitus askelman luvulle pitää tehdä, jos halutaan laskeutua yksi askel alas päin?

c) Päättele loput kolmosen potenssit kiipemällä tikapuita alas päin.



Vastaus

Harjoitustehtävä 157. Edellisen esimerkin mukaan laske kaikki viiden potenssit välillä 5^3 ... 5^{-3}.

Vastaus

Edellisen tehtävän potenssitaulukosta huomataan, että esimerkiksi 5^2 ja 5^{-2} ovat toistensa käänteislukuja. Samoin parit 5^1 ja 5^{-1} sekä 5^{-3} ja 5^3. Lisäksi huomataan, että mikä tahansa luku, poislukien nolla, korotettuna potenssiin nolla tuottaa ykkösen. Tästä voidaan muodostaa kaksi potenssilaskujen tärkeää sääntöä.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^0 = 1, \quad a \neq 0 \\[1em] a^{-p} = \dfrac{1}{a^p} \end{array}}$$

Muodostetaan helppo päässälaskusääntö potenssilaskuille, joissa on negatiivinen ekspnentti. Laske ensin vastaava potenssilasku positiivisella eksponentilla ja muodosta käänteisluku.

Esimerkki: Lasketaan päässä 8^{-2}

Lasketaan ensin $8^2 = 64$. 8^{-2} on luvun 64 käänteisluku. $8^{-2} = \frac{1}{64}$.

Näistä säännöistä seuraa, että minkä tahansa luvun, nolla poislukien, a käänteisluku voidaan ilmaista a^{-1} tai minkä tahansa luvun a^p käänteisluku voidaan ilmaista a^{-p} Lisätään nämä kappaleessa Käänteisluku esitettyyn taulukkoon.

luku	käänteisluku
a	$\frac{1}{a}$
$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
a	a^{-1}
a^p	a^{-p}

Käänteisluvun käänteisluku ja negatiivinen eksponentti

Edellä opittiin, miten potenssilaskun käänteisluku voidaan muodostaa helposti. Lisäksi tiedetään, että jonkin luvun käänteisluvun käänteisluku on luku itse. Näin ollen minkä tahansa **potenssilaskun kantaluvun voi muuttaa käänteisluvuksi ja eksponentin vastaluvuksi yhtä aikaa** jolloin laskun arvo pysyy samana.

Esimerkki: Lasketaan $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Käytetään periaatetta kantaluvun voi muuttaa käänteisluvuksi ja eksponentin vastaluvuksi yhtä aikaa.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Harjoitustehtävä 158. Laske potenssilaskut ilman laskinta.

a) 4^0 b) 15^{-1} c) 11^{-2} d) 2^{-3} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ f) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 159. Laske ilman laskinta

a) 6^2 b) 6^{-2} c) -6^2 d) -6^{-2} e) $(-6)^2$ f) $(-6)^{-2}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 160. Taulukoi 2^x:n arvoja x:n kokonaislukuarvoilla . Piirrä kuvaaja. Arvioi kuvaajan perusteella, mitä olisi $2^{\frac{1}{2}}$ (tarkka arvo opitaan selvittämään myöhemmin).

Vastaus

Harjoitustehtävä 161. Ilmaise luvut kokonaisluvun potenssina, etsi aina pienin mahdollinen kokonaisluku.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{81}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 162. Sievennä lausekkeet.

a) $\frac{a^3}{a^8}$, ilmaise luvun a potenssina b) $(ab)^{-3} \cdot a^2b^4$

Vastaus

Negatiivinen eksponentti ja eksponenttifunktio

Eksponenttina olevan muuttujaan voidaan sijoittaa hyvin negatiivisia arvoja. Tällöin selvitetään eksponentiaalisesti muuttuvan muuttujan arvoja ennen alkuarvoa.

Harjoitustehtävä 163. Erään yrityksen liikevaihto on kasvanut viiden vuoden ajan 25% joka vuosi. Vuonna 2013 liikevaihto oli 565 000 euroa (tuhannen euron tarkkuudella). Kuinka suuri liikevaihto on vuonna 2015, jos kasvu jatkuu samanlaisena? Kuinka suuri liikevaihto oli vuosina 2012 ja 2008? Muodosta liikevaihto ajan funktiona (vuosina vuodesta 2013) ja piirrä kuvaaja.

Vastaus

Murtolukueksponentti

Tässä kappaleessa opitaan laskemaan potenssilaskuja, joissa eksponenttina on murtoluku. Esimerkiksi $16^{\frac{1}{2}}$ tai $125^{\frac{2}{3}}$.

Haetaan ensin intuitiota erilaisiin murtolukueksponentteihin johdantotehtävien avulla ja lopuksi opiskellaan yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 164. Selvitä seuraavien ohjeiden mukaan kuinka paljon on $9^{\frac{1}{2}}$?

I) Piirrä neliö ja merkitse sen sivun pituudeksi $9^{\frac{1}{2}}$.
II) Laske neliön pinta-ala (muista potenssin potenssin kaava).
III) Määritä uudestaan neliön sivun pituus (mikä oli peruskoulussa opetettu tapa selvittää neliön sivun pituus, kun pinta-ala tunnetaan?)
IV) Johtopäätös?

Vastaus

Harjoitustehtävä 165. Selvitä seuraavien ohjeiden mukaan kuinka paljon on $8^{\frac{1}{3}}$?

I) Piirrä kuutio ja merkitse sen särmän pituudeksi $8^{\frac{1}{3}}$.
II) Laske kuution tilavuus (muista potenssin potenssin kaava).
III) Määritä uudestaan kuution särmän pituus (mikä oli peruskoulussa opetettu tapa selvittää kuution särmän pituus, kun pinta-ala tunnetaan?)
IV) Johtopäätös?

Vastaus

Kaksi laskutoimitusta, jotka yleisesti kumoavat toisensa ovat toistensa käänteistoimituksia. Edellisissä tehtävistä huomattiin, että esimerkiksi toiseen potenssiin korotus ja puolikkaaseen potenssiin korotus kumoavat toisensa.

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

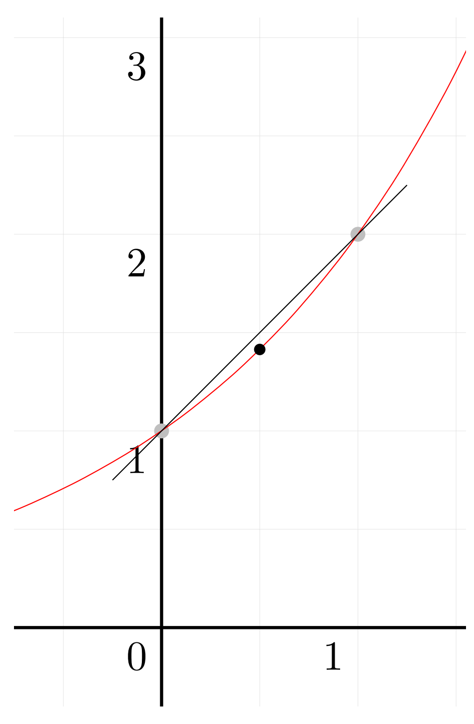
Samoin kolmanteen ja kolmasosaan potenssiin korotus kumoavat toisensa.

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

Näin ollen ne ovat toistensa käänteistoimituksia. Yläasteella toisaalta määriteltiin neliöjuuri toiseen potenssiin korotuksen käänteistoimitukseksi ja kuutiojuuri kolmanteen potenssiin korotuksen käänteistoimitukseksi. Nyt nähdään, että puolikkaaseen potenssiin korotus on sama kuin neliöjuuren ottaminen ja kolmasosaan potenssiin korotus sama kuin kuutiojuuren ottaminen.

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}} \qquad \text{ja} \qquad \boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$$

Kappaleessa negatiivinen eksponentti arvioitiin, mitä olisi $2^{\frac{1}{2}}$ ja todettiin sen olevan hiukan vähemmän kuin $1,5$. Arvioksi saatiin n. $1,4$. Nyt tiedämme, että $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4142$, mikä sopii kappaleessa esitettyyn 2^x-kuvaajaan erinomaisesti.



Lopulta sama sääntö pätee mille tahansa eksponentille, joka muotoa $\frac{1}{n}$. Eli n potenssiin korotus kumoutuu $\frac{1}{n}$ potenssiin korotuksella. Näin ollen $\frac{1}{n}$ potenssiin korotus on sama kuin n juuren $\sqrt[n]{}$ ottaminen.

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Muistathan vielä sanallisen muistisäännön yleiselle juurelle?

$$\sqrt[n]{a} = \text{"mikä luku korotettuna potenssiin } n \text{ tuottaa } a\text{:n"}$$

Harjoitustehtävä 166. Laske ilman laskinta.

a) $36^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $81^{\frac{1}{4}}$ d) $32^{\frac{1}{5}}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 167. Ilmaise murtopotenssin avulla a) $\sqrt{c}$ ja b) $\sqrt[5]{h}$. Ilmaise juurimerkinnän avulla c) $a^{\frac{1}{3}}$.

Vastaus

Harjoitustehtävä 168. Laske ilman laskinta.

a) $25^{-\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{1}{5}}$

Vastaus

Katsotaan seuraavaksi, miten selvitään tilanteesta $a^{\frac{m}{n}}$. Esimerkiksi, miten lasketaan $8^{\frac{2}{3}}$.

Harjoitustehtävä 169. Selvitä potenssilaskut ohjeiden mukaan.

I) Muuta murtoluku kertolaskuksi $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$.
II) Muuta potenssin potenssiksi.
III) Laske loppuun.

a) $16^{\frac{3}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$

Vastaus

Murtopotenssi $k^{\frac{m}{n}}$ voidaan muuttaa juuren ja potenssin yhdistelmäksi käyttämällä potenssin potenssin kaavaa.

$$k^{\frac{m}{n}} = k^{\frac{1}{n}\cdot m} = (k^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{k}^m$$

Eli Lyhyesti:

$$\boxed{k^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{k}^m, \qquad k \geqslant 0}$$

Lukiotason matematiikassa rajoitetaan murtopotenssien tarkastelu tapauksiin, joissa kantaluku on epänegatiivinen.

Harjoitustehtävä 170. Laske ilman laskinta.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ b) $125^{\frac{2}{3}}$ c) $32^{\frac{7}{5}}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 171. Ilmaise murtopotenssin avulla a) $\sqrt{r}^5$ ja b) $\sqrt[4]{k}^3$.

Ilmaise juuren ja potenssin avulla c) $l^{\frac{9}{2}}$ ja d) $d^{\frac{2}{5}}$.

Vastaus

Harjoitustehtävä 172. Laske ilman laskinta.

a) $125^{-\frac{2}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ c) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 173. Tehdas valmistaa erikokoisia kannettomia neliöpohjaisia laatikoita pellistä. Laatikon korkeus on kahdeksasosa pohjasärmän pituudesta. Ilmaise laatikkoon tarvittavan pellin määrä neliödesimetreissä laatikon tilavuuden, litroissa (=kuutiodesimetri), funktiona. Käytä murtolukueksponenttia. Kuinka paljon tarvitaan peltiä astiaan, jonka tilavuus on 512 dm^3.

Vastaus

Harjoitustehtävä 174. Bakteeriviljelmän massa kasvoi $1,9$-kertaiseksi 45 minuutissa. Kuinka moninkertaiseksi viljelmän massa kasvaa tunnissa, kun ravintoliuosta ja tilaa kasvulle on riittävästi?

Vastaus

Lisää tehtäviä potenssilaskuista

175. Luonnonsuojelualueen peurakannan suuruudeksi laskettiin viime vuonna noin 1500 yksilöä ja tänä vuonna noin 1800 yksilöä. Mikä on peurojen lukumäärä 10 vuoden kuluttua, jos kasvuprosentti on sama koko ajan?

Vastaus

176. Teollisuusalueen rikkipäästöjä halutaan vähentää 50 % viidessä vuodessa. Monta prosenttia päästöjä pitäisi vähentää vuosittain, jotta tavoitteeseen päästään?

Vastaus

177. Pankkitilille talletettiin 4000 euroa. Tili tyhjennettiin tasan kaksi vuotta myöhemmin, jolloin tilillä oli $4368,10$ euroa. Mikä oli tilin vuosikorko?

Vastaus

178. Floridan rannikolta on löydetty fossiilisia hain hampaita, jotka ovat kuuluneet kymmeniätuhansia vuosia sitten sukupuuttoon kuolleelle valkohain esi-isälle. Kuinka vanha on hain hammas, kun sen sisältämän radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14-pitoisuus on pienentynyt 9 prosenttiin elävässä organismissa olevasta C-14-pitoisuudesta? Isotoopin C-14 puoliintumisaika on noin 5 730 vuotta. (yo lm s2000/7)

Vastaus

179. Jaanan synnyttyä isoäiti teki 3000 euron määräaikaistalletuksen, jonka Jaana saa käyttöönsä täyttäessään 18 vuotta. Talletuksen vuosikorko on $3,25$ % ja se on sama koko talletuskauden ajan. Kuinka suureksi pääoma kasvaa Jaanan 18-vuotissyntymäpäivään mennessä?

Vastaus

180. Tarkastellaan arkkitehtitoimistossa kalenterivuosittain juodun kahvin määrää. Taulukossa esitetään annetun vuoden kulutuksen muutos edeltävän vuoden kulutukseen verraten.

a) Miten monta prosenttia vuosittainen kulutus kasvoi vuodesta 2004 vuoteen 2007?

b) Miten suuri vakio vuotuinen prosentuaalinen muutos a-kohdan tarkasteluvälillä olisi johtanut samaan kokonaismuutokseen?

Vuosi	Muutos
2003	3,00 %
2004	2,25 %
2005	3,10 %
2006	−4,20 %
2007	6,50 %

Anna vastaukset $0,01$ prosenttiyksikön tarkkuudella.

(arkm 2008/1)

Vastaus

181. Radioaktiivisen Promethium 147 isotoopin määrä vähenee 23,2% vuodessa. Laboratoriossa tutkittavassa näytteessä on 1,50 grammaa Promethium 147:aa. Kuinka paljon näytteessä on tätä isotooppia jäljellä

a) 4 kuukauden

b) 6 kuukauden

c) 8 kuukauden kuluttua?

d) Kuinka paljon näytteessä oli kyseistä isotooppia puolitoista vuotta sitten, kun se tuotiin laboratorioon?

Vastaus

182. Erään kansallispuiston hirvikanta on kasvanut vuosittain noin 8 % ja on nyt 4200 yksilöä. Kuinka suuri hirvikanta oli 5 vuotta sitten?

Vastaus

183. Yrityksen liikevaihto on kasvanut neljän vuoden ajan 17 % vuosittain ja on nyt $12,5$ miljoonaa euroa. Kuinka paljon liikevaihto oli viime vuonna? Kuinka paljon liikevaihto on viiden vuoden kuluttua, jos vuosittainen kasvu säilyy samanlaisena?

Vastaus

184. Radonin isotoopin 225 puoliintumisaika on 15 vuorokautta. Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa

a) 30 vuorokaudessa

b) yhdessä vuorokaudessa

c) kolmessa viikossa?

Vastaus

185. Radioaktiivisen isotoopin cesium 137 määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena $2,3$ % vuodessa. Ydinjätevarastossa on nyt $3,28$ kg ainetta.

a) Muodosta funktio, joka ilmaisee isotoopin määrän n vuoden kuluttua.

b) Kuinka paljon isotooppia on jäljellä 15 vuoden kuluttua?

c) Isotooppierä tuotiin varastoon $1,5$ vuotta sitten. Mikä erän suuruus silloin oli?

Vastaus

186. Heijastamaton lasi, jonka paksuus on $0,8$ cm, absorboi 25 % valosta. Kuinka monta prosenttia valosta absorboi samasta materiaalista tehty lasi, jonka paksuus on

a) $1,3$ cm   b) $0,4$ cm?

Vastaus

187. Radonin isotoopin 244 puoliintumisaika on $3,66$ vuorokautta. Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa

a) vuorokaudessa

b) viikossa?

Vastaus

188. $1,5$ cm paksu ilmansuodatin suodattaa 78 % tiettyä kokoa suuremmista pölyhiukkasista. Kuinka monta prosenttia suodattaa samasta materiaalista tehty $1,0$ cm paksu suodatin?

Vastaus

189. Kaisan synnyttyä eno avasi hänelle säästötilin, jonka vuosittainen korko on $4,35$ %. Tilille kerättiin lahjoituksina yhteensä 2000 euroa. Kaisa saa tyhjentää tilin täyttäessään 20 vuotta. Kuinka suureksi alkupääoma tähän mennessä kasvaa, kun korkoprosentti on koko ajan sama?

Vastaus

190. Erään pienen muuttotappiokunnan väkiluku on pienentynyt 30 % viimeisen kolmen vuoden aikana (yhtä monta prosenttia joka vuosi) ja on nyt 16 400.

Jos muutosprosentti pysyy koko ajan samana, kuinka suuri kunnan väkiluku on

a) vuoden,

b) 6 vuoden kuluttua?

c) Kuinka suuri kunnan väkiluku oli kaksi vuotta sitten?

Vastaus

Logaritmit

Logaritmin määritelmä

Tässä kappaleessa tutustutaan uuteen peruslaskutoimitukseen, logaritmiin. Tee ensin kuitenkin johdantotehtävä.

Harjoitustehtävä 191. Päättele ratkaisut yhtälöihin.

a) $3^x = 9$ b) $5^t = 125$

Vastaus

Yläasteella ja tämän kurssin tähän mennessä opituilla laskutoimituksilla (yhteen-, vähennys-, kerto-, jako-, potenssi- ja juurilaskut) ei pysty saattamaan edellisen tehtävän yhtälöitä ratkaistuun muotoon. Koska hyvin usein tulee vastaan tämän tyyppisiä tilanteita, määritellään uusi ja samalla viimeinen peruslaskutoimitus, logaritmi. Yllä olevan kaltaiset yhtälöt voidaan kirjoittaa ratkaistuun muotoon logaritmin avulla.

$$\begin{aligned} 3^x &= 9 \\ x &= \log_3(9) \quad \text{"kolmekantainen logaritmi luvusta yhdeksän"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^t &= 125 \\ t &= \log_5(125) \quad \text{"viisikantainen logaritmi luvusta 125"} \end{aligned}$$

Logaritmi voidaan määritellä seuraavasti:

$$k^p = a \quad \Leftrightarrow \quad p = \log_k(a)$$

Logaritmille voidaan muotoilla ymmärrettävä sanallinen, kysymysmuotoinen määritelmä:

$$\log_k(a) = \text{"mihin potenssiin kantaluku } (k) \text{ pitää korottaa, jotta saadaan } a\text{"}$$

Näin ollen esimerkiksi $\log_3(9)$ saadaan laskettua, kun mietitään, mihin potenssiin kolme pitää korottaa, jotta saadaan yhdeksän. Kokeilemalla (tai millä tahansa keinolla) saadaan selville, että kysytty luku on kaksi, joten

$$\log_3(9) = 2.$$

$\log_5(125)$ saadaan selville samalla tavalla. Kokeillaan, olisiko 5 korotettuna toiseen potenssiin 125:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 < 125$$

Ei ole, $\log_5(125)$ on enemmän kuin kaksi. Kokeillaan lukua 3:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$$

Tämä toimii. 5 pitää korottaa potenssiin 3, jotta saadaan 125. Näin ollen

$$\log_5(125) = 3.$$

Harjoitustehtävä 192. Laske päässä seuraavat logaritmit.

a) $\log_6(36)$ b) $\log_2(8)$ c) $\log_3(81)$ d) $\log_{11}(11)$ e) $\log_8(1)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 193. Muuta yhtälöt ratkaistuun muotoon logaritmin määritelmän avulla ja laske (ilman laskinta).

a) $4^x = 64$ b) $5^x = 625$

Vastaus

Lyhenteitä

$\lg() = \log_{10}()$		kymmenkantainen logaritmi
$ln() = \log_e()$	$e \approx 2,72$	nk. luonnollinen logaritmi, jossa kantaluku, e, on neperin luku
$\text{lb}() = \log_2()$		kaksikantainen (binääri-) logaritmi, hyvin harvinainen lyhenne

Neperin luku (e) on yksi matematiikan merkittävistä vakioista. Neperin luku on nimetty Skottilaisen matemaatikon, ja mm. logaritmien keksijän, John Napierin (1550–1617) mukaan. Joissakin maissa (erityisesti englanninkielisissä) luku tunnetaan eulerin lukuna Sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin (1707–1783), joka vakiinnutti e:n neperin luvun symboliksi, mukaan. Neperin luku on irrationaaliluku samaan tapaan kuin π. Sen likiarvo viiden ensimmäisen desimaalin tarkkuudella on $2,71828$. Neperin lukuun tutustutaan tarkemmin differentiaalilaskennan yhteydessä.

Logaritmien laskeminen laskimella

Monissa laskimissa voi minkä tahansa logaritmin laskea normaalisti. Joissakin laskimissa on kuitenkin toiminnot vain kymmenkantaiselle logaritmille (log- tai lg-näppäin) ja luonnolliselle logaritmille (ln-näppäin). Näillä laskimilla muut logaritmit voidaan kuitenkin laskea seuraavan kaavan mukaan

$$\log_k(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(k)}.$$

Esimerkiksi, jos pitäisi laskea seitsemänkantainen logaritmi luvusta 343, voidaan se kirjoittaa

$$\frac{\log_{10}(343)}{\log_{10}(7)}.$$

Tästä tulokseksi pitäisi tulla 3. Kaava perustellaan kappaleessa kantaluvun vaihto.

Hämmentävästi monissa laskimissa log-näppäimellä pystytään laskemaan vain kymmenkantaisia logaritmeja. Huomaa kuitenkin, että log-merkintä ilman kantalukua ei tarkoita normaalissa matemaattisessa merkintätavassa oikeastaan mitään. Kymmenkantaista logaritmia tulee merkitä aina $\log_{10}()$ tai $\lg()$.

Eksponentin ratkaiseminen

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälö $3 \cdot 4^x + 12 = 780$.

Aloitetaan samoin kuin yhtälönratkaisu yleensä, eli siirretään tuntemattoman eksponentin sisältävä termi vasemmalle ja muut oikealle. Siirretään vasemmalla esiintyvä kertoja tai jakaja myös oikealle. Lopuksi ratkaistaan eksponentti logaritmin avulla.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^x + 12 &= 780 && || -12 \\ 3 \cdot 4^x &= 768 && || : 3 \\ 4^x &= \frac{768}{3} \\ 4^x &= 256 \\ x &= \log_4(256) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 194. Laske kohdat a–e päässä, f-kohdassa voit käyttää laskinta.

a) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$ b) $\lg(1\ 000\ 000)$ c) $\text{lb}(16)$ d) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ e) $\log_9(3)$
f) $\log_{16}(16384)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 195. Ratkaise yhtälöt (ilman laskinta).

a) $5 \cdot 3^x = 135$ b) $4 \cdot 18^t = 144 \cdot 3^t$ c) $13 \cdot 8^x - 48 = 4$

Vastaus

Harjoitustehtävä 196. Vesa sijoitti valmistujaislahjaksi saamansa 3000 euroa pyramidihuijaukseen, joka lupasi rahoille 37 % vuosittaisen tuoton. Hän suunnitteli ostavansa sijoituksella auton, kun sen arvo kasvaa 10 000 euroon. Kuinka monen vuoden kuluttua tavoite saavutetaan, jos pyramidihuijaus ei kaadu sitä ennen?

Vastaus

Harjoitustehtävä 197.

a) Radioaktiivisen radon-222:n puoliintumisaika on $3,82$ päivää. Kuinka monta prosenttia siitä hajoaa yhdessä vuorokaudessa?

b) Curiumin isotoopista 238 hajoaa muiksi alkuaineiksi $2,35\%$ vuodessa. Mikä on kyseisen isotoopin puoliintumisaika?

Vastaus

Kolme muistisääntöä

Tutustutaan logaritmilausekkeiden sieventämiseen ensin esimerkkien avulla. Lopuksi katsotaan yleinen teoria.

Harjoitustehtävä 198. Laske kohdat a ja b ilman laskinta. Päättele vastaukset kohtiin c ja d ja perustele tuloksesi logaritmin määritelmän avulla.

a) $\log_2(2^4)$ b) $\log_5(5^3)$ c) $\log_7(7^5)$ d) $\log_{12}(12^8)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 199. Laske kohdat a ja b ilman laskinta. Päättele vastaukset kohtiin c ja d ja perustele tuloksesi logaritmin määritelmän avulla. Edellinen tehtävä oli helppo älykkyystesti, tämä on vaikea.

a) $6^{\log_6(36)}$ b) $3^{\log_3(81)}$ c) $2^{\log_2(6)}$ d) $15^{\log_{15}(4)}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 200. Laske päässä seuraavat logaritmiparit.

a) $\log_3(9)$ ja $\log_9(3)$

b) $\log_5(125)$ ja $\log_{125}(5)$

c) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ ja $\log_{\frac{1}{16}}(2)$

Mitä päätelmiä voisit tehdä laskujen tuloksista.

Vastaus

Muistisääntö 1: $\log_k(k^p) = p$. Tämä on helppo älykkyystesti. Mietitään siis, mihin potenssiin k pitäisi korottaa, jotta saadaan k^p. Oikea vastaus on luonnollisesti p:hen.

Muistisääntö 2: $k^{\log_k(a)} = a$. Tämän perustelu on vaikea älykkyystesti. Muista laskujärjestyssopimus. Ensin selvitetään, mihin potenssiin k pitäisi korottaa, jotta saadaan a. Seuraavaksi k korotetaan edellä määrättyyn potenssiin. Mitä saadaan? Tietenkin a. Toinen tapa: Mitä saadaan, kun luku k korotetaan potenssiin, johon kun se korotetaan, saadaan a? Tietenkin a.

Muistisääntö 3: Logaritmin käänteisluku saadaan vaihtamalla kantaluvun ja logaritmin sisällä olevan luvun paikkaa. Lisätään tämä sääntö kappaleessa ”Käänteisluku” esitettyyn ja kappaleessa ”negatiivinen eksponentti” jatkettuun taulukkoon.

luku	käänteisluku
a	$\frac{1}{a}$
$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
a	a^{-1}
a^p	a^{-p}
$\log_a(b)$	$\log_b(a)$

Logaritmien muistisäännöt tiivistettynä:

$$\boxed{\begin{aligned} &\log_k(k^p) = p \\ &k^{\log_k(a)} = a \\ &\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \end{aligned}}$$

Harjoitustehtävä 201. Laske seuraavat logaritmit ilman laskinta.

a) $\log_8(8^{\frac{2}{5}})$ b) $150^{\log_{150}(149)}$ c) $2^{5\log_{32}(3)}$ d) $\log_{14}(\sqrt{14})$

Vastaus

Harjoitustehtävä 202. Laske seuraavat logaritmit. Muunna ensin potenssilasku saman kantaiseksi kuin logaritmi.

a) $\log_3(9^5)$ b) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-3}\right)$ c) $8^{\log_2(5)}$ d) $243^{\log_3(10)}$

Vastaus

Potenssin logaritmi

Selvitetään ensin esimerkin kautta, miten potenssin logaritmi $\log_k(a^p)$ saadaan sievennettyä.

Tässä kappaleessa sinun tulee osata edellisen kappaleen kolmesta muistisäännöstä kaksi ensimmäistä ja potenssin potenssin kaava kappaleesta potenssilaskennan perusteet. Jos jossakin näistä on heikkouksia, kertaa ensin ne omista kappaleistaan.

$$\begin{aligned} (k^a)^b &= k^{a\cdot b} && \text{potenssin potenssin kaava} \\ \log_k(k^p) &= p && \text{se helppo älykkyystesti} \\ k^{\log_k(a)} &= a && \text{se vaikea älykkyystesti} \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 203. Laske seuraavat logaritmit ilman laskinta. Muuta ensin logaritmin sisällä oleva potenssilasku samankantaiseksi logaritmin kanssa.

a) $\log_7(49^3)$ b) $\log_3(81^{12})$ c) $\log_2(8^5)$ d) $\log_{27}(9^6)$

Mitä päätelmiä voisit tehdä laskujen tuloksista.

Vastaus

Harjoitustehtävä 204. Ratkaise lausekkeesta u ohjeiden mukaan ja laske u:n arvo laskimella.

I) Lavenna ensin luku 8 logaritmien toisella muistisäännöllä kolmosen potenssiksi.

II) Käytä potenssin potenssin kaavaa.

III) Sievennä näin saatu lauseke logaritmien ensimmäisellä muistisäännöllä.

$$\log_3(8^u) = 12 \cdot \log_3(2)$$

Vastaus

Eksponentin siirtosääntö

Logaritmin sisällä olevan eksponentin voi siirtää logaritmin eteen kertojaksi tai toisin päin, logaritmin kertojan voi siirtää logaritmin sisällä olevan jäsenen eksponentiksi.

$$\begin{aligned} \log_k(a^p) &= \log_k([k^{\log_k(a)}]^p) && \text{Kirjoitetaan luku } a \text{ uudestaan muotoon } k^{\log_k(a)}. \\ &= \log_k(k^{\log_k(a)\cdot p}) && \text{Käytetään potenssin potenssin kaavaa.} \\ &= \log_k(k^{p\log_k(a)}) && \text{Vaihdetaan eksponentissa kertolaskun tekijöiden paikkaa, koska näin näyttää kivemmalta.} \\ &= p\log_k(a) && \text{Puretaan muistikaavalla (se helppo älykkyystesti).} \end{aligned}$$

$$\log_k(a^p) = p\log_k(a)$$

Harjoitustehtävä 205. Laske seuraavat laskut, käytä eksponentin siirtosääntöä.

a) $\log_{11}(121^5)$ b) $\log_{\frac{1}{3}}(9^{14})$ c) $\log_{125}(5^{-3})$

Vastaus

Harjoitustehtävä 206. Logaritmin sisällä olevan eksponentin voi siirtää logaritmin eteen kertojaksi. Käänteisesti logaritmin kertojan voi siirtää logaritmin sisälle eksponentiksi. Sievennä ja laske seuraavat logaritmilaskut ilman laskinta.

a) $\log_3(256) \cdot \log_4(3)$ b) $\log_{32}(9) \cdot \log_9(8)$

c) Osoita sääntö, logaritmin kantaluku saadaan vaihtamalla logaritmin jäsenten paikkaa, oikeaksi. Hyödynnä tietoa, että käänteislukujen tulo on yksi.

Vastaus

Logaritmit vanhoilla laskimilla ja kantaluvun vaihto

Tässä kappaleessa katsotaan, mihin aiemmin esitetty tapa laskea logaritmeja laskimilla, joissa on vain 10-kantainen ja luonnollinen logaritmi, perustuu. Harjoitellaan ensin esimerkkien avulla eksponenttifunktion ratkaisemista 10-kantaisen logaritmin avulla ja lopuksi perustellaan kantaluvun vaihtokaava.

Harjoitustehtävä 207. Ratkaise seuraavat yhtälöt ohjeen mukaan käyttäen vain 10-kantaista logaritmia.

I) Muokkaa yhtälö ensin muotoon, jossa tuntematonta eksponenttia sisältävä termi on yksin vasemmalla.

II) Ota yhtälöstä puolittain 10-kantainen logaritmi. (Koska yhtälön puolet ovat yhtä suuria, ovat myös niiden 10-kantaiset logaritmit yhtä suuria)

III) Siirrä vasemmalla tuntematon eksponentti logaritmin kertojaksi.

IV) Jaa puolittain jäljelle jäävällä logaritmilla.

a) $12^x = 20736$ b) $2 \cdot 216^t - 450 = 2142$ c) $\dfrac{1300}{2 \cdot 6^t + 3} = 432$

Vastaus

Harjoitustehtävä 208. Muuta logaritmi annetun kantaisten logaritmien jakolaskuksi ohjeiden mukaan.

I) Tee logaritmilaskusta yhtälö merkitsemällä $x = \log_k(a)$.

II) Muuta yhtälö logaritmin määritelmän avulla eksponenttiyhtälöksi ($k^x = a$).

III) Ota puolittain annetun kantainen logaritmi.

IV) Käytä eksponentin siirtosääntöä ja jaa jäljelle jäävällä logaritmilla.

a) $\log_4(8)$ 2-kantaiseksi logaritmiksi

b) $\log_{243}(27)$ 3-kantaiseksi logaritmiksi

c) $\log_{19}(2476099)$ 10-kantaiseksi logaritmiksi, laske loppuun laskimella

Vastaus

Kantaluvun vaihtokaava

On olemassa kaksi tapaa ratkaista ratkaista eksponenttiyhtälö. Näistä kahdesta tavasta voidaan muotoilla logaritmeille muunnoskaava, jota kutsutaan kantaluvun vaihdoksi.

$$\begin{aligned} a^x &= b \qquad & a^x &= b \\ & & \log_r(a^x) &= \log_r(b) \quad 0 < r < 1 \text{ tai } r > 1 \\ & & x\log_r(a) &= \log_r(b) \\ x &= \log_a(b) & x &= \frac{\log_r(b)}{\log_r(a)} \end{aligned}$$

Oikealla oleva logaritmin kantaluku r on mikä tahansa positiivinen reaaliluku, poislukien yksi. Tulokset yhdistämällä saadaan kantaluvun vaihtokaava.

$$\boxed{\log_a(b) = \frac{\log_r(b)}{\log_r(a)} \qquad 0 < r < 1 \text{ tai } r > 1}$$

Kantaluvun vaihtokaavaa voi joissain tilanteissa käyttää lausekkeen tai laskun sieventämiseen.

Esimerkki: Lasketaan $\dfrac{\log_9(625)}{\log_9(5)}$

$$\frac{\log_9(625)}{\log_9(5)} = \log_5(625) = 4$$

Tutustutaan logaritmien yhteen- ja vähennyslaskuun. Tee ensin seuraavat harjoitustehtävät.

Harjoitustehtävä 209. Laske seuraavat logaritmilaskut ohjeen mukaan.

I) Lavenna lauseke logaritmien ensimmäisen muistisäännön $\log_k(k^p) = p$ avulla.

II) Muuta pluslaskueksponentti potenssien tuloksi.

III) Sievennä logaritmien toisen muistisäännön avulla.

a) $\log_6(2) + \log_6(18)$ b) $\lg(40) + \lg(250)$ c) $\log_{12}(3) + \log_{12}(6) + \log_{12}(8)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 210. Laske seuraavat logaritmilaskut ohjeen mukaan.

I) Lavenna lauseke logaritmien ensimmäisen muistisäännön $\log_k(k^p) = p$ avulla.

II) Muuta miinuslaskueksponentti potenssien osamääräksi.

III) Sievennä logaritmien toisen muistisäännön avulla.

a) $\log_5(100) - \log_5(4)$ b) $\log_9(108) - \log_9(12)$

Vastaus

Logaritmien yhteenlasku voidaan sieventää yhdeksi logaritmiksi. Kaava on johdettuna alla.

$$\begin{aligned}\log_k(a) + \log_k(b) &= \log_k(k^{\log_k(a)+\log_k(b)})\\ &= \log_k(k^{\log_k(a)} \cdot k^{\log_k(b)})\\ &= \log_k(ab)\end{aligned}$$

Samoin voidaan tehdä logaritmien vähennyslaskulle.

$$\begin{aligned}\log_k(a) - \log_k(b) &= \log_k(k^{\log_k(a)-\log_k(b)})\\ &= \log_k\left(\frac{k^{\log_k(a)}}{k^{\log_k(b)}}\right)\\ &= \log_k\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_k(a) + \log_k(b) = \log_k(ab)\\ &\log_k(a) - \log_k(b) = \log_k\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}}$$

Muista, että kaikki kaavat toimivat kumpaankin suuntaan, eli on myös tärkeää oppia muistamaan, että logaritmin sisällä oleva kerto- tai jakolasku voidaan muuttaa logaritmien yhteen- tai vähennyslaskuksi.

Harjoitustehtävä 211. Laske ilman laskinta

a) $\log_8(80) - \log_8(5) + \log_8(4)$ b) $\log_2(5 + \sqrt{17}) + \log_2(5 - \sqrt{17})$

Vastaus

Lisää harjoitustehtäviä logaritmeista

212. Laske ilman laskinta.

a) $\log_3(9)$ b) $\log_5(125)$ c) $\log_8(8)$ d) $\log_4(64)$ e) $\log_2(32)$ f) $\log_7(1)$ g) $\log_{10}(100000)$

Vastaus

213. Tiina talletti 300 euron joulubonuksensa säätötilille, jossa on kiinteä $2,10$ % vuosikorko. Korkotuotosta peritään 30 % lähdevero. Kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo on noussut sadalla eurolla?

Vastaus

214. Eläintutkijat selvittivät jänispopulaation lisääntymistä autiolla saarella. He havaitsivat, että populaatio kaksinkertaistuu joka vuosi, kun elintilaa on riittävästi. Vuonna 2007 he laskivat populaation suuruudeksi n. 192 yksilöä. Elintilaa saarella arveltiin olevan ainakin 6000 yksilölle.

a) Kuinka suuri populaation voidaan arvella olevan vuonna 2010?

b) Kuinka suuri populaatio oli arviolta vuonna 2005?

c) Jäniksiä tuotiin alunperin saarelle 3 yksilöä, yksi koiras ja kaksi naarasta, minä vuonna jänikset tuotiin saarelle?

Vastaus

215. Cesiumin isotoopin 137 määrä pienenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena $2,3$ % vuodessa. Ydinvoimalassa sattuneen vuodon seurauksena ainetta pääsi ympäristöön niin, että sen pitoisuus ylitti turvallisuusrajan viisinkertaisesti. Kuinka monen vuoden kuluttua aineen määrä on sallituissa rajoissa?

Vastaus

216. Laske ilman laskinta.

a) $\log_7(49)$ b) $\log_2(128)$ c) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ e) $\log_4(256)$ f) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right)$

Vastaus

217. Intian väkiluku ylitti arviolta vuonna 1998 toisena valtiona maailmassa miljardin rajan. Kiinan väkiluku oli samana vuonna 1,24 miljardia. Maiden väestönkasvuprosentit olivat Kiina 0,96% ja Intia 1,73%. Milloin Intian väkiluku ylittää Kiinan väkiluvun, jos väestönkasvuprosentit pysyvät samana? (Väestötiedot: World Bank)

Vastaus

218. Hallituksen liikennetyöryhmä päätti ottaa tavoitteeksi liikenneonnettomuuksien lukumäärän puolittamisen siten, että lukumäärää pyritään pienentämään 8 % joka vuosi. Kuinka monta vuotta tavoitteen saavuttamiseen kuluu, jos suunnitelma onnistuu?

Vastaus

219. Radioaktiivisen Strontiumin isotoopin 90 puoliintumisaika on $29,5$ vuotta. Eräälle tyynenmeren saarelle levisi ydinkokeen yhteydessä Strontium-90:ä. Strontiumpitoisuus saarella on noin 80-kertainen turvalliseen määrään verrattuna. Kuinka monen vuoden kuluttua saarella voidaan taas asua?

Vastaus

220. a) $\log_3(81)$ b) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ c) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)$ d) $\log_{\frac{1}{9}}(81)$ e) $\log_{36}(6)$ f) $\log_{125}\left(\frac{1}{5}\right)$ g) $\log_8(32)$

Vastaus

221. Kaikki elävät eliöt sisältävät aineenvaihdunnasta johtuen samassa suhteessa ilmakehän kanssa hiilen eri isotooppeja. Siperian tundralta löydetyn mammutin luuston hiili-14-pitoisuus oli 14% elävän eläimen vastaavasta pitoisuudesta. Hiili-14 puoliintumisaika on 5730 vuotta. Kuinka kauan sitten mammutti eli? (Radiohiiliajoitus on todellisuudessa melko epätarkka iänmääritysmenetelmä.)

Vastaus

222. Erään kunnan väkiluku on kasvanut 2010-luvulla vuosittain aina yhtä monta prosenttia. Vuoden 2010 alussa asukkaita oli 52 300 ja vuoden 2012 alussa 57 600. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, niin minä vuonna kunnan väkiluku ylittää 100 000 asukasta?

Vastaus

223. Vesilaitos puhdistaa juomavettä suodatuslaitteistolla, jonka yksi suodatin pystyy poistamaan 45% sen läpi kulkevan veden epäpuhtauksista. Kuinka monta suodatinta pitää asentaa laitteistoon peräkkäin, jos halutaan poistaa 90% veden epäpuhtauksista?

Vastaus

224. Laske ilman laskinta.

a) $\log_{20}(8000)$ b) $\lg(100)$ c) $\mathrm{lb}(512)$ d) $\log_5(125^4)$

Vastaus

225. Jodin radioaktiivisesta isotoopista 131 hajoaa 8,28% vuorokaudessa. Mikä on kyseisen isotoopin puoliintumisaika?

Vastaus

226. Kaikki elävät eliöt sisältävät aineenvaihdunnasta johtuen samassa suhteessa ilmakehän kanssa hiilen eri isotooppeja. Egyptiläisestä pyramidista löydetyn muumion hiili-14-pitoisuus oli vuonna 1970 vähentynyt 65 prosenttiin. Arvioi, miltä ajalta muumio on peräisin.

Vastaus

Polynomilaskuja 2

Harjoitustehtävä 227. Tiedät, että suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla sivujen pituudet keskenään.

Piirrä suorakulmio, jonka toinen sivu on $a+b$ ja toinen $c+d$. Merkitse a:n ja b:n sekä c:n ja d:n rajakohdat. Jaa suorakulmion neljään pienempään suorakulmioon vetämällä rajakohdista sivua vastaan kohtisuorat viivat ison suorakulmion poikki. Määritä jokaisen pienemmän suorakulmion pinta-alat. Ilmaise ison suorakulmion pinta-ala kahdella tavalla: sivujen pituuksien tulona ja pienempien suorakulmioiden pinta-alojen summana.

Vastaus

Kappaleessa monomin ja polynomin tulo opittiin sieventämään lauseke $a(b+c)$. Muista, että koska kertolasku on vaihdannainen, joten sama periaate toimii myös lausekkeelle $(b+c)a$.

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ab + ac$$

Tarkastellaan kahden binomin tuloa $(a+b)(c+d)$ ja puretaan se auki soveltamalla yllä olevaa periaatetta.

$$(a+b)\underbrace{(c+d)} = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Kahden binomin tulo sievennetään siis kertomalla kumpikin ensimmäisen binomin termi kummallakin toisen binomin termillä.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Mikä tahansa muu kahden polynomin tulo saadaan sievennettyä samalla periaatteella.

Esimerkki: Sievennä lauseke $(2x-4)(x+y-7)$.

Muodostetaan auki puretun polynomin termit kertomalla jokainen binomin termi kerran jokaisella trinomin termillä.

$$\begin{aligned}(2x-4)(x+y-7) &= 2x\cdot x + 2x\cdot y + 2x\cdot(-7) + (-4)\cdot x \\ &\quad + (-4)\cdot y + (-4)\cdot(-7) \\ &= 2x^2 + 2xy - 14x - 4x - 4y + 28 \\ (2x-4)(x+y-7) &= 2x^2 + 2xy - 18x + 28\end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 228. Sievennä seuraavat polynomien kertolaskut.

a) $(x-5)(x+8)$ b) $(d^2+1)(2d^2-d-4)$

Vastaus

Binomin neliö

Tässä kappaleessa opitaan muistikaavat yleisimmille polynomilaskennan tilanteille. Näitä ovat summa- tai erotusbinomin neliö $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ja summa- ja erotusbinomin tulo $(a+b)(a-b)$.

Harjoitustehtävä 229. On intuitiivista ajatella, että lausekkeen $(a+b)^2$ voisi sieventää muotoon a^2+b^2, mutta toimiiko se todellisuudessa niin?

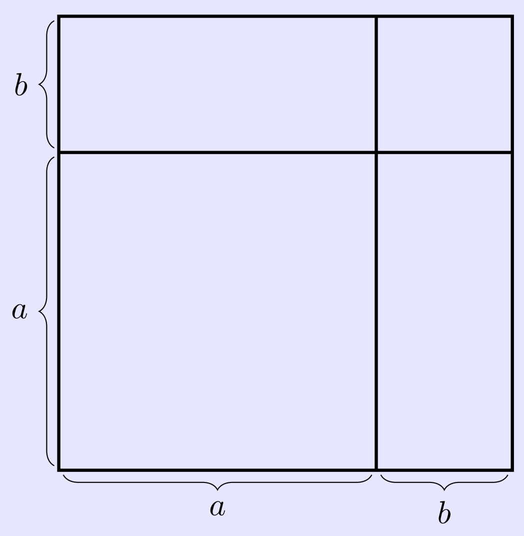
Kopioi oheinen taulukko vihkoosi ja laske lausekkeiden arvot annetuilla a:n ja b:n arvoilla.

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2
1	1		
1	2		
2	2		
2	5		
10	8		

Millä luvuilla/ehdoilla yllä olevista lausekkeista tulee sama luku?

Vastaus

Harjoitustehtävä 230. Tarkastellaan alla olevaa neliötä, joka on jaettu osiin kahdella suoralla.



I) Määritä neliön sivun pituus.

II) Ilmaise neliön pinta-ala edellä määritellyn sivun pituuden avulla.

III) Määritä kuvion osasten, eli kahden pienemmän neliön ja kahden suorakaiteen pinta-alat.

IV) Muodosta ison neliön pinta-ala sen osien summana.

V) Minkä johtopäätöksen voit tehdä?

Vastaus

Binomin neliön, $(a+b)^2$, kaavan voi muodostaa monella tavalla. Edellisessä tehtävässä se tehtiin geometrisesti. Katsotaan, miten binomin neliö saadaan purettua auki algebralla hyödyntymällä kappaleessa polynomien tulo opittua polynomien kertolaskuperiaatetta.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2+ab+ab+b^2\end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Kaikki binomit saadaan purettua auki binomin neliön kaavalla. On kuitenkin hyödyllistä opetella erotusbinomin $(a-b)$ neliö erikoistapauksena.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2\end{aligned}$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Ainoa ero on, että ab-termin etumerkki on miinus.

Summa- tai erotusbinomin neliön muistikaava on siten

$$\boxed{(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2}$$

Harjoitustehtävä 231. Sievennä binomin neliöt auki muistikaavan avulla.

a) $(x+11)^2$ b) $(5-6a)^2$ c) $(2t-t^2)^2$

Vastaus

Harjoitustehtävä 232. Käytä hyödyksesi kaavaa

$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2$$

Mitä tekisit seuraavissa tilanteissa? Pura binomin neliöt auki.

a) $(-a+b)^2$ b) $(-a-b)^2$

Vastaus

Harjoitustehtävä 233. Joskus on tarpeen tunnistaa auki purettu binomin neliö ja tiivistää se takaisin. Tämä on eräs tapa jakaa polynomi tekijöihin. Tunnista seuraavissa tehtävissä binomin neliö ja tiivistä.

a) $t^2-10t+5^2$ b) $c^2+8c+16$ c) $4x^2-12x+9$

Vastaus

Harjoitustehtävä 234. Kaksi positiivista luonnollista lukua (1 ; 2 ; 3 ; ...), joista toinen on kaksi yksikköä toista suurempi, kerrotaan keskenään ja tuloon lisätään luku 1. Osoita, että näin saatu luku on aina jonkin luonnollisen luvun neliö.

Vastaus

Summa- ja erotusbinomin tulo

Harjoitustehtävä 235. Sievennä summa- ja erotusbinomin tulot aiemmin opitulla polynomien kertolaskuperiaatteella.

a) $(a-2)(a+2)$ b) $(5+3x)(5-3x)$

Vastaus

Tarkastellaan summa- ja erotusbinomin tuloa $(a+b)(a-b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) \\ &= a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Summa- ja erotusbinomin tuloon törmää varsin usein matematiikassa. Siksi on hyvä opetella ulkoa muistikaava.

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Harjoitustehtävä 236. Sievennä seuraavat summa- ja erotusbinomin tulot muistikaavan avulla.

a) $(3b-2c)(3b+2c)$ b) $(12+n)(12-n)$

Vastaus

Harjoitustehtävä 237. Neliön muotoisen mainostaulun korkeutta pienennettiin 15 cm ja leveyttä kasvatettiin 15 cm. Kuinka paljon taulun pinta-ala muuttui?

Vastaus

Harjoitustehtävä 238. Joskus on tarpeen tunnista lauseke, joka on muodostunut summa- ja erotusbinomin tulona ja palauttaa se tulomuotoon, eli jakaa se tekijöihin.

Mieti, minkä summa- ja erotusbinomin tulosta seuraavat lausekkeet on sievennetty.

a) $a^2 - 12^2$ b) $49 - y^2$ c) $4r^2 - 1$

Vastaus

Tulon nollasääntö

Harjoitustehtävä 239. Laske kertolaskut

a) $2016 \cdot 0 \cdot 8 \cdot 12$ b) $10 \cdot 100 \cdot 0 \cdot 789 \cdot 0 \cdot 95$.

Päättele edellisen perusteella ratkaisut yhtälöihin

c) $5 \cdot x \cdot 12 = 0$ d) $12t \cdot 291u \cdot 15 = 0$.

Vastaus

Kertolaskulla on sellainen mukava ominaisuus, että jos ihan mitä tahansa kertoo nollalla, saadaan tulokseksi aina nolla. Eli vaikka kertolaskussa olisi kuinka monta, kuinka isoa tahansa, tekijää, siitä tulee nolla, jos yksikin tekijöistä on nolla.

Toisaalta ei ole olemassa sellaisia nollasta poikkeavia lukuja, jotka kerrottuna keskenään tuottaisivat nollan. Eli kertolaskun lopputulos ei voi olla nolla, jos yksikään tulon tekijöistä ei ole nolla.

Kertolaskun lopputulos on nolla **jos ja vain jos** yksi tai useampi tulon tekijöistä on nolla.

Tulon nollasääntö on joskus kätevä apu yhtälönratkaisussa. Otetaan esimerkiksi yhtälö

$$5x(9 - x) = 0,$$

jossa lausekkeet $5x$ ja $9 - x$ on kerrottu keskenään. Jotta vasemman puolen lauseke olisi nolla, on joko $5x$:n oltava nolla tai binomin $9 - x$ oltava nolla. Yhtälö voidaan ratkaista hajottamalla se kahteen osaan.

$$\begin{aligned} 5x(9 - x) &= 0 \\ 5x = 0 \quad &\text{tai} \quad 9 - x = 0 \\ & \quad\quad\; -x = -9 \\ x = 0 \quad & \quad\quad\quad\;\; x = 9 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön avulla saatiin selville yhtälön kaksi ratkaisua. Lisäksi tulon nollasäännön perusteella tiedetään, että yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja.

Harjoitustehtävä 240. Ratkaise yhtälöt tulon nollasäännön avulla.

a) $(5 + t)t = 0$ b) $25x(3x^2 - 12) = 0$ c) $(4a^2 - 1)(a^3 + 8) = 0$

Vastaus

Toisen asteen yhtälö

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt

Käydään seuraavissa harjoituksissa läpi toisen asteen yhtälön ratkaisemista. Seuraavassa kappaleessa opitaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava, jolla saadaan mikä tahansa täydellinen toisen asteen yhtälö ratkaistua helposti. Vaikka olisitkin jo oppinut ratkaisukaavan muualla, opettele silti toisen asteen yhtälön ratkaiseminen ilman kaavaa tämän kappaleen tehtävien avulla.

Aloitetaan ensin harjoittamalla sitä kuuluisaa intuitiota. Seuraavan harjoituksen tehtävät on helppo ratkaista tähän mennessä opituilla tavanomaisilla yhtälönratkaisutaidoilla.

Harjoitustehtävä 241. Ratkaise tuntematon seuraavissa yhtälöissä (yhtäkään binomin neliötä ei tarvitse purkaa auki).

a) $x^2 = 9$
b) $b^2 - 16 = 0$
c) $9y^2 + 2 = 38$
d) $(x-5)^2 = 16$
e) $(5t-10)^2 - 20 = 5$

Vastaus

Edellisessä tehtävässä opit muun muassa ratkaisemaan toisen asteen yhtälön, josta puuttuu ensimmäisen asteen termi. Esimerkiksi $ax^2 + c = 0$ tai $ax^2 = c$.

Lisäksi opit ratkaisemaan vastaavan tilanteen, jossa tuntematon oli binomin neliön sisällä. Esimerkiksi $(ax+b)^2 = c$. Tätä taitoa tarvitset myöhemmin, kun ratkotaan täydellisiä toisen asteen yhtälöitä.

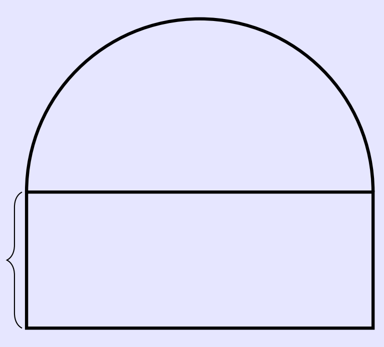
Katsotaan seuraavaksi, miten saadaan ratkaistua toisen asteen yhtälö, josta puuttuu vakiotermi. Tässä tarvitset tulon nollasääntöä. Lisäksi sinun pitäisi osata polynomin jakaminen tekijöihin yhteisten tekijöiden erottamisella. Kertaa ne tarvittaessa omista kappaleistaan.

Harjoitustehtävä 242. Ohjeet: Aloita kuten yhtälönratkaisu yleensä, eli siirrä tuntematonta sisältävät yhtälön vasemmalle puolelle. Jaa vasen puoli tekijöihin. Käytä tulon nollasääntöä.

a) $z^2 + 6z = 0$
b) $e^2 = 2e$
c) $5x^2 - 20x = 0$
d) $8u^2 = -12u$

Vastaus

Harjoitustehtävä 243. Taloon suunniteltiin lisäsiipi, jonka pohja koostuu suorakulmiosta ja siihen liitetystä puoliympyrästä kuvan mukaan. Suorakulmion toinen sivu on 6 metriä. Kuinka pitkä suorakulmion ja puoliympyrän yhteinen sivu on, kun puoliympyrän ja suorakaiteen pinta-alat ovat samat?

6 m


Vastaus

Nyt osaat ratkaista kaikki vaillinaiset toisen asteen yhtälöt. Katsotaan seuraavaksi, miten ratkaistaan täydellinen toisen asteen yhtälö. Esimerkiksi $ax^2 + bx = c$ tai $ax^2 + bx + c = 0$.

Muistat, että esimerkiksi yhtälö $(x-2)^2 = 9$ Pystyttiin ratkaisemaan helposti ottamalla puolittain neliöjuuri.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 9 \qquad || \sqrt{} \\ x-2 &= \pm 3 \\ x &= 2 \pm 3 \\ x = -1 \quad &\text{tai} \quad x = 5 \end{aligned}$$

Lisäksi sinun tulee osata binomin neliön kaava etu- ja takaperin.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Kertaa se tarvittaessa omasta kappaleestaan.

Harjoitustehtävä 244. Binomin neliön tiivistäminen tarkoittaa tässä tehtävässä muunnosta

$$a^2 \pm 2ab + b^2 \to (a \pm b)^2.$$

.

Tunnista yhtälön vasemmalla puolella binomin neliö ja tiivistä. Tämän jälkeen voit ratkaista yhtälön normaalisti loppuun.

a) $v^2 - 6v + 9 = 0$
b) $x^2 - 4x + 4 = 36$
c) $d^2 + 10d + 25 = 1$
d) $9a^2 - 6a + 1 = 49$
e) $4t^2 - 12t + 9 = 16$

Vastaus

Harjoitustehtävä 245. Lisää yhtälöön puolittain sellainen luku, että vasemmalle puolelle tulee binomin neliö ja ratkaise yhtälö. Lisättävä luku saadaan selville, kun ensimmäisen asteen termi muutetaan muotoon $2 \cdot x \cdot c$ joko laventamalla luvulla 2 tai erottamalla tekijä 2. Yhtälöön puolittain lisättävä luku on c^2.

a) $x^2 + 8x = 9$
b) $h^2 - 2h = 8$
c) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$
d) $r^2 - 10r = -25$
e) $b^2 - b = 2$

Vastaus

Harjoitustehtävä 246. Seuraavien yhtälöiden ratkaisu aloitetaan kuten yhtälönratkaisu yleensäkin, eli siirretään tuntemattomia sisältävät termit vasemmalle ja vakiotermit oikealle. Tämän jälkeen jatketaan kuten edellisessä tehtäväsarjassa, eli lisätään yhtälöön puolittain sellainen luku, että vasemmalle tulee binomin neliö. Lopuksi ratkaistaan yhtälö kuten aiemmin on opittu.

a) $c^2 - 6c = 16$
b) $x^2 = 2x + 24$
c) $y^2 + 4y - 5 = 0$
d) $n^2 - 5n - 10 = 4$
e) $b^2 + \frac{b}{4} + \frac{1}{8} = b$
f) $x^2 - \frac{15x}{2} - 4 = 0$
g) $z^2 + z = 3z - \frac{16}{25}$

Vastaus

Harjoitustehtävä 247. Aloitetaan jälleen normaalisti järjestelemällä vakiotermit oikealle ja tuntematonta sisältävät vasemmalle. Seuraavaksi hankkiudutaan eroon toisen asteen termin kertoimesta jakamalla sillä. Jatketaan loppuun kuten aiemmissa tehtävissä.

Toisen asteen termissä voi olla myös nimittäjä, jolloin helpoiten siitä päästään eroon kertomalla sillä. Jos kertoimena on murtoluku, on helpointa jakamisen sijaan kertoa käänteisluvulla.

a) $2m^2 - 8m = 90$
b) $8p^2 - p = 2p^2 + 5p + 12$
c) $\frac{x^2}{4} + 5 = 3x$
d) $3x^2 = 30 - 9x$
e) $-4e^2 + 31e - 42 = 0$
f) $\frac{4}{3}s^2 + s = \frac{5}{6}$

Vastaus

Nyt olet oppinut ratkaisemaan sekä täydelliset että vaillinaiset toisen asteen yhtälöt. Tässä opittua täydellisen yhtälön ratkaisumenetelmää kutsutaan neliöksi täydentämiseksi. Käydään vielä läpi muistilista vaiheista.

1. Siirrä tuntematonta sisältävät termit vasemmalle ja tunnetut oikealle.
2. Eliminoi toisen asteen termin kerroin.
3. Täydennä vasen puoli binomin neliöksi.
   a) Lavenna ensimmäisen asteen termi kahdella tai erottele tekijä kaksi.
   b) Lisää yli jääneen tekijän neliö puolittain yhtälöön.
4. Nyt sinulla on vasemmalla puolella binomin neliö. Tiivistä vasen puoli ja sievennä oikea.
5. Ota puolittain neliöjuuri, jatka loppuun perinteisin yhtälönratkaisun keinoin.

Harjoitustehtävä 248. Apteekkari lisäsi neliön muotoiseen lääkepakkausasetelmaan yhden vaakarivin ja kolme pystyriviä. Tuloksena oli suorakulmion muotoinen asetelma, jossa oli yhteensä 63 pakkausta. Kuinka monta pakkausta asetelmassa oli ennen uusien pakkausten lisäämistä?

Vastaus

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Toisen asteen yhtälölle voidaan johtaa ratkaisukaava. Ratkaisukaava on muodostettu yhtälön niin sanotulle normaalimuodolle, jossa kaikki termit ovat yhtälön vasemmalla puolella.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \| -c \quad \| : a \\
x^2 + {}^{2)}\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + 2\frac{b}{2a}x &= -\frac{c}{a} && \| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - {}^{4a)}\frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \| \sqrt{} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \| - \frac{b}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}
$$

Mikä tahansa yhden tuntemattoman toisen asteen yhtälö saadaan ratkaistua tällä kaavalla sijoittamalla normaalimuotoon saatetusta muodosta toisen ja ensimmäisen asteen kertoimet a ja b sekä vakiotermi c ratkaisukaavaan.

Esimerkki: Ratkaistaan x yhtälöstä $6x^2 + 11x = 2$.

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 11x &= 2 \\
6x^2 + 11x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} \\
x &= \frac{-11 \pm 13}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-11 - 13}{12} & \text{tai} \quad x &= \frac{-11 + 13}{12} \\
x &= \frac{-24}{12} & x &= \frac{2}{12} \\
x &= -2 & x &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Harjoitustehtävä 249. Ratkaise yhtälöt toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $m^2 + 7m = 18$

c) $3a^2 - 4a + 1 = 0$

Vastaus

250. Aidatun jalkapallokentän rakennuskustannukset ovat 65 €/m^2 (nurmikenttä) ja 15 €/m (aita). Kuinka suuren kentän, jonka sivujen suhde on 1:2 saa 7000 eurolla. Anna vastauksena kentän mitat ja pinta-ala.

Vastaus

251. Ratkaise yhtälö $(x+3)(x-3) = 27$.

Vastaus

252. Viherpeukalo haluaa aidata talonsa seinustalle 20 m^2 suorakulmion muotoisen kasvimaan, jonka yhtenä sivuna toimii talon seinä. Hän aikoo käyttää siihen vajan perällä lojuneen 13 metrin pituisen verkkoaidan. Miten kasvimaan mitat tulee valita, kun koko verkkoaita käytetään?

Vastaus

253. Mansikkakauppiaan myyntipaikalla mansikoita menee päivän aikana kaupaksi 190 litraa, kun litrahinta on $4,20$ euroa. Kauppias on huomannut, että jokainen 40 sentin hinnankorotus pienentää myyntiä 38 litran verran. Minkä suuruiseksi mansikoiden litrahinta pitää asettaa, jos kauppias tavoittelee 570 euron päivittäistä myyntiä?

Vastaus

254. Huoltoasema myi bensiiniä kampanjahintaan. Eräs autoilija laski, että hinta oli 21 senttiä halvempi kuin viime viikolla ja 65 eurolla hän sai $10,5$ litraa enemmän polttoainetta. Mikä oli bensiinin kampanjahinta?

Vastaus

255. Rapujuhliin päätettiin ostaa rapuja 500 eurolla. Ravut saatiinkin alennusmyynnistä $1,50$ €/kpl halvemmalla, jolloin niitä saatiin 75 kpl suunniteltua enemmän. Mikä oli rapujen alkuperäinen kappalehinta?

Vastaus

256. Neliön muotoiseen olutpulloasetelmaan lisättiin viisi vaakariviä ja kaksi pystyriviä. Uudessa asetelmassa oli yhteensä 154 pulloa. Kuinka monta pulloa vanhassa asetelmassa oli?

Vastaus

257. Konserttilavan eteen järjestettiin vip-alue, jonka pinta ala on 108 m^2. Sen rajaamiseen kolmelta sivulta tarvittiin 30 metriä aitaa. Neljäntenä sivuna toimi konserttilavan etureuna. Mitkä olivat alueen mitat?

Vastaus

258. Heikki avasi vuoden 2010 alussa tilin ja talletti sinne 900 euroa. Vuoden 2011 alussa hän talletti vielä 900 euroa lisää. Vuoden 2012 alussa tilillä oli $1854,36$ euroa. Korko pysyi koko ajan samana. Mikä oli tilin vuosikorko?

Vastaus

259. Suorakulmion muotoisen tontin sivut ovat 119 m ja 204 m. Tontti lohkotaan omakotitalotonteiksi niin, että sen kahdelta vierekkäiseltä sivulta menetetään yhtä leveät osuudet. Tällöin tontin pinta-ala pienee kolmanneksen. Kuinka levet osuudet tontista menetetään.

Vastaus

Oikeat vastaukset ja malliratkaisut

Harjoitustehtävä 1. Tehtävä

a) $2 + 20 : 4 = 2 + 5 = 7$

b) $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

c) $\dfrac{293 - 5^3}{6} = \dfrac{293 - 125}{6} = \dfrac{168}{6} = 28$

d)

$$\begin{aligned}
2 + 8 \cdot \sqrt{25 - 4^2} - 1 &= 2 + 8 \cdot \sqrt{25 - 16} - 1 \\
&= 2 + 3 \cdot \sqrt{9} - 1 \\
&= 2 + 8 \cdot 3 - 1 \\
&= 2 + 24 - 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 2. Tehtävä

a) Vastaus: $\frac{3}{5}$

Ratkaisu: Muunnetaan $\frac{3}{5}$ 15-osiksi laventamalla kolmella.

$$^{3)}\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$$

Nähdään, että $\frac{9}{15}$ on suurempi kuin $\frac{8}{15}$, joten vastaus on $\frac{3}{5}$.

b) Vastaus : $\frac{4}{5}$

Ratkaisu: Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi toistensa nimittäjillä.

$$^{7)}\frac{4}{5} = \frac{28}{35} \text{ ja } ^{5)}\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$$

$\frac{28}{35}$ eli $\frac{4}{5}$ on luvuista suurempi.

c) Vastaus: $\frac{8}{5}$

Ratkaisu: $\frac{12}{8}$ ei ole suppeimmassa muodossaan. Supistetaan se ensin $\frac{12}{8}^{(4} = \frac{3}{2}$.

Lavennetaan samannimisiksi: $^{5)}\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ ja $^{2)}\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$.

$\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ on luvuista suurempi.

d) Vastaus: 74

Ratkaisu: Muutetaan 7 murtolukumuotoon $7 = \frac{7}{1}$.

Lavennetaan $\frac{7}{1}$ kahdeksalla, jolloin saadaan $\frac{56}{8}$, joka on suurempi kuin $\frac{55}{8}$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 3. Tehtävä

a) $^{4)}\dfrac{25}{9} = \dfrac{100}{36}$ ja $^{3)}\dfrac{31}{12} = \dfrac{93}{36}$ $\dfrac{25}{9}$ on suurempi.

b) $^{5)}\dfrac{7}{12} = \dfrac{35}{60}$ ja $^{2)}\dfrac{17}{30} = \dfrac{34}{60}$ $\dfrac{7}{12}$ on suurempi.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 4. Tehtävä

Emma jätti yhden neljäsosan syömättä, joten hän söi kolme neljäsosaa.

	Syöty osuus	Lavennetaan toisillaan	
Mika	$\frac{3}{5}$	$= {}^{9)\,4)}\frac{3}{5}$	$= \frac{108}{180}$
Joonas	$\frac{7}{9}$	$= {}^{5)\,4)}\frac{7}{9}$	$= \frac{140}{180}$
Emma	$\frac{3}{4}$	$= {}^{5)\,9)}\frac{3}{4}$	$= \frac{135}{180}$

Joonas söi eniten ja Mika vähiten.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 5. Tehtävä

a) $\frac{2}{8}^{(2} = \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{12}^{(4} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{10}{15}^{(5} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{48}{6}^{(6} = \frac{48:6}{6:6} = \frac{8}{1} = 8$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 6. Tehtävä

a) $2 \cdot 3$

b) $3 \cdot 7$

c) $2 \cdot 9$ tai $3 \cdot 6$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 7. Tehtävä

Jaetaan luvut kahden kokonaisluvun tuloksi. c- ja d-kohdissa on useampikin tapa muodostaa kahden kokonaisluvun tulo.

a) $8 = 2 \cdot 4$
Oppilaat voidaan jakaa kahdeksi neljän oppilaan tai neljäksi kahden oppilaan ryhmäksi.

b) $15 = 3 \cdot 5$
Voidaan muodostaa kolme viiden oppilaan ryhmää tai viisi kolmen oppilaan ryhmää.

c) $24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
Voidaan muodostaa kaksi, kolme, neljä, kuusi, kahdeksan tai kaksitoista yhtä suurta ryhmää.

d) $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$
Voidaan muodostaa kaksi, kolme, viisi, kuusi, kymmenen tai viisitoista yhtä suurta ryhmää.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 8. Tehtävä

a) $\dfrac{18}{15} = \dfrac{\cancel{3} \cdot 6}{\cancel{3} \cdot 5} = \dfrac{6}{5}$

b) $\dfrac{36}{9} = \dfrac{4 \cdot \cancel{9}}{1 \cdot \cancel{9}} = \dfrac{4}{1} = 4$

c) $\dfrac{20}{24} = \dfrac{\cancel{4} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot 6} = \dfrac{5}{6}$

d) $\dfrac{14}{42} = \dfrac{1 \cdot \cancel{14}}{3 \cdot \cancel{14}} = \dfrac{1}{3}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 9. Tehtävä

Hiekkatietä oli Jaakon koulumatkasta $\frac{6}{30}^{(6} = \frac{1}{5}$,

moottoritietä $\frac{9}{30}^{(3} = \frac{3}{10}$,

maantietä $\frac{12}{30}^{(6} = \frac{2}{5}$ ja

kaupunkikatuja $\frac{3}{30}^{(3} = \frac{1}{10}$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 10. Tehtävä

a) $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{1+5}{8}=\frac{6}{8}^{(2}=\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{9}+\frac{14}{9}=\frac{4+14}{9}=\frac{18}{9}=\frac{2}{1}=2$

d) $\frac{5}{12}+\frac{11}{15}=\frac{25}{60}+\frac{44}{60}=\frac{69}{60}=\frac{23}{20}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 11.

Tehtävä

Laskataan murtoluvut yhteen.

$$
\begin{aligned}
{}^{2)}\frac{1}{4} + \frac{5}{24} + \frac{3}{8} &= \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{24} \\
&= {}^{3)}\frac{5}{8} + \frac{5}{24} \\
&= \frac{15}{24} + \frac{5}{24} \\
&= \frac{20}{24}^{(4} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Viisi oppilasta kuudesta harrastaa liikuntaa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 12. Tehtävä

a) $\frac{11}{12}-\frac{8}{12}=\frac{11-8}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}=\frac{1}{4}$

b) ${}^{5)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

c) $-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=\frac{-8-15}{20}=-\frac{23}{20}$

d) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

f) $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}-\frac{6}{8}=-\frac{3}{8}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 13. Tehtävä

Merkitään koko erän kokoa ykkösellä.

Energialaitokselle meni $1 - \dfrac{6}{7} = \dfrac{7}{7} - \dfrac{6}{7} = \dfrac{7-6}{1} = \dfrac{1}{7}$ koko erästä. Tämä olisi tietysti saatu helposti päättelemälläkin.

Paperitehtaalle meni $^{3)}\dfrac{6}{7} - \dfrac{11}{21} = \dfrac{18}{21} - \dfrac{11}{21} = \dfrac{18-11}{21} = \dfrac{7}{21}^{(7} = \dfrac{1}{3}$ koko erästä.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 14. Tehtävä

a) $\dfrac{5}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{1}{2} = 2\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{14}{3} = \dfrac{12+2}{3} = 4\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{32}{5} = \dfrac{30+2}{5} = 6\dfrac{2}{5}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 15.

Tehtävä

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\overline{31} \\
14 & 445 \\
 & \underline{-42} \\
 & 25 \\
 & \underline{-14} \\
 & 11
\end{array}
$$

$$\frac{445}{14} = 31\frac{11}{14}$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\overline{3} \\
219 & 797 \\
 & \underline{-657} \\
 & 140
\end{array}
$$

$$\frac{797}{140} = 3\frac{140}{219}$$

Tehtävä

Sisällysluettelo

Harjoitustehtävä 16.

Tehtävä

a) $2\frac{1}{3} = {}^{3)}2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+6}{3} = \frac{7}{3}$

b) $4\frac{3}{8} = {}^{8)}4 + \frac{3}{8} = \frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$

c) $15\frac{9}{10} = {}^{10)}15 + \frac{9}{10} = \frac{150}{10} + \frac{9}{10} = \frac{159}{10}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 17. Tehtävä

a) $3\dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \dfrac{17}{5}$

b) $20\dfrac{9}{16} = \dfrac{20 \cdot 16 + 9}{16} = \dfrac{329}{16}$

c) $293\dfrac{3}{10} = \dfrac{293 \cdot 10 + 3}{10} = \dfrac{2933}{10}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 18. Tehtävä

a) $8\frac{1}{2}$

b) $4\frac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
5\frac{1}{8}+3\frac{3}{8} &= 5+\frac{1}{8}+3+\frac{3}{8} \\
&= 5+3+\frac{1}{8}+\frac{3}{8} \\
&= 8+\frac{4}{8}^{(4} \\
&= 8+\frac{1}{2} \\
&= 8\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7\frac{3}{5}-2\frac{14}{15} &= 7+\frac{3}{5}-\left(2+\frac{14}{15}\right) \\
&= 7+{}^{3)}\frac{3}{5}-2-\frac{14}{15} \\
&= 7-2+\frac{9}{15}-\frac{14}{15} \\
&= 5-\frac{5}{15}^{(5} \\
&= 5-\frac{1}{3} \\
&= 4+\frac{2}{3} \\
&= 4\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Toinen tapa: muutetaan luvut ensin murtoluvuiksi.

$$
\begin{aligned}
5\frac{1}{8}+3\frac{3}{8} &= \frac{5\cdot 8+1}{8}+\frac{3\cdot 8+3}{8} \\
&= \frac{41}{8}+\frac{27}{8} \\
&= \frac{68}{8}^{(4} \\
&= \frac{17}{2} \\
&= \frac{16+1}{2} \\
&= \frac{16}{2}+\frac{1}{2} \\
&= 8+\frac{1}{2} \\
&= 8\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7\frac{3}{5}-2\frac{14}{15} &= \frac{7\cdot 5+3}{5}-\frac{2\cdot 15+14}{15} \\
&= {}^{3)}\frac{38}{5}-\frac{44}{15} \\
&= \frac{114}{15}-\frac{44}{15} \\
&= \frac{70}{15}^{(5} \\
&= \frac{14}{3} \\
&= \frac{12+2}{3} \\
&= \frac{12}{3}+\frac{2}{3} \\
&= 4\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 19. Tehtävä

$4\frac{7}{20}$ kg

Kurkkujen paino saadaan, kun täyden tynnyrin painosta vähennetään tynnyrin ja säilöntäveden paino.

$$\begin{aligned}
9\frac{3}{4} - 5\frac{2}{5} &= 9 - 5 + {}^{5)}\frac{3}{4} - {}^{4)}\frac{2}{5} \\
&= 4 + \frac{15}{20} - \frac{8}{20} \\
&= 4 + \frac{7}{20} \text{ kg}
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 20. Tehtävä

a) $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$

b) $4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 5}{6} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{10}{3}$

c) $\frac{9}{10} \cdot 3 = \frac{9 \cdot 3}{10} = \frac{27}{10}$

d) $\frac{3}{5} \cdot 15 = \frac{3 \cdot 15}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = 9$

e) $13 \cdot \frac{3}{52} = \frac{\cancel{13} \cdot 3}{4 \cdot \cancel{13}} = \frac{3}{4}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 21. Tehtävä

a) $\frac{4}{5} \cdot 40 = \frac{40 \cdot 4}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 8 \cdot 4}{\cancel{5}} = 8 \cdot 4 = 32$

b) $\frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 9}{3} = 2 \cdot 3 = 6$

c) $\frac{3}{4} \cdot 100 = 75$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 22. Tehtävä

Lopullinen hinta on ostettu määrä kerrottuna kilohinnalla.

$$\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = \frac{10+2}{5} = 2\frac{2}{5}\ €$$

$\frac{2}{5}$ euroa saadaan senteiksi, kun tiedetään, että sentti on euron sadasosa. Lavennetaan siis sadasosiksi.

$$^{20)}\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$$

$\frac{3}{5}$ kiloa lenkkimakkaraa maksaa 2 euroa 40 senttiä.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 23. Tehtävä

a) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2 \cdot 5} = \dfrac{1}{10}$

b) $\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{9 \cdot 4} = \dfrac{1}{36}$

c) $\dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{12 \cdot 18} = \dfrac{1}{216}$

Päässälaskuvihje: c-kohdassa laske ensin kuinka paljon on $10 \cdot 18$ ja lisää siihen $2 \cdot 18$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 24. Tehtävä

a) $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{4 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 6} = {}^{(2}\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{\cancel{5} \cdot 4}{8 \cdot \cancel{5}} = \dfrac{\cancel{4}}{2 \cdot \cancel{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{\cancel{3}^{1}}{4 \cdot \cancel{15}^{5}} = \dfrac{1}{4 \cdot 5} = \dfrac{1}{20}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 25. Tehtävä

a) $$\frac{5}{6}\cdot 21 = \frac{5\cdot \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

b) $$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{3\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

c) $$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16} = \frac{\cancel{2}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{3}\cdot\underset{8}{\cancel{16}}} = \frac{3}{8}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 26. Tehtävä

Muutetaan ensin hehtaarimäärä murtoluvuksi.

$$6\frac{9}{10} = \frac{6 \cdot 10 + 9}{10} = \frac{69}{10}$$

$\frac{5}{12}$ luvusta $\frac{69}{10}$ saadaan kertomalla luvut keskenään.

$$\frac{\overset{}{\cancel{5}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\overset{23}{\cancel{69}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{23}{8} = \frac{16+7}{8} = 2\frac{7}{8} \text{ ha}$$

Tehtävä

Sisällysluettelo

Harjoitustehtävä 27. Tehtävä

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{30}$

c) 1 yksi on itsensä käänteisluku

d) $-\frac{1}{12}$

e) Koska nollalla ei voi jakaa. $\frac{1}{0}$ ei ole määritelty.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 28.

Tehtävä

a) $$^{6)}\frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{6}{1} = 6$$

b) $$^{7)}\frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{7 \cdot \frac{2}{7}} = \frac{7}{2}$$

c) $$^{2)}\frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 29. Tehtävä

a) $\dfrac{3}{4}$ Muuta ensin murtoluvuksi: $1\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{3}{2}$

c) -4

d) $\dfrac{4}{11}$ $2\dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \dfrac{11}{4}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 30. Tehtävä

a) $\dfrac{3}{8} : 3 = \dfrac{\cancel{3}}{8} \cdot \dfrac{1}{\cancel{3}} = \dfrac{1}{8}$

b) $\dfrac{6}{7} : 2 = \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}}{7 \cdot \cancel{2}} = \dfrac{3}{7}$

c) $\dfrac{7}{4} : 7 = \dfrac{\cancel{7}}{4 \cdot \cancel{7}} = \dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{2}{5} : 4 = \dfrac{2}{5 \cdot 4} = \dfrac{1}{10}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 31. Tehtävä

60 g.

Jaetaan $\frac{18}{25}$ 12 osaan.

$$\frac{18}{25} : 12 = \frac{18}{25} \cdot \frac{1}{12} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{25} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{3}{50} = \frac{60}{1000}\ \text{kg} \ = 60\ \text{g}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 32. Tehtävä

a) $4 : \dfrac{2}{5} = 4 \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 5}{\cancel{2}} = 10$

b) $1 : \dfrac{4}{7} = \dfrac{7}{4}$ Käänteisluvun määritelmän mukaan.

c) $15 : \dfrac{5}{3} = \overset{3}{\cancel{15}} \cdot \dfrac{3}{\cancel{5}} = 9$

d) $6 : \dfrac{1}{6} = 6 \cdot 6 = 36$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 33. Tehtävä

Jaetaan 834 $\frac{3}{4}$ suuruisiin osiin.

$$834 : \frac{3}{4} = 834 \cdot \frac{4}{3} = \frac{834 \cdot 4}{3} = \frac{278 \cdot \cancel{3} \cdot 4}{\cancel{3}} = 1112$$

Olutta saadaan myyntiin 1112 pulloa.

Päässä/paperillalaskuohjeita: 278 voi supistaa kolmen kanssa jakokulmassa. Sen voi tehdä myös päässä, kun muistetaan, että $81 = 27 \cdot 3$ on jaollinen kolmella, jolloin myös $84 = 28 \cdot 3$ on jaollinen kolmella ja siten myös $840 = 280 \cdot 3$ on jaollinen kolmella. Vähennetään tästä kaksi kertaa kolme, jolloin saadaan $834 = 278 \cdot 3$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 34. Tehtävä

a) $\dfrac{3}{5} : \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{2} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3} \cdot 4 = \dfrac{8}{3}$

c) $\dfrac{5}{12} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{\underset{3}{\cancel{12}}} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{3} = \dfrac{5}{9}$

d) $\dfrac{9}{10} : \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{\underset{5}{\cancel{10}}} \cdot \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5} = \dfrac{27}{25}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 35. Tehtävä

Aloitetaan kukin kohta muuttamalla sekamurtoluvut murtoluvuiksi.

a) $2\frac{1}{4} : 3 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{4}$

b) $12 : 1\frac{3}{5} = 12 : \frac{8}{5} = \overset{3}{\cancel{12}} \cdot \frac{5}{\underset{\cancel{8}}{2}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

c) $2\frac{5}{8} : 8\frac{3}{4} = \frac{21}{8} : \frac{35}{4} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5 \cdot \cancel{7}} = \frac{3}{10}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 36. Tehtävä

Muutetaan villalangan määrä murtoluvuksi.

$$7\frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{38}{5}$$

Jaetaan villalangan määrä $\frac{2}{5}$ kokoisiin osiin.

$$\frac{38}{5} : \frac{2}{5} = \frac{38}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

Sukkia saadaan kudottua 19 paria.

Tehtävä

37. Tehtävä

a) $-\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}-1&=\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\\&=\frac{3-4}{4}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{43}{24}=1\dfrac{19}{24}$

$$\begin{aligned}2\frac{1}{6}+\left(-\frac{3}{8}\right)&=\frac{2\cdot 6+1}{6}-\frac{3}{8}\\&={}^{4)}\frac{13}{6}-{}^{3)}\frac{3}{8}\\&=\frac{52}{24}-\frac{9}{24}\\&=\frac{43}{24}\\&=1\frac{19}{24}\end{aligned}$$

c) -3

$$\begin{aligned}-1\frac{1}{3}-\left(2\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)&=-\frac{4}{3}-\frac{13}{6}+\frac{1}{2}\\&=-\frac{8}{6}-\frac{13}{6}+\frac{3}{6}\\&=\frac{-8-13+3}{6}\\&=-\frac{18}{6}\\&=-3\end{aligned}$$

d) $\dfrac{17}{8}=2\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}2-\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\right)&=2-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\\&=\frac{16}{8}-\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\\&=\frac{17}{8}\\&=2\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Tehtävä

38. Tehtävä

a) $10\frac{3}{4}$ dl

b) 8 dl

c) $2\frac{1}{4}$ dl

Tehtävä

39. Tehtävä

a) $\frac{30}{18} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

b) $\frac{15}{40} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{8}$

c) $\frac{714}{21} = \frac{\cancel{7} \cdot 102}{\cancel{7} \cdot 3} = \frac{2 \cdot 51}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 17}{\cancel{3}} = 34$

d) $\frac{55}{231} = \frac{5 \cdot \cancel{11}}{\cancel{11} \cdot 21} = \frac{5}{21}$

Tehtävä

40. Tehtävä

Juomaa tulee yhteensä

$$^{3)}\ ^{2)}\frac{3}{4}+\ ^{4)}\ ^{2)}\frac{1}{3}+\ ^{4)}\ ^{3)}\frac{1}{2}=\frac{18}{24}+\frac{8}{24}+\frac{12}{24}=\frac{38}{24}=1\frac{14}{24}=1\frac{7}{12}.$$

Juoma ei mahdu puolentoista litran limupulloon.

Tehtävä

41. Tehtävä

a) $\dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{18}{35} = \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2} \cdot 9}{\cancel{5} \cdot 7} = \dfrac{9}{7} = 1\dfrac{2}{7}$

b) $\left(-\dfrac{5}{6}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{\cancel{5}}{2 \cdot \cancel{3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5} \cdot 2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

c) $2\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{\cancel{5}}{2} \cdot \dfrac{3}{\cancel{10}_{2}} = \dfrac{3}{4}$

d) $2\dfrac{1}{7} \cdot 1\dfrac{2}{5} = \dfrac{2 \cdot 7 + 1}{7} \cdot \dfrac{1 \cdot 5 + 2}{5} = \dfrac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{7}} \cdot \dfrac{\cancel{7}}{\cancel{5}} = 3$

Tehtävä

42. Tehtävä

Tämä tehtävä voidaan ratkaista siten, että ensin jaetaan jauhojen määrä viidellä ja sitten kerrotaan kolmella. Sama tulos saadaan, kun jauhojen määrä kerrotaan kolme viidesosalla.

Muutetaan jauhojen määrä murtoluvuksi: ${}^{3)}3\frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Lasketaan tarvittava jauhojen määrä.

$$\frac{10}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Vastaus: Jauhoja tarvitaan 2 dl.

Tehtävä

43. Tehtävä

a) 9

$$\begin{aligned}\frac{3}{7}+\frac{20}{7}:\frac{1}{3}&=\frac{3}{7}+\frac{20}{7}\cdot 3\\&=\frac{3}{7}+\frac{20\cdot 3}{7}\\&=\frac{3}{7}+\frac{60}{7}\\&=\frac{63}{7}\\&=\frac{3\cdot 21}{7}\\&=\frac{3\cdot 3\cdot \cancel{7}}{\cancel{7}}\\&=9\end{aligned}$$

b) 3

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}\right)^2+3\cdot\frac{11}{27}&=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{3\cdot 11}{27}\\&=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 3}+\frac{\cancel{3}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot 9}\\&=\frac{16}{9}+\frac{11}{9}\\&=\frac{27}{9}\\&=3\end{aligned}$$

c) $\frac{4}{9}$ $\qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}:\frac{3}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{3}=\frac{4}{9}$

d) $2\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\left(3\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\right):\frac{21}{20}&=\left(\frac{33}{10}-\frac{5}{10}\right)\cdot\frac{20}{21}\\&=\frac{28}{1\cancel{0}}\cdot\frac{2\cancel{0}}{21}\\&=\frac{\cancel{7}\cdot 4\cdot 2}{\cancel{7}\cdot 3}\\&=\frac{8}{3}\\&=2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Tehtävä

44. Tehtävä

Mari jätti $\frac{3}{5}$ jäljelle ja Riikka jätti $\frac{2}{3}$ tästä määrästä syömättä.

$$\overset{4}{\cancel{20}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = 8$$

Tehtävä

45. Tehtävä

Maisan jälkeen kakusta jäi jäljelle $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Paavon jälkeen jäljelle olevasta osuudesta jäi jäljelle $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ja Lauran jälkeen jäi $\frac{2}{3}$.

Kakkua oli jäljellä enää

$$\frac{\cancel{15}}{8} \cdot \frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{5}{8}$$

Vastaus: Kakkua on jäljellä $\frac{5}{8}$ kg

Tehtävä

46.

Tehtävä

Jaetaan joka kohdassa 12 litraa pullon kokoisiin osiin.

a) $12 : \frac{2}{3} = \cancel{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = 18$

b) $12 : \frac{3}{4} = \cancel{3} \cdot 4 \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 16$

c) $12 : 1\frac{1}{2} = 12 : \frac{3}{2} = \cancel{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = 8$

Tehtävä

47. Tehtävä

Tapa 1: Selvitetään ensin, kuinka ison osan Tiina Anu ja Katja söivät yhteensä.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{4}{15} &= \frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{4}{15}\\ &= \frac{7}{12}+\frac{4}{15}\\ &= \frac{35}{60}+\frac{16}{60}\\ &= \frac{51}{60}\end{aligned}$$

Pussi olin aluksi täysi, eli siinä oli $\frac{60}{60}$.

Mustille jäi $\frac{60}{60}-\frac{51}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$

Tapa 2: Musti sai $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}$

Tämä voidaan laske esimerkiksi vaiheittain vasemmalta oikealle.

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{4}{15} &= \frac{4}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\\ &= \frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\\ &= \frac{9}{12}-\frac{4}{12}-\frac{4}{15}\\ &= \frac{5}{12}-\frac{4}{15}\\ &= \frac{25}{60}-\frac{16}{60}\\ &= \frac{9}{60}\\ &= \frac{3}{20}\end{aligned}$$

Tehtävä

48. Tehtävä

Muutetaan murtoluvuiksi.

Omenat: $2\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$ kg

Hinta: $3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$ €

Kilohinta on hinta jaettuna painolla: $\frac{7}{2} : \frac{5}{2} = \frac{7}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1\frac{4}{10}$

Omenoiden kilohinta oli 1 euro ja 40 senttiä.

Tehtävä

49. Tehtävä

Kerrotaan tonnikalan ja pastan määrät luvulla $\frac{7}{8}$.

$$160 \cdot \frac{7}{8} = 2 \cdot \cancel{8} \cdot 10 \cdot \frac{7}{\cancel{8}} = 140 \qquad 12 \cdot \frac{7}{8} = 3 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{7}{2 \cdot \cancel{4}} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

Tonnikalaa tarvitaan 140 g ja pastaa $10\frac{1}{2}$ dl.

Tehtävä

50. Tehtävä

a) $\dfrac{5}{\underset{3}{\cancel{18}}} \cdot \cancel{6} = \dfrac{5}{3} = 1\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{14}{3} = \dfrac{1}{\cancel{7}} \cdot \dfrac{\overset{2}{\cancel{14}}}{3} = \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{4}{45} = \dfrac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{\underset{5}{\cancel{45}}} = \dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{3}{5} \cdot 2\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{2} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{1}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5} = \dfrac{3}{5}$

Tehtävä

51. Tehtävä

a) Jokaisen lapsen osuus oli alun perin $\frac{1}{3}$.

Lopulliset osuudet:

Jonna teki oman osuutensa ja puolet Elisan osuudesta:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \overset{2)}{=} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Iiro teki oman osuutensa ja viidesosan Elisan osuudesta:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

Elisan osuus saadaan, kun koko työmäärästä vähennetään Iiron ja Jonnan osuus.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{1}{10}$$

b) Jonna saa palkkiosta puolet, $\frac{1}{2}\cdot 20 = 10$ euroa.

Iiro saa palkkiosta kaksi viidesosaa, $\frac{2}{\cancel{5}}\cdot \overset{4}{\cancel{20}} = 8$ euroa.

Elisa saa loput, eli $\dfrac{1}{10}$, eli 2 euroa.

Tehtävä

52. Tehtävä

Vodkaa ja likööriä puoli litraa, kuohuviiniä kaksi desilitraa $\left(\frac{1}{5}\ \text{l}\right)$ ja spritea 3 litraa. Likööriä juomasta oli $\frac{5}{42}$.

Muutetaan ensin boolin määrä murtoluvuksi. $4\frac{1}{5} = \dfrac{4 \cdot 5 + 1}{5} = \dfrac{21}{5}$.

Vodka: $\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{42}_{2}} \cdot \dfrac{\cancel{21}^{1}}{\cancel{5}} = \dfrac{1}{2}\ \text{l}$

Skumppa: $\dfrac{1}{\cancel{21}} \cdot \dfrac{\cancel{21}}{5} = \dfrac{1}{5}\ \text{l}$

Sprite: $\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \dfrac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{5}} = 3\ \text{l}$

Likööri: $\dfrac{21}{5} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} - 3 = \dfrac{1}{2}\ \text{l}$

Liköörin osuus juomasta on sama kuin vodkan, eli $\frac{5}{42}$.

Tehtävä

53. Tehtävä

Milla kiersi ladun yhteensä $3\frac{1}{2}$ kertaa. Hiihdetyn matkan pituus oli

$$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{4}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{24}{5} = \frac{168}{10} = 16\frac{8}{10} = 16\frac{4}{5} \text{ km}.$$

Elsan kierrosten määrä saadaan, kun hänen hiihtämänsä matka jaetaan ladun pituuden suuruisiin osiin.

$$14 : 4\frac{4}{5} = 14 : \frac{24}{5} = \overset{7}{\cancel{14}} \cdot \frac{5}{\underset{12}{\cancel{24}}} = \frac{7 \cdot 5}{12} = \frac{35}{12} = \frac{24}{12} + \frac{11}{12} = 2\frac{11}{12}$$

Elsa kiersi ladun kaksi kokonaista kertaa kolme neljäsosaa päälle.

Tehtävä

54. Tehtävä

Jaetaan marjamäärä $\frac{2}{5}$ litran kokoisiin osiin.

a) $1 : \frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Tarvitaan kolme rasiaa.

b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Tarvitaan kaksi rasiaa.

c) $2\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$. Tarvitaan 7 rasiaa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 55. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 2a - 5 &= 1 \quad || + 5 \\ 2a &= 6 \quad || : 2 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\frac{95-3t}{t} = 2 \qquad || \cdot t$$

t on ikävästi nimittäjässä. Poistetaan se sieltä kertomalla t:llä.

$$\frac{95-3t}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t} = 2 \cdot t$$

$$95 - 3t = 2t \qquad || + 3t$$

Siirretään t:tä sisältävä termi vasemmalle. (Helpompi näin päin tällä kertaa.)

$$95 \cancel{- 3t + 3t} = 2t + 3t$$

Ajattele, että t on keksi. 2 keksiä + 3 keksiä on yhteensä 5 keksiä

$$95 = 5t$$

Vaihdetaan nyt yhtälön puolet päittäin.

$$5t = 95 \qquad || : 5$$

$$t = 19$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 56. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 2 \cdot (r+6) &= (r+6)+(r+6) \\ &= r+6+r+6 \\ &= r+r+6+6 \\ 2 \cdot (r+6) &= 2r+12 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3-7x) &= (3-7x)+(3-7x)+(3-7x)+(3-7x) \\ &= 3-7x+3-7x+3-7x+3-7x \\ &= 3+3+3+3-7x-7x-7x-7x \\ 4 \cdot (3-7x) &= 12-28x \end{aligned}$$

c)

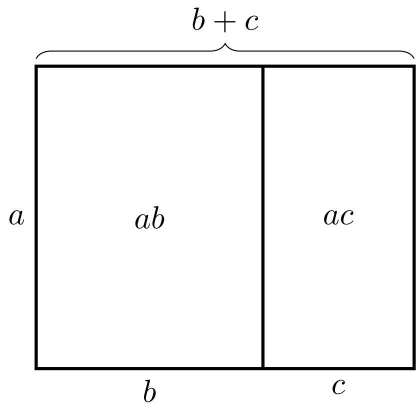
$$\begin{aligned} -3 \cdot (2-t) &= -(2-t)-(2-t)-(2-t) \\ &= -2+t-2+t-2+t \\ &= t+t+t-2-2-2 \\ -3 \cdot (2-t) &= 3t-6 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a+3b-5) &= (a+3b-5)+(a+3b-5) \\ &= a+3b-5+a+3b-5 \\ &= a+a+3b+3b-5-5 \\ 2 \cdot (a+3b-5) &= 2a+6b-10 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 57. Tehtävä



Ison suorakaiteen pinta-ala on kanta $\times$ korkeus.

$$a(b+c)$$

Ison suorakaiteen pinta-ala osien summana on

$$ab+ac.$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 58. Tehtävä

a)

$$3(2x+5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5$$
$$3(2x+5) = 6x + 15$$

b)

$$(t-3)5t = t \cdot 5t - 3 \cdot 5t$$
$$(t-3)5t = 5t^2 - 15t$$

c)

$$\begin{aligned} -3ab(4a-bc) &= -3ab \cdot 4a - (-3ab) \cdot bc \\ &= -12a^2b + 3ab^2c \\ -3ab(4a-bc) &= 3ab^2c - 12a^2b \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 59. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 5(2x - 5y + 12) &= 5 \cdot 2x - 5 \cdot 5y + 5 \cdot 12 \\ &= 10x - 25y + 60 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 6t(-5t^2 - 12t + 5) &= -6t \cdot 5t^2 - 6t \cdot 12t + 6t \cdot 5 \\ &= -30t^3 - 72t^2 + 30t \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -ef^2(6e - 7f + 8e^2 - 9ef + e^2f) &= -ef^2 \cdot 6e - (-ef^2) \cdot 7f - ef^2 \cdot 8e^2 - ef^2 \cdot (-9ef) - ef^2 \cdot e^2f \\ &= -6e^2f^2 + 7ef^3 - 8e^3f^2 + 9e^2f^3 - e^3f^3 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 60.

Tehtävä

a) $3x + 3y = 3(x + y)$

b) $6t - 12u = 6(t - 2u)$

c) $2ab + 10ac = 2a(b + 5c)$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 61. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 2tu - 4t &= 2t \cdot u - 2t \cdot 2 \\ &= 2t(u-2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4a + 12a^2 &= 4a \cdot 1 + 4a \cdot 3a \\ &= 4a(1+3a) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -xy - 5x^2y^2 - 10x^2y &= -xy \cdot 1 + (-xy) \cdot 5xy + (-xy) \cdot 10x \\ &= -xy(1 + 5xy + 10x) \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 62. Tehtävä

a) $x = 4$

$$\begin{aligned} 3x &= 12 \quad || : 3 \\ x &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

b) $x = -4$

$$\begin{aligned} x + 6 &= 2 \qquad || - 6 \\ x &= 2 - 6 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

c) $t = 2$

$$\begin{aligned} 2t + 7 &= 11 \quad || - 7 \\ 2t &= 4 \quad\ \ || : 2 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

d) $a = 15$

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} + 1 &= 6 \quad || - 1 \\ \frac{a}{3} &= 5 \quad || \cdot 3 \\ a &= 15 \end{aligned}$$

e) $y = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{3y}{2} + {}^{2)}6y &= -20 \\ \frac{3y}{2} + \frac{12y}{2} &= -20 \\ \frac{3y + 12y}{2} &= -20 \\ \frac{15y}{2} &= -20 \qquad || \cdot 2 \\ 15y &= -40 \qquad || : 15 \\ y &= -\frac{40}{15}^{(5} \\ y &= -\frac{8}{3} \\ y &= -2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

f) $h = 8$

$$\begin{aligned} 42 - 5h &= \frac{h}{4} \\ -5h - \frac{h}{4} &= -42 \\ {}^{4)}5h + \frac{h}{4} &= 42 \\ \frac{20h}{4} + \frac{h}{4} &= 42 \\ \frac{21h}{4} &= 42 \qquad || \cdot \frac{4}{21} \\ h &= \overset{2}{\cancel{42}} \cdot \frac{4}{\cancel{21}} \\ h &= 8 \end{aligned}$$

Tehtävä

63. Tehtävä

$11,20$ euroa

Seitsemän elokuvaa maksoivat $7 \cdot 6,40 = 44,80$ €.

Alentamaton hinta: $\dfrac{44,80}{4} = 11,20.$

Tapa 2: muodostetaan yhtälö. Merkitään alentamatonta hintaa x:llä.

$$\begin{aligned} 4x &= 7 \cdot 6,40 \\ x &= \frac{7 \cdot 6,40}{4} \\ x &= 7 \cdot 1,6 \\ x &= 11,20 \end{aligned}$$

Tehtävä

64. Tehtävä

Merkitään pähkinöiden määrää P:llä.

$$\begin{aligned} P - \frac{1}{5}P - \frac{2}{3}P &= 44 \qquad || \cdot 3 \cdot 5 = \cdot 15 \\ 15P - 3P - 10P &= 660 \\ 2P &= 660 \\ P &= 330 \end{aligned}$$

Tehtävä

65. Tehtävä

Ajonopeus ja ajoaika ovat kääntäen verrannollisia ja ajomatka pysyy tässä tehtävässä samana. Muistetaan, että [matka] = [nopeus] · [aika].

Taulukoidaan suureet, muutetaan samalla minuutit tunneiksi, koska näin virheiden mahdollisuus vähenee. Viisitoista minuuttia on $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ tunnista.

Ajonopeus (km/h)	Ajoaika (h)
80	t
85	$t - \frac{1}{4}$

Tästä voidaan selvittää ajomatkan kesto, kun nopeus on 80 km/h.

Ajomatkan kesto, tapa 1 (parempi):

$$\begin{aligned}
85\left(t - \frac{1}{4}\right) &= 80t \\
85t - \frac{85}{4} &= 80t \\
85t - 80t &= \frac{85}{4} \\
t &= \frac{\cancelto{17}{85}}{4 \cdot \cancel{5}} \\
t &= \frac{17}{4} \\
t &= 4\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ajomatkan kesto, tapa 2:

$$\begin{aligned}
\frac{t - \frac{1}{4}}{t} &= \frac{80}{85} && \text{kerrotaan ristiin} \\
85\left(t - \frac{1}{4}\right) &= 80t && \text{tämä rivi on sama kuin tavan 1 ensimmäinen rivi}
\end{aligned}$$

Lasketaan ajomatkan pituus:

$$80 \cdot 4\tfrac{1}{4} = 340 \text{ km}$$

Tässä vaiheessa on kätevää tarkistaa tehtävä, koska tiedetään, että ajomatka pysyy samana. Katsotaan, päästäänkö nopeudella 85 km/h tasan yhtä pitkälle 15 min lyhyemmässä ajassa, eli neljässä tunnissa.

$$85 \cdot 4 = 340 \text{ km}$$

Kyllä päästään, eli tehtävä on oletettavasti laskettu oikein.

Tehtävä

66. Tehtävä

$1,04$ euroa/litra

Uusi litrahinta	h
Vanha litrahinta	$h + 0,16$
Uusi bensiinimäärä	55
Vanha bensiinimäärä	51
Uusi kokonaishinta	$55h$
Vanha kokonaishinta	$51h$

[Uusi kok.hinta − vanha kok.hinta = 4 € vähemmän]

$$
\begin{aligned}
55h - 51(h + 0,16) &= -4 \\
55h - 51h - 51 \cdot 0,16 &= -4 \\
4h - 8,16 &= -4 \\
4h &= 8,16 - 4 \\
4h &= 4,16 \\
h &= 1,04
\end{aligned}
$$

Tehtävä

67. Tehtävä

Tapa 1: Rakennetaan yhtälö ja ratkaistaan.

Merkitään kanojen alkuperäistä määrää k.

Tulliasema	kanoja jäljellä
A	$\frac{2}{3}k+1$
B	$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}k+1\right)+1=\frac{4}{9}k+\frac{5}{3}$
C	$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}k+\frac{5}{3}\right)+1=\frac{8}{27}k+\frac{19}{9}$

$$\begin{aligned}\frac{8}{27}k+\frac{19}{9}&=11 \quad &&|| \cdot 27\\ 8k+57&=297 &&|| -57\\ 8k&=240 &&|| : 8\\ k&=30\end{aligned}$$

Tapa 2: Päätellään menemällä ajassa taaksepäin. Ensin jokaisen tulliaseman kohdalla vähennetään yksi kana. Koska kanoista luovutettiin kolmasosa, saadaan määrä ennen tulliasemaa nyt selville kertomalla luvulla $\frac{3}{2}$. Tämän voi päätellä tai selvittää seuraavasti: Merkitään kanojen määrää ennen tulliasemaa a ja tullimaksun jälkeen b.

$$\begin{aligned}b&=\frac{2}{3}a \quad || \cdot \frac{3}{2}\\ a&=\frac{3}{2}b\end{aligned}$$

Tulliasema	Kanoja ennen asemaa
C	$(11-1)\cdot\frac{3}{2}=15$
B	$(15-1)\cdot\frac{3}{2}=21$
A	$(21-1)\cdot\frac{3}{2}=30$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 68. Tehtävä

a) $0,98 = 98\%$

b) $0,3 = 0,30 = 30\%$

c) $0,02 = 2\%$

d) $1,23 = 123\%$

e) $2 = 200\%$

f) $0,005 = 0,5\%\ (= 5‰)$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 69. Tehtävä

a) $\dfrac{73}{100} = 0,73 = 73\%$

b) $\dfrac{3}{2} = 1,5 = 150\%$

c) ${}^{4)}\dfrac{14}{25} = \dfrac{56}{100} = 0,56 = 56\%$

d) $\dfrac{3}{4} = 0,75 = 75\%$

e) $\dfrac{33}{40} = 0,825 = 82,5\%$ *

f) ${}^{2)}\dfrac{6}{5} = \dfrac{12}{10} = 1,2 = 120\%$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;0,825 \\
\cline{2-2}
40 & 33,000 \\
 & -320 \\
\cline{2-2}
 & \;\;\;100 \\
 & \;\;-\;80 \\
\cline{2-2}
 & \;\;\;\;200 \\
 & \;\;-200 \\
\cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Tehtävä

Sisällysluettelo

Harjoitustehtävä 70.

Tehtävä

a) 25%

b) 40%

c) $\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

d) Selvitetään jo laskettujen prosenttien avulla:

$$100\% - 25\% - 40\% - 12,5\% = 22,5\%$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 71. Tehtävä

a) $7\% = 0,07 = \dfrac{7}{100}$

b) $85\% = 0,85 = \dfrac{85}{100}^{(5} = \dfrac{17}{20}$

c) $0,28\% = 0,0028 = \dfrac{28}{10000}^{(4} = \dfrac{7}{2500}$

d) $90\% = 0,9 = \dfrac{9}{10}$

e) $204\% = 2,04 = \dfrac{204}{100}^{(4} = \dfrac{51}{25}$

f) $24‰ = 0,024 = \dfrac{24}{1000}^{(8} = \dfrac{3}{125}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 72.

Tehtävä

a) $2\,^{2)}\dfrac{4}{5} = 2\dfrac{8}{10} = 2,8 = 280\ \%$

b) i) $33,3\ \%$ ii) $66,7\ \%$

c) $1,2\ \% = 12\ ‰ = \dfrac{12}{1000} = \dfrac{3}{250}$

d) $8\ ‰ = 0,8\ \% = \dfrac{8}{1000} = \dfrac{1}{125}$

e) $3,5 = 350\ \%$

f) $86\ \% = 0,86 = \dfrac{86}{100} = \dfrac{43}{50}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 73. Tehtävä

a) $\dfrac{18}{30} = \dfrac{6}{10} = 60\%$

b) $\dfrac{12}{60}^{(6} = \dfrac{2}{10} = 20\%$

c) $\dfrac{15\cancel{0}}{125\cancel{0}} = {}^{4)}\dfrac{3}{25} = \dfrac{12}{100} = 12\%$

d) $\dfrac{260}{125}^{(5} = {}^{4)}\dfrac{52}{25} = \dfrac{208}{100} = 208\%$

e) $\dfrac{49}{980} = \dfrac{\cancel{49}}{\overset{2}{\cancel{98}} \cdot 10} = \dfrac{1}{20} = 5\%$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 74. Tehtävä

Mopoon meni $\dfrac{1200}{1800} = \dfrac{2}{3} = 0,666... \approx 66,7\%$,

tietokoneeseen kului $\dfrac{360}{1800} = \dfrac{2}{10} = 20\%$ ja

säästöön jäi $1800 - 1200 - 360 = 240$ euroa, eli $\dfrac{240}{1800} = \dfrac{2}{15} = 0,1333... \approx 13,3\%$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 75. Tehtävä

a) $0,22 \cdot 50 = \frac{22}{\cancel{100}_{2}} \cdot \cancel{50} = 11$

Toinen helppo tapa laskea: 22 % sadasta on 22, joten 22 % viidestäkymmenestä on 11.

b) $0,30 \cdot 300 = 3 \cdot 30 = 90$

c) $1,50 \cdot 30 = 45$ Puolet kolmestakymmenestä on 15, lisätään se 30:n päälle.

d) $0,25 \cdot 5 = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4} = 1,20$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 76. Tehtävä

Rasvaa:	$0,18 \cdot 350 = 63$ g
Proteiinia:	$0,14 \cdot 350 = 49$ g
Hiilihydraattia:	$0,096 \cdot 350 = 33,6$ g

Tehtävä

Harjoitustehtävä 77. Tehtävä

$$
\begin{aligned}
25\% &= \frac{12}{c} \\
0,25c &= 12 \quad || \cdot 4 \\
c &= 48
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,08 &= \frac{976}{h} \\
h &= \frac{976}{0,08} \\
h &= 12\ 200
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 78. Tehtävä

Aloitetaan muodostamalla perusyhtälö

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{a} \\ 0,26 &= \frac{5993}{a} && || \cdot a \\ 0,26a &= 5993 && || : 0,26 \\ a &= \frac{5993}{0,26} && \text{saa käyttää laskinta} \\ a &= 23050 \end{aligned}$$

Tuomaksen nettotulot olivat 23050,00 euroa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 79. Tehtävä

Tilavuuden lisäys: $300 - 240 = 60$ ml.

Uusi tilavuuden muutos on $\dfrac{60}{240} = \dfrac{1}{4} = 0,25 = 25$ % vanhasta.

Uusi tilavuus on $\dfrac{300}{240} = \dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4} = 1,25 = 125$ % vanhasta.

Tilavuuksien suhde (uusi/vanha) saataisiin myös lisäämällä muutoksen avulla laskettu prosentti sataan prosenttiin.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 80. Tehtävä

Hinnan alennus: $6,20 - 5,27 = 0,93$ euroa.

Alennus on $\dfrac{0,93}{6,20} = \dfrac{93}{620} = 0,15 = 15\%$ alkuperäisestä hinnasta.

Alennettu hinta on $\dfrac{5,27}{6,20} = \dfrac{527}{620} = 0,85 = 85\%$ alkuperäisestä hinnasta.

Alennesprosentin saisi myös vähentämällä hintojen suhteen (uusi/vanha) sadasta prosentista.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 81.

Tehtävä

a) 92 %

b) 150 %

c) 42 %

d) 46 %

Tehtävä

Harjoitustehtävä 82. Tehtävä

$$\frac{4680}{3900} = 1,2$$

$$1,2 - 1 = 0,2 = 20\%$$

$$\frac{3900}{4680} = \frac{5}{6}$$

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 0,1666... \approx 17\%$$

Mustikki tuotti maitoa 20% enemmän kuin Heluna. Heluna tuotti maitoa 17% vähemmän kuin Mustikki.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 83. Tehtävä

Palkankorotuksen suuruus: $0,10 \cdot 2170 = 217$ €.

Uusi palkka: $2170 + 217 = 2387$ €.

Jos alkuperäiseen palkkaan, eli 100 prosenttiin lisätään 10 %, saadaan 110 %. Palkka voidaan laskea kertomalla luvulla $1,10$.

$$1,1 \cdot 2170 = 2387 \text{ €}$$

Tämän voisi päätellä myös tekemällä lausekkeen I-kohdasta:

$$2170 + 0,10 \cdot 2170$$

Alkuperäinen palkka on lausekkeessa ensin yhden kerran ja sen jälkeen $0,10$ kertaa, eli yhteensä $1,10$ kertaa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 84. Tehtävä

Tehon pienennys on $0,16 \cdot 175 = 28$ kW.

Uusi huipputeho on $175 - 28 = 147$ kW.

Jos moottorin tehosta vähennetään 16 %, jäljelle jää 100 % − 16 % = 84 %. Uusi teho saadaan laskemalla suoraan:

$$0,84 \cdot 175 = 147 \text{ kW}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 85. Tehtävä

Pentin saalis oli $100\% + 20\% = 120\% = 1,2$ Saran saaliista.

$$\begin{aligned}
\frac{7,2}{s} &= 1,2 \\
1,2s &= 7,2 \\
s &= \frac{7,2}{1,2} \\
s &= \frac{72}{12} \\
s &= 6 \text{ kg}
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 86. Tehtävä

Kun maatilasta myytiin 32%, jäljelle jäi 68%.

$$\frac{323}{A} = 0,68$$
$$A = \frac{323}{0,68}$$
$$A = 475 \text{ Ha}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 87. Tehtävä

a) Kun lukua kasvatetaan 8 prosenttia, se pitää kertoa luvulla $1 + 0,08 = 1,08$.
$1825 \cdot 1,08 = 1971$

b) Kun lukua pienennetään 15 prosenttia, se pitää kertoa luvulla $1 - 0,15 = 0,85$.
$1080 \cdot 0,85 = 918$

Ilman laskinta voisi tehdä esimerkiksi seuraavasti.

a) 8% on $\frac{2}{25}$ 1825 on jaollinen 25. 25 menee tuhanteen 40 kertaa ja 800 32 kertaa.
$\frac{1825}{25} = 73$. $2 \cdot 73 = 146$. $1825 + 146 = 1971$.

b) $0,15 = \frac{3}{20}$. $\frac{108\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 54$. $3 \cdot 54 = 162$. $1080 - 162 = 918$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 88. Tehtävä

Vastauksen voisi selvittää siten, että lasketaan ensin, kuinka paljon on 30% 450 eurosta ja vähennetään lopputulos 400 eurosta.

$$0,30 \cdot 450 = 3 \cdot 45 = 135$$

$$450 - 135 = 315$$

Toinen tapa on ensin selvittää, että uusi hinta on $100\% - 30\% = 70\%$ vanhasta hinnasta. Tässä 30% on muutosprosentti ja 70% on vertailuprosentti hintojen välillä. Selvitetään, kuinka paljon on 70% 450 eurosta.

$$0,70 \cdot 450 = 7 \cdot 45 = 315$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 89. Tehtävä

Jotta saadaan selville vertailuprosentti, eli uuden pussin painon suhden vanhaan, pitää 15% lisätä 100%: 100%+15% = 115%. Uuden pussin paino on 1,15-kertainen vanhaan verrattuna. Nyt voidaan vanha paino ratkaista perusyhtälöstä.

$$
\begin{aligned}
1,15 &= \frac{184}{a} \\
a &= \frac{184}{1,15} \\
a &= 160 \text{ g}
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 90. Tehtävä

a) $24\ \% - 23\ \% = 1\ \%$ Arvonlisäverokanta nousi yhden prosenttiyksikön.

b) $\dfrac{24\ \%}{23\ \%} = 1{,}04348$ Arvonlisävero nousi $4{,}3\ \%$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 91. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}\frac{9^7}{9^5} &= \frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9}{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9}\\ &= \frac{\cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot 9\cdot 9}{\cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{9}}\\ \frac{9^7}{9^5} &= 81\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{a^2b^3}{ab^4} &= \frac{a\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{b}}{\cancel{a}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{b}\cdot b}\\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{(12^2)^3}{12^3\cdot 12^4} &= \frac{12^2\cdot 12^2\cdot 12^2}{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}\\ &= \frac{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}\\ &= \frac{\cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}}{\cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot 12}\\ \frac{(12^2)^3}{12^3\cdot 12^4} &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{(qr)^4}{q^3r^4} &= \frac{qr\cdot qr\cdot qr\cdot qr}{q\cdot q\cdot q\cdot r\cdot r\cdot r\cdot r}\\ &= \frac{q\cdot \cancel{q\cdot q\cdot q}\cdot \cancel{r\cdot r\cdot r\cdot r}}{\cancel{q\cdot q\cdot q}\cdot \cancel{r\cdot r\cdot r\cdot r}}\\ \frac{(qr)^4}{q^3r^4} &= q\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{h}\right)^2\cdot h^4 &= \frac{g}{\cancel{h}}\cdot \frac{g}{\cancel{h}}\cdot \cancel{h}\cdot \cancel{h}\cdot h\cdot h\\ &= g\cdot g\cdot h\cdot h\\ &= gh\cdot gh\\ \left(\frac{g}{h}\right)^2\cdot h^4 &= (gh)^2\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 92. Tehtävä

a)

$$x^3 \cdot x = x \cdot x \cdot x \cdot x$$
$$x^3 \cdot x = x^4$$

b)

$$c^3 \cdot c^5 = c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$$
$$c^3 \cdot c^5 = c^8$$

c)

$$a^4 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 \cdot a^2 = a^6$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 93. Tehtävä

$$5^a \cdot 5^b = \underbrace{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}^{a \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}^{a \text{ kpl.}}}_{a+b \text{ kpl.}}$$

$$5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}$$

Vitonen on kerrottu itsellään $a + b$ kertaa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 94. Tehtävä

a) $d^{12} \cdot d^{15} = d^{12+15} = d^{17}$ b) $x^6 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x = x^{6+2+3+1} = x^{12}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 95. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} a^2 \cdot b^2 &= a \cdot a \cdot b \cdot b \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \\ &= ab \cdot ab \\ a^2 \cdot b^2 &= (ab)^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^5 \cdot y^5 &= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \\ &= x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \\ &= xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \\ x^5 \cdot y^5 &= (xy)^5 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 96. Tehtävä

a)

$$
\begin{aligned}
2^a \cdot 3^a &= \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{a \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{a \text{ kpl.}} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 3 \\
&= \overbrace{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3)}^{a \text{ kpl.}} \\
&= (2 \cdot 3)^a \\
2^a \cdot 3^a &= 6^a
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
12^n \cdot 5^n &= \overbrace{12 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 12}^{n \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}^{n \text{ kpl.}} \\
&= 12 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 12 \cdot 5 \\
&= \overbrace{(12 \cdot 5) \cdot (12 \cdot 5) \cdot \ldots \cdot (12 \cdot 5)}^{n \text{ kpl } 12\cdot 5 \text{ -pareja}} \\
&= (12 \cdot 5)^n \\
12^n \cdot 5^n &= 60^n
\end{aligned}
$$

c)

$$
20^t \cdot 20^t = 20 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 20
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 97. Tehtävä

a) $2^x \cdot 6^x = (2 \cdot 6)^x = 12^x$

b) $b^{12} \cdot e^{12} = (be)^{12}$

c) $6^t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)^t = 3^t$

Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}\frac{18^3}{18} &= \frac{18\cdot 18\cdot 18}{18}\\ &= \frac{\cancel{18}\cdot 18\cdot 18}{\cancel{18}}\\ &= 18\cdot 18\\ \frac{18^3}{18} &= 18^2\\ &= 324\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{155^5}{155^4} &= \frac{155\cdot 155\cdot 155\cdot 155\cdot 155}{155\cdot 155\cdot 155\cdot 155}\\ &= \frac{\cancel{155}\cdot \cancel{155}\cdot \cancel{155}\cdot \cancel{155}\cdot 155}{\cancel{155}\cdot \cancel{155}\cdot \cancel{155}\cdot \cancel{155}}\\ \frac{155^5}{155^4} &= 155\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{c^5}{c^2} &= \frac{c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c}{c\cdot c}\\ &= \frac{\cancel{c}\cdot \cancel{c}\cdot c\cdot c\cdot c}{\cancel{c}\cdot \cancel{c}}\\ &= c\cdot c\cdot c\\ \frac{c^5}{c^2} &= c^3\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{h^3} &= \frac{h\cdot h}{h\cdot h\cdot h}\\ &= \frac{\cancel{h}\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}\cdot \cancel{h}\cdot h}\\ \frac{h^2}{h^3} &= \frac{1}{h}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{12^3}{12^5} &= \frac{12\cdot 12\cdot 12}{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}\\ &= \frac{\cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}}{\cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot \cancel{12}\cdot 12\cdot 12}\\ &= \frac{1}{12\cdot 12}\\ \frac{12^3}{12^5} &= \frac{1}{12^2}\\ &= \frac{1}{144}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{z^3}{z^7} &= \frac{z\cdot z\cdot z}{z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z}\\ &= \frac{\cancel{z\cdot z\cdot z}}{z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot \cancel{z\cdot z\cdot z}}\\ &= \frac{1}{z\cdot z\cdot z\cdot z}\\ \frac{z^3}{z^7} &= \frac{1}{z^4}\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 99. Tehtävä

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{z^{52}}{z^{30}} &= \frac{z^{30} \cdot z^{22}}{z^{30}} \\
&= \frac{\cancel{z^{30}} \cdot z^{22}}{\cancel{z^{30}}} \\
\frac{z^{52}}{z^{30}} &= z^{22}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{12}}{e^{40}} &= \frac{e^{12}}{e^{12} \cdot e^{28}} \\
&= \frac{\cancel{e^{12}}}{\cancel{e^{12}} \cdot e^{28}} \\
\frac{e^{12}}{e^{40}} &= \frac{1}{e^{28}}
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 100.

Tehtävä

$$\frac{6^a}{6^b} = \frac{\overbrace{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}^{a \text{ kpl.}}}{\underbrace{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}_{b \text{ kpl.}}}$$

$$= \frac{\overbrace{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}^{a-b \text{ kpl.}} \cdot \overbrace{\cancel{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}}^{b \text{ kpl.}}}{\underbrace{\cancel{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}}_{b \text{ kpl.}}}$$

$$= \overbrace{6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6}^{a-b \text{ kpl.}}$$

$$\frac{6^a}{6^6} = 6^{a-b}$$

Kutonen on kerrottuna itsellään $a - b$ kertaa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 101. Tehtävä

a) $\dfrac{a^{12}}{a^{34}} = \dfrac{1}{a^{34-12}} = \dfrac{1}{a^{22}}$

b) $\dfrac{5^{17}}{5^{14}} = 5^{17-14} = 5^3 = 125$

c)

$$\frac{5^{32}x^{128}y^{120}}{(5x)^{24}(xy)^{112}} = \frac{5^{32}\cdot x^{128}\cdot y^{120}}{5^{24}\cdot x^{24}\cdot x^{112}\cdot y^{112}} = \frac{5^{32-24}\cdot x^{128}\cdot y^{120-112}}{x^{24+112}} = \frac{5^8\cdot x^{128}\cdot y^8}{x^{136}}$$
$$= \frac{(5y)^8}{x^{136-128}} = \frac{(5y)^8}{x^8} = \left(\frac{5y}{x}\right)^8$$

d) $\dfrac{2^{23}}{2^{30}} = \dfrac{1}{2^{30-27}} = \dfrac{1}{2^7} = \dfrac{1}{128}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 102. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}\frac{57^4}{19^4} &= \frac{57}{19}\cdot\frac{57}{19}\cdot\frac{57}{19}\cdot\frac{57}{19}\\ &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\\ &= 81\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{9^3}{36^3} &= \frac{9\cdot 9\cdot 9}{36\cdot 36\cdot 36}\\ &= \frac{9}{36}\cdot\frac{9}{36}\cdot\frac{9}{36}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4^3}\\ &= \frac{1}{64}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{8^a}{2^a} &= \frac{\overbrace{8\cdot 8\cdot \ldots \cdot 8}^{a \text{ kpl.}}}{\underbrace{8\cdot 8\cdot \ldots \cdot 8}_{a \text{ kpl.}}}\\ &= \overbrace{\frac{8}{2}\cdot\frac{8}{2}\cdot \ldots \cdot\frac{8}{2}}^{a \text{ kpl.}}\\ &= \overbrace{4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 4}^{a \text{ kpl.}}\\ \frac{8^a}{2^a} &= 4^a\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{3^c}{18^c} &= \frac{\overbrace{3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3}^{c \text{ kpl}}}{\underbrace{18\cdot 18\cdot \ldots \cdot 18}_{c \text{ kpl}}}\\ &= \overbrace{\frac{3}{18}\cdot\frac{3}{18}\cdot \ldots \cdot\frac{3}{18}}^{c \text{ kpl}}\\ &= \left(\frac{3}{18}\right)^c\\ \frac{3^c}{18^c} &= \left(\frac{1}{6}\right)^c\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 103. Tehtävä

a)

$$\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 10} = \frac{7^2}{10^2} = \frac{49}{100}$$

b)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 104.

Tehtävä

$$\frac{e^3}{f^3} = \frac{e \cdot e \cdot e}{f \cdot f \cdot f} = \frac{e}{f} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{e}{f}\right)^3$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 105. Tehtävä

$$\left(\frac{r}{t}\right)^4 = \frac{r}{t}\cdot\frac{r}{t}\cdot\frac{r}{t}\cdot\frac{r}{t} = \frac{r\cdot r\cdot r\cdot r}{t\cdot t\cdot t\cdot t} = \frac{r^4}{t^4}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 106. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}(k^2)^3 &= k^2 \cdot k^2 \cdot k^2 \\ &= \overbrace{k \cdot k} \cdot \overbrace{k \cdot k} \cdot \overbrace{k \cdot k} \\ &= k^6\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(t^5)^2 &= t^5 \cdot t^5 \\ &= \overbrace{t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t} \cdot \overbrace{t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t} \\ &= t^{10}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(a^6)^5 &= (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)^5 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &\quad \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &\quad \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &\quad \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &\quad \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &= a^{6 \cdot 5} && \text{6 kpl } a\text{:tä 5 rivissä} \\ &= a^{30}\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 107. Tehtävä

$$
\begin{aligned}
(8^a)^b &= \overbrace{8^a \cdot 8^a \cdot \ldots \cdot 8^a}^{b \text{ kpl}} \\
&= \left.\begin{array}{l}
\overbrace{8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8}^{a \text{ kpl}} \\
\cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8 \\
\ldots \\
\cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8
\end{array}\right\} \begin{array}{l} b \text{ kpl} \\ \text{yhteensä } a \cdot b \text{ kpl.} \end{array} \\
(8^a)^b &= k^{a \cdot b}
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 108. Tehtävä

a) $\sqrt{9}$ =”mikä luku korotettuna potenssiin 2 tuottaa 9?” Kokeilemalla huomataan, että $3^2 = 9$, joten $\sqrt{9} = 3$.

b) $\sqrt{16} = 4$, koska $4^2 = 16$.

c) $\sqrt{1} = 1$, koska $1^2 = 1$.

d) $\sqrt{0} = 0$, koska $0^2 = 0$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 109. Tehtävä

Neliön sivun pituus saadaan laskemalla neliöjuuri sen pinta-alasta. $\sqrt{36} = 6$. Sivun pituus on 6.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 110. Tehtävä

Selvitetään kasvimaan yhden sivun pituus laskemalla neliöjuuri sen pinta-alasta. $\sqrt{81} = 9$. Kasvimaan yhden sivun pituus on 9 metriä. Aitaa kasvimaan ympäröimiseen neljältä sivulta tarvitaan $4 \cdot 9 = 36$ metriä.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 111. Tehtävä

a) $\sqrt[3]{27}$ =”mikä luku korotettuna potenssiin 3 tuottaa 27”. Kokeilemalla huomataan, että $3^3 = 27$, joten $\sqrt[3]{27} = 3$.

b) $\sqrt[3]{125} = 5$, koska $5^3 = 125$.

c) $\sqrt[3]{1} = 1$

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, koska $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 112. Tehtävä

Kuution särmän pituus saadaan laskemalla tilavuuden kuutiojuuri. $\sqrt[3]{125}$ =”mikä luku korotettuna potenssiin 3 tuottaa 125?” Kokeilemalla huomataan, että $5^3 = 125$, joten $\sqrt[3]{125} = 5$.

Tehtävä

Sisällysluettelo

Harjoitustehtävä 113. Tehtävä

Altaan särmän pituus on $\sqrt[3]{64} = 4$ m.

Altaan kahteentoista särmään tarvitaan yhteenä $12 \cdot 4 = 48$ metriä putkea.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 114. Tehtävä

Laatikon särmän pituus on $\sqrt[3]{216\ \mathrm{dm}^3} = 6\ \mathrm{dm} = 0,6\ \mathrm{m}$.

Laatikon viiteen tahkoon kuluu $5 \cdot 0,6^2 = 5 \cdot 0,36 = 1,8\ \mathrm{m}^2$ vaneria.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 115. Tehtävä

a) 12 Mikä luku korotettuna potenssiin 2 tuottaa 144.

b) -5 Mikä luku korotettuna potenssiin 3 tuottaa -125.

c) ei voi laskea d) 3 e) -2 f) 2

Tehtävä

Harjoitustehtävä 116. Tehtävä

a) 1 b) -1 c) ei voi laskea d) 0 e) -1 f) 5

Tehtävä

Harjoitustehtävä 117. Tehtävä

Lainan suuruus toisena opiskeluvuotena saadaan, kun alkupääoma kerrotaan vertailuprosentilla (ns. korkokertoimella). Muista, jos esimerkiksi jotakin halutaan korottaa 5 prosenttia, se pitää kertoa luvulla $1,05$. Merkitään tämän tehtävän korkokerroita k. Selvitetään ensin korkokerroin, koska se on huomattavasti paljon helpompaa. Toisen vuoden lainapääoma saataisiin laskemalla $3000 \cdot k$. Kolmannen vuoden lainapääoma saadaan edelleen kertomalla toisen vuoden lainapääoma k:lla $3000 \cdot k \cdot k = 3000 \cdot k^2$. Ja niin edelleen.

Muodostetaan ensin taulukkoa lainapääomasta.

Vuodet	Pääoma	
0	3000	
1	$3000 \cdot k$	
2	$3000 \cdot k^2$	
3	$3000 \cdot k^3$	
4	$3000 \cdot k^4$	
5	$3000 \cdot k^5$	$= 3215,96$

Huomataan, että lainapääoma viidentenä vuonna saataisiin laskettua korkokertoimen avulla. Toisaalta tiedetään, kuinka paljon lainapääoma itse asiassa on, joten merkitään ne yhtä suuriksi.

$$\begin{aligned} 3000 \cdot k^5 &= 3215,96 && \|: 3000 \\ k^5 &= \frac{3215,96}{3000} && \|\sqrt[5]{} \\ k &= \sqrt[5]{\frac{3215,96}{3000}} \\ k &= 1,01400 \end{aligned}$$

Korko on $1,4\ \%$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 118. Tehtävä

a) $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{9}^2 = 3^2 = 9$

c) $\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

e) $\sqrt[3]{-8}^3 = (-2)^3 = -8$

f) $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 119. Tehtävä

a) -15 b) 19 c) 27 d) Kahdeksatta juurta ei voi laskea negatiivisesta luvusta.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 120. Tehtävä

a) $\sqrt[5]{32}^{\,3} = 2^3$ Laskujärjestyssopimuksen mukaan.

b) $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$ Neljäs juuri ja toiseen korotus voidaan ”supistaa”.

c) $\sqrt[3]{-125}^{\,2} = (-5)^2 = 25$ Laskujärjestyssopimuksen mukaan.

d) $\sqrt[3]{-8^6} = -\sqrt[3]{8^6} = -8^2$ Miinus voidaan siirtää parittoman juurilaskun eteen. Tämän jälkeen ”supistetaan” juuri ja potenssi. Huomaa, että laskujärjestyssopimuksen mukaan miinusmerkki kahdeksan edessä ei ole mukana potenssiin korotuksessa, jos se haluttaisiin mukaan potenssilaskuun, pitäisi -8 merkitä sulkuihin. Tämän voisi ajatella myös näin: $\sqrt[3]{-8^6} = \sqrt[3]{-1 \cdot 8} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{8} = -1 \cdot 2 = -2.$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 121. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{8}\cdot\sqrt{2} &= \sqrt{(\sqrt{8}\cdot\sqrt{2})^2}\\ &= \sqrt{\sqrt{8}^2\cdot\sqrt{2}^2}\\ &= \sqrt{8\cdot 2}\\ &= \sqrt{16}\\ &= 4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25} &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25})^3}\\ &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{5}^3\cdot\sqrt[3]{25}^3}\\ &= \sqrt[3]{5\cdot 25}\\ &= \sqrt[3]{125}\\ &= 5\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{98}^2}{\sqrt{2}^2}}\\ &= \sqrt{\frac{98}{2}}\\ &= \sqrt{49}\\ &= 7\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} &= \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}\right)^4}\\ &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{96}^4}{\sqrt[4]{6}^4}}\\ &= \sqrt[4]{\frac{96}{6}}\\ &= \sqrt[4]{16}\\ &= 2\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 122. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{9\cdot 49} &= \sqrt{\sqrt{9}^2\cdot\sqrt{49}^2}\\ &= \sqrt[\cancel{2}]{(\sqrt{9}\cdot\sqrt{49})^{\cancel{2}}}\\ &= \sqrt{9}\cdot\sqrt{49}\\ &= 3\cdot 7\\ &= 21\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8\cdot 27} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}^3\cdot\sqrt[3]{27}^3}\\ &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27})^3}\\ &= \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}\\ &= 2\cdot 3\\ &= 6\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{16}{81}} &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{16}^4}{\sqrt[4]{81}^4}}\\ &= \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}\right)^4}\\ &= \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt{7\frac{1}{9}} &= \sqrt{\frac{64}{9}}\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{64}^2}{\sqrt{9}^2}}\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{8}{3}\\ &= 2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

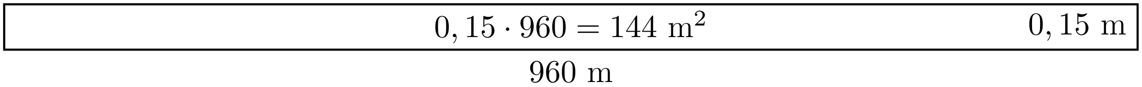
Tehtävä

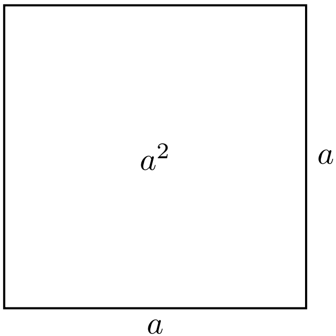
Tehtävä

123.

$12\ \text{m} \times 12\ \text{m}$

Lattian ja käytettävän laudan pinta-alat ovat samat.





$$a^2 = 144$$
$$a = \sqrt{144} \quad a > 0$$
$$a = 12\ \text{m}$$

Tehtävä

Sisällysluettelo

124. Tehtävä

Tapa 1:

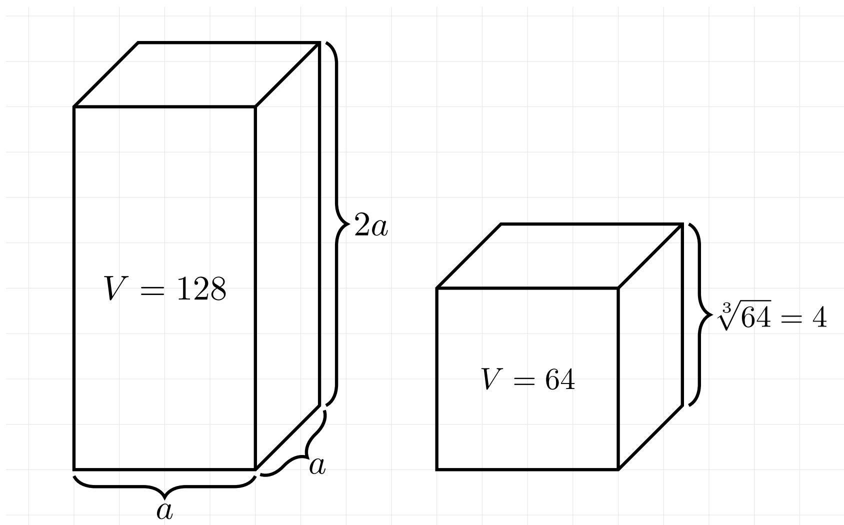
Jaetaan laatikko vaakasuuntaisella tasolla keskeltä kahteen kuution. Yhden kuution tilavuus on $\frac{128}{2} = 64 \text{ dm}^3$ Kuution särmän pituus on $\sqrt[3]{64} = 4$ dm.

Korkeus on kaksi kertaa pohjasärmän pituus $2 \cdot 4 = 8$ dm.

Tapa 2: Merkitään laatikon pohjasärmän pituutta a:lla. Korkeus on tällöin $2a$.

Muodostetaan yhtälö laatikon tilavuudelle ja ratkaistaan a.

$$
\begin{aligned}
2a \cdot a \cdot a &= 128 \\
2a^3 &= 128 \qquad || : 2 \\
a^3 &= 64 \\
a &= \sqrt[3]{64} \\
a &= 4
\end{aligned}
$$



Laatikon mitat ovat

Korkeus:	80 cm
leveys:	40 cm
syvyys:	40 cm

Tehtävä

Harjoitustehtävä 125. Tehtävä

Jaollisia ovat: 0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30.

Jaottomia ovat: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 126. Tehtävä

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

b) $2 \cdot 5$

c) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

d) $2 \cdot 3 \cdot 5$

e) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$

f) $5 \cdot 123 = 5 \cdot 3 \cdot 41 = 3 \cdot 5 \cdot 41$

Huomaatko, että e- ja d-kohdassa luku on kolmella jaollinen.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 127. Tehtävä

a) $${}^{2)}\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

b) $${}^{4)}\frac{13}{25} = \frac{52}{100} = 0,52$$

c) $${}^{5}\frac{57}{20} = \frac{285}{100} = 2,85$$

d) $0,363636...$

$$\begin{array}{r|l}
 & 0,3636 \\ \hline
11 & 4,0000 \\
 & -33 \\ \cline{2-2}
 & 70 \\
 & -66 \\ \cline{2-2}
 & 40 \\
 & -33 \\ \cline{2-2}
 & 70 \\
 & -66 \\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}$$

e) $0,85714(2857142857142...)$

Tee myös e-kohta jakokulmassa.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 128. Tehtävä

a) $\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{208}{100} = \dfrac{52}{25}$ c) $\dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20}$ d) $\dfrac{1955}{1000} = \dfrac{391}{200}$ e) $\dfrac{92}{10} = \dfrac{46}{5}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 129. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} q &= 0,666... && ||\cdot 10 \\ 10q &= 6,666... && ||-q=-0,666... \\ 9q &= 6 \\ q &= \frac{6}{9} \\ q &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} q &= 0,181818... && ||\cdot 100 \\ 100q &= 18,181818... && ||-q=-0,181818... \\ 99q &= 18 \\ q &= \frac{18}{99} \\ q &= \frac{2}{11} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} q &= 0,120120120... && ||\cdot 1000 \\ 1000q &= 120,120120120... && ||-q=0,120120120... \\ 999q &= 120 \\ q &= \frac{120}{999} \\ q &= \frac{40}{333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,120120120... &= \frac{40}{333} && ||\cdot 100 \\ 12,012012012... &= \frac{4000}{333} \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 130. Tehtävä

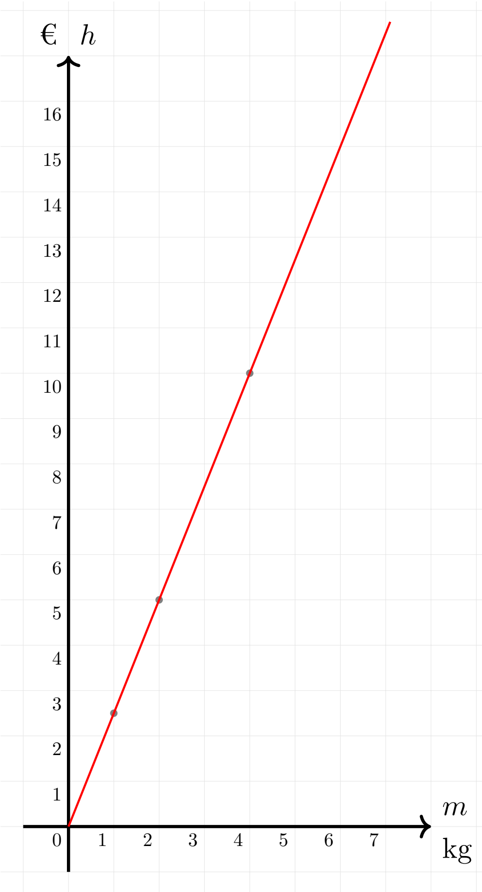
—

	Alkuluvut	Yhdistetyt luvut	Luonnolliset luvut	Negatiiviset kokonaisluvut	Kokonaisluvut	Murtoluvut	Rationaaliluvut	Irrationaaliluvut	Reaaliluvut
9		x	x		x		x		x
$\frac{2}{3}$						x	x		x
0			x		x		x		x
1			x		x		x		x
2	x		x		x		x		x
3	x		x		x		x		x
4		x	x		x		x		x
$\sqrt{2}$								x	x
-11				x	x		x		x
11	x		x		x		x		x
0,28						x	x		x
π								x	x
0,4333...						x	x		x
0,1010010001...								x	x

Tehtävä

Harjoitustehtävä 131. Tehtävä

paino (kg)	hinta (€)	$\frac{\text{paino}}{\text{hinta}}$	$\frac{\text{hinta}}{\text{paino}}$
0	0		
0,4	1	0,4	2,50
1	2,50	0,4	2,50
2	5	0,4	2,50
4	10	0,4	2,50
7	17,50	0,4	2,50



Kun ei osteta yhtään omenaa, ei maksetakaan mitään, joten taulukon ylin rivi on 0 0.

Taulukon kolmas rivi saadaan, kun huomataan, että verrattuna 4. riviin, omenoiden määrä on puolittunut. Tällöin hintakin puolittuu.

Toinen rivi saadaan, kun huomataan, että hinta on pienentynyt viidesosaan 4. riviin verrattuna. Tällöin omenoitakin ostettiin vain viidesosa 4. rivin määrästä.

Viides rivi saadaan, kun huomataan, että verrattuna 4. riviin omenoiden määrä on tuplaantunut, joten hintakin tuplaantuu.
Viimeisen rivin hinta on 3,5 kertaa 4. rivin hinta, joten omenoiden määrä saadaan kertomalla 4. rivin määrä samalla luvulla.

Kolmas sarake kertoo kuinka monta kiloa omenoita saa yhdellä eurolla. Neljäs sarake kertoo, kuinka monta euroa maksaa yksi kilo omenoita, siis kilohinnan.

Merkitään omenoiden määrä m (massa) ja hintaa h. Tiedetään, että hinta jaettuna määrällä on aina $2,50$.

$$\frac{h}{m} = 2,50$$
$$h = 2,50m$$

Tehtävä

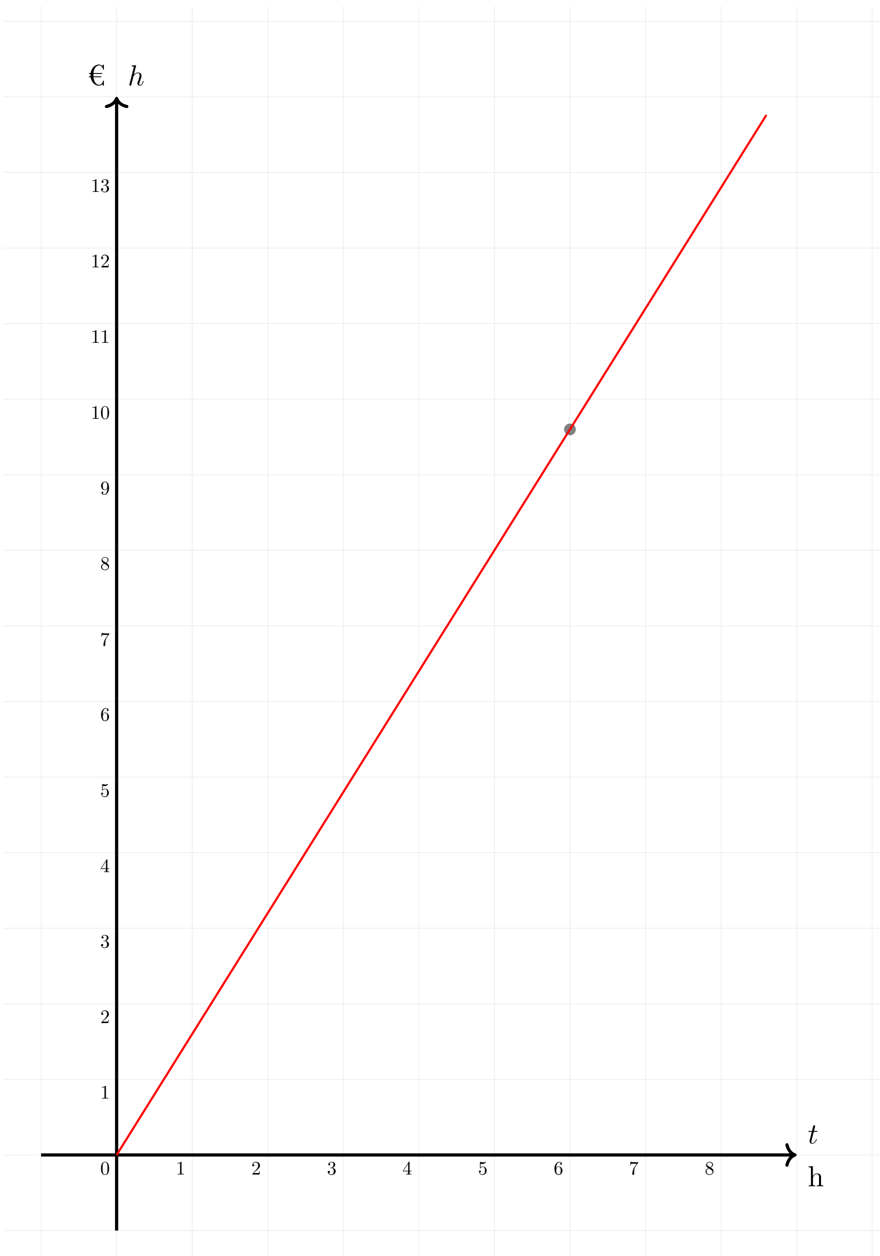
Harjoitustehtävä 132. Tehtävä

Vuokran kokonaishinta saadaan kertomalla tuntien määrä tuntihinnalla. Merkitään tuntien määrää t ja hintaa h.

$$h = 1,80t$$

Huomaa, että tuntien määrä ja vuokrahinta ovat suoraan verrannollisia suureita.

6 tunnin vuokra maksaa $1,80 \cdot 6 = 9,60$€.



Tehtävä

Harjoitustehtävä 133. Tehtävä

Lapasparit	Villalanka
6	450 g
n	1200 g

$$\frac{n}{6} = \frac{1200}{450}$$
$$n = \frac{8}{3} \cdot 6$$
$$n = 16$$

Jäljellä olevasta langasta voi kutoa vielä 16 lapasparia.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 134. Tehtävä

Muodostetaan tehtävästä taulukko, jossa on lisäksi nopeuden neliö.

nopeus (km/h)	nopeuden neliö	jarrutusmatka (m)
80	80^2	32
50	50^2	d_1
v_2	v_2^2	100
v	v^2	d

a)

$$\frac{d_1}{50^2} = \frac{32}{80^2}$$

$$d_1 = \frac{50^2}{80^2} \cdot 32$$

$$d_1 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 32$$

$$d_1 = \frac{25}{64} \cdot 32$$

$$d_1 = 12,5$$

b)

$$\frac{v_2^2}{100} = \frac{80^2}{32}$$

$$v_2^2 = \frac{100}{32} \cdot 80^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{100}{32}} \cdot 80 \qquad v_2 > 0$$

$$v_2 = 141,4 \approx 140$$

c)

Tehtävä

Harjoitustehtävä 135. Tehtävä

Toinen rivi saadaan selville, kun tiedetään, että jos maalarien määrä puolitetaan, joutuu jokainen tekemään kaksinkertaisen työn, joten koko talon maalaamiseen kuluu kaksinkertainen aika.

Ensimmäinen rivi saadaan samoin, tuplaamalla 2. rivin aika.

Kolmas rivi saadaan ensimmäisestä; kun maalarien määrä kolminkertaistuu, jokaisen työtaakka pienenee kolmasosaan, joten työhön kuluva aika samoin pienenee kolmasosaan.

Viidennen rivin työntekijöiden määrä saadaan, kun kolmannen rivin määrä tuplataan.

Kuudennen rivin aika saadaan, kun kolmannen rivin ajasta otetaan kolmasosa.

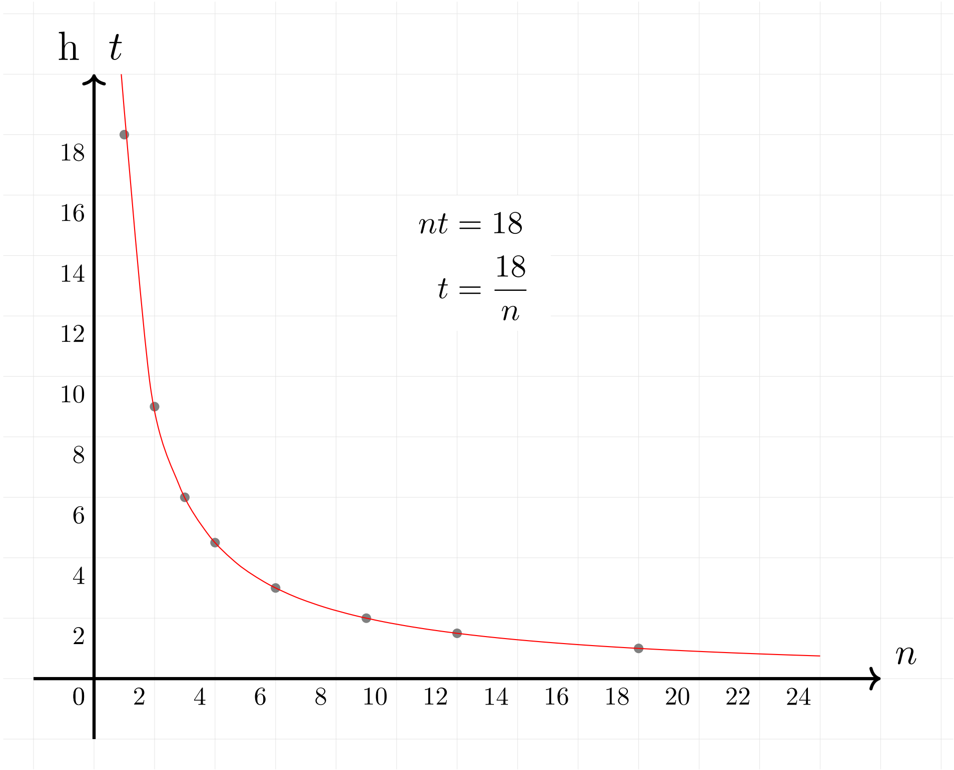
Seitsemännen rivin työntekijöiden määrä saadaan, kun neljännen rivin työntekijöiden määrä kolminkertaistetaan.

Kahdeksannen rivin työntekijöiden määrä saadaan, kun neljännen rivin työntekijöiden määrä kerrotaan yhdeksällä.

Maalarien lukumäärä	Työhön kuluva aika (h)	tulo
1	18	18
2	9	18
3	6	18
4	$4\frac{1}{2}$	18
6	3	18
9	2	18
12	$1\frac{1}{2}$	18
18	1	18

Maalarien määrän ja työajan tulo on kokonaistyöaika. Yhden talon maalaamiseen tarvitaan 18 työtuntia. Tämä määrä voidaan jakaa useamman työntekijän kesken, jolloin työ valmistuu nopeammin.

Merkitään työntekijöiden määrää n ja työhön kuluvaa aikaa t. Tiedetään, että näiden tulo on aina 18.



Tehtävä

Harjoitustehtävä 136. Tehtävä

työmiehet	aika (h)
3	9
5	t

Kysymyksessä on kääntäen verrannolliset suureet.

$$\begin{aligned} 5 \cdot t &= 3 \cdot 9 \quad || : 5 \\ t &= \frac{27}{5} \\ t &= 5\frac{2}{5} \\ t &= 5\frac{24}{60} \end{aligned}$$

5 tuntia 24 minuuttia

Tehtävä

Harjoitustehtävä 137. Tehtävä

a) 80 km/h

nopeusrajoitus: v

nopeus	matka-aika
v	45 min$=\frac{3}{4}$ h
$v+10$ km/h	40 min$=\frac{2}{3}$ h

Nopeus ja matka-aika ovat kääntäen verrannolliset.

$$\begin{aligned} v\cdot\frac{3}{4} &= (v+10)\cdot\frac{2}{3} && \|\cdot 3\cdot 4=\cdot 12 \\ v\cdot 9 &= (v+10)\cdot 8 \\ 9v &= 8v+80 && \|-8v \\ 9v-8v &= 80 \\ v &= 80 \end{aligned}$$

b) $80\cdot\dfrac{3}{4}=60$ km

Tehtävä

Harjoitustehtävä 138. Tehtävä

Aika ja kerätty sato ovat suoraan verrannollisia.

Työntekijöiden määrä ja kerätty sato ovat suoraan verrannollisia.

Työntekijöiden määrä ja aika ovat kääntäen verrannollisia.

Työntekijöiden määrä	aika	kerätty sato
8	5	2400
8	10	4800
8	3	1440
4	5	1200
2	15	1800
10	3	1800
7	6	2520

Työntekijöiden määrä kerrottuna työajalla on toteutuneiden työtuntien määrä (kääntäen verrannollisuus). Työtuntien määrä on suoraan verrannollinen kerätyn sadon määrään, joten niiden suhde on vakio. Merkitään työntekijöiden määrää n, aikaa t ja kerättyä satoa m. Saadaan yhtälö.

$$\frac{m_1}{n_1 t_1} = \frac{m_2}{n_2 t_2} = ... = k \qquad \text{tai} \qquad \frac{n_1 t_1}{m_1} = \frac{n_2 t_2}{m_2} = ... = k$$

Yhtälöä voi vielä kokeilla sijoittamalla arvoja taulukosta.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 139.

Tehtävä

$$\frac{Gr^2}{m_a m_b} = \gamma$$

$$G = \gamma \frac{m_a m_b}{r^2}$$

$$G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{5,974 \cdot 10^{24} \cdot 7,348 \cdot 10^{22}}{(3,844 \cdot 10^8)^2}$$

$$G = 1,971651 \cdot 10^{20}$$

$$G \approx 1,972 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N}$$

Tehtävä

140.

Tehtävä

Kyseessä on suoraan verrannolliset suureet.

vesi	suurimot
10 dl	$2,5$ dl
6	x

$$\frac{x}{6} = \frac{2,5 \text{ dl}}{10 \text{ dl}}$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot 6$$

$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Tehtävä

141. Tehtävä

Kyseessä on kääntäen verrannolliset suureet.

Matka-aika	nopeus
$1\frac{5}{60} = \frac{13}{12}$	100
$3\frac{15}{60} = \frac{13}{4}$	v_1
$\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$	v_2

a) 33 km/h

$$
\begin{aligned}
v_1 \cdot \frac{13}{4} &= 100 \cdot \frac{13}{12} \quad || \cdot \frac{4}{13} \\
v_1 &= \frac{100}{3} \\
v_1 &= 33\frac{1}{3} \\
v_1 &\approx 33 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

b) 130 km/h

$$
\begin{aligned}
v_2 \cdot \frac{5}{6} &= 100 \cdot \frac{13}{12} \quad || \cdot \frac{6}{5} \\
v_1 &= \overset{10}{\cancel{20}} \cdot \frac{13}{\cancel{2}} \\
v_1 &= 130 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

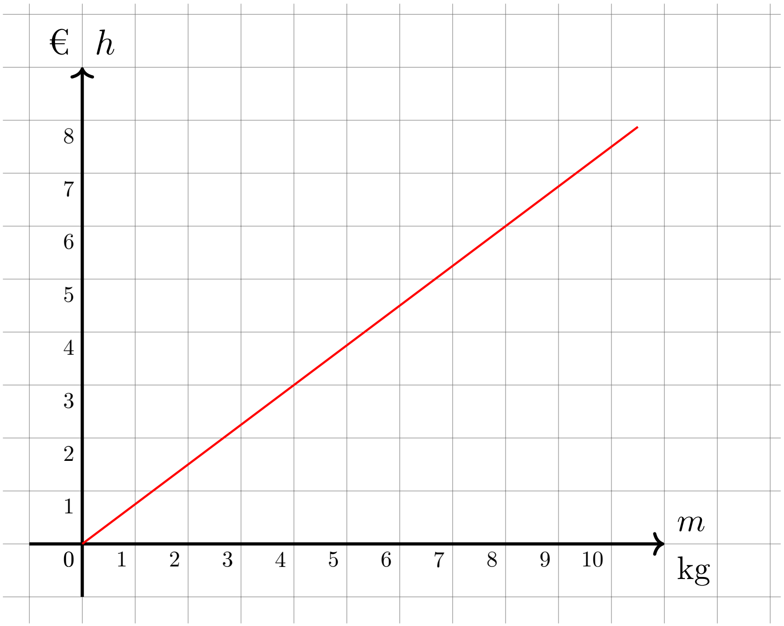
Tehtävä

142. Tehtävä

$$\frac{h}{m} = \frac{1,80}{2,4} \qquad || \cdot m$$

$$h = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{4}{\cancel{24}}} m$$

$$h = 0,75m$$



Tehtävä

143. Tehtävä

Ei voi tietää varmuudella, nopeus oli lukkojarrutuksen alkaessa 76 km/h.

Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

Nopeus^2 (km/h)	Jarrutusmatka (m)
60^2	18
v^2	29

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{29} &= \frac{60^2}{18} && \| \cdot 29 \\ v^2 &= 200 \cdot 29 \\ v &= \sqrt{5800} \\ v &= 76{,}16 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Tehtävä

144. Tehtävä

4 tuntia.

Ruohonleikkurin leveys ja nurmialueen leikkausaika ovat likimain kääntäen verrannollisia.

Ruohonleikkurin leveys (cm)	Nurmialueen leikkausaika (h)
60	5
75	t

$$
\begin{aligned}
75 \cdot t &= 60 \cdot 5 \quad || : 75 \\
t &= \frac{60 \cdot 5}{75} \\
t &= 4
\end{aligned}
$$

Tehtävä

145. Tehtävä

1 tunti 36 minuuttia.

Uima-altaan tyhjennysaika on suoraan verrannollinen altaan tilavuuteen ja kääntäen verrannollinen pumppujen määrään.

Tyhjennys-aika (h)	tilavuus (m^3)	Pumppujen lukumäärä
2	100	2
t	120	3

$$\frac{\cancel{3}t}{\underset{40}{\cancel{120}}} = \frac{\cancel{2\cdot 2}}{\underset{25}{\cancel{100}}} \qquad || \cdot 40$$

$$t = \frac{40}{25}$$

$$t = 1\frac{3}{5} = 1\frac{36}{60}$$

$$t = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$$

Tehtävä

146. Tehtävä

	kantavuus (kg)	leveys (cm)	[paksuus (cm)]^2	pituus (cm)
	180	$10,0$	$3,0^2$	200
a)	m	$6,0$	$2,0^2$	120
b)	600	w	$7,0^2$	98
c)	500	$14,0$	t^2	280

$$\frac{m \cdot 120}{6 \cdot 2^2} = \frac{180 \cdot 200}{10,0 \cdot 3^2}$$
$$m = \frac{180 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 2^2}{10 \cdot 3^2 \cdot 120}$$
$$m = 80 \text{ kg}$$

Tehtävää varten voisi heti alussa yksinkertaistaa laskemalla verrannollisuuskertoimen valmiiksi.

$$\frac{m \cdot l}{w \cdot t^2} = \frac{180 \cdot 200}{10 \cdot 3^2}$$
$$\frac{m \cdot l}{w \cdot t^2} = 400$$

$$\frac{600 \cdot 98}{w \cdot 7^2} = 400$$
$$w = \frac{600 \cdot 98}{400 \cdot 7^2}$$
$$w = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{500 \cdot 280}{14 \cdot t^2} = 400$$
$$t = \sqrt{\frac{500 \cdot 280}{400 \cdot 14}}$$
$$t = 5 \text{ cm}$$

Tehtävä

147. Tehtävä

työn kesto	työmiesten määrä	parkkialueen koko
5	4	800
6	n	1680

$$\frac{6 \cdot n}{1680} = \frac{5 \cdot 4}{800}$$
$$\frac{n}{280} = \frac{1}{40}$$
$$n = \frac{280}{40}$$
$$n = 7$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 148. Tehtävä

Puhelun kesto (min)	Operaattori A hinta (€)	Operaattori B hinta (€)
0	0,00	0,60
1	0,15	0,75
2	0,30	0,90
3	0,45	1,05
5	0,75	1,35
10	1,50	2,10
...	...	...
x	$0,15x$	$0,15x+0,60$

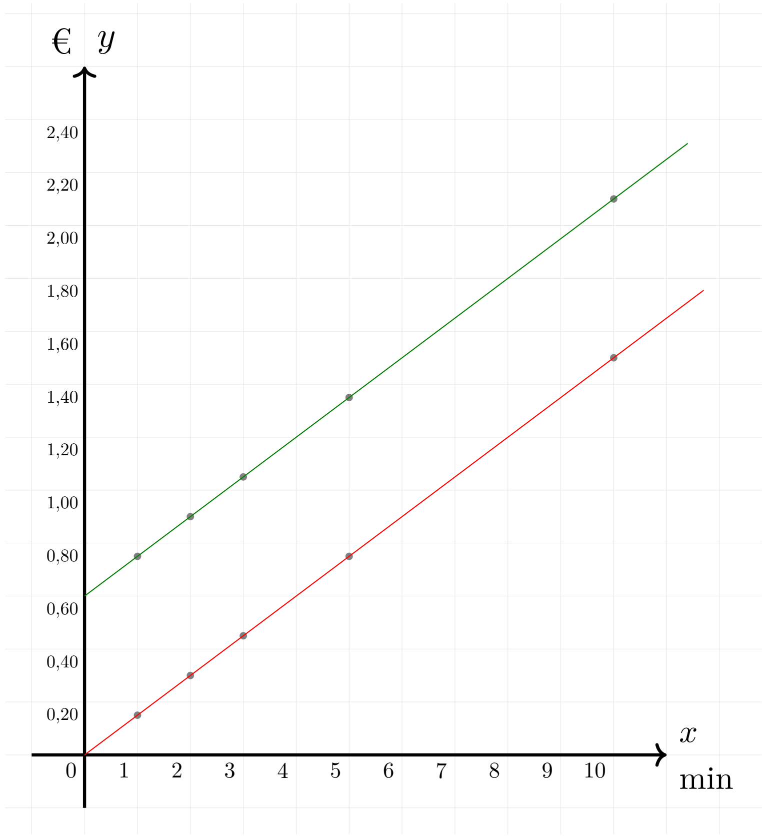
Operaattorilla A puhelun hinta ja kesto ovat selvästi suoraan verrannolliset, joten on helppoa muodostaa yhtälö.

$$\frac{y}{x} = \frac{0,15}{1}$$
$$y = 0,15x$$

Tämä olisi toki ollut helppo päätelläkin: puhelun hinta on puhelun kesto minuutteina kertaa yhden minuutin hinta.

Operaattorin B hinta saadaan laskettua muuten samalla tavalla kuin A:n, mutta puhelun hintaan lisätään aina kiinteä 60 sentin aloitusmaksu, joten

$$y = 0,15x + 0,60.$$



Puhelun kesto ja hinta ovat kummallakin operaattorilla hyviä esimerkkejä lineaarisesti riippuvaisista suureista. Lisäksi operaattorilla A ne ovat samalla myös suoraan verrannolliset suureet.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 149. Tehtävä

a) Selviämistodennäköisyys heikkenee $\frac{6}{5} = 1,2$ prosenttiyksikköä.

b) Lisätään 5 viikon, eli 35 päivän todennäköisyyden muutos 48 prosenttiin.

$$48 + 35 \cdot 1,2 = 90$$

c) Selvitetään, kuinka monta kertaa 1,2 mahtuu 48:aan.

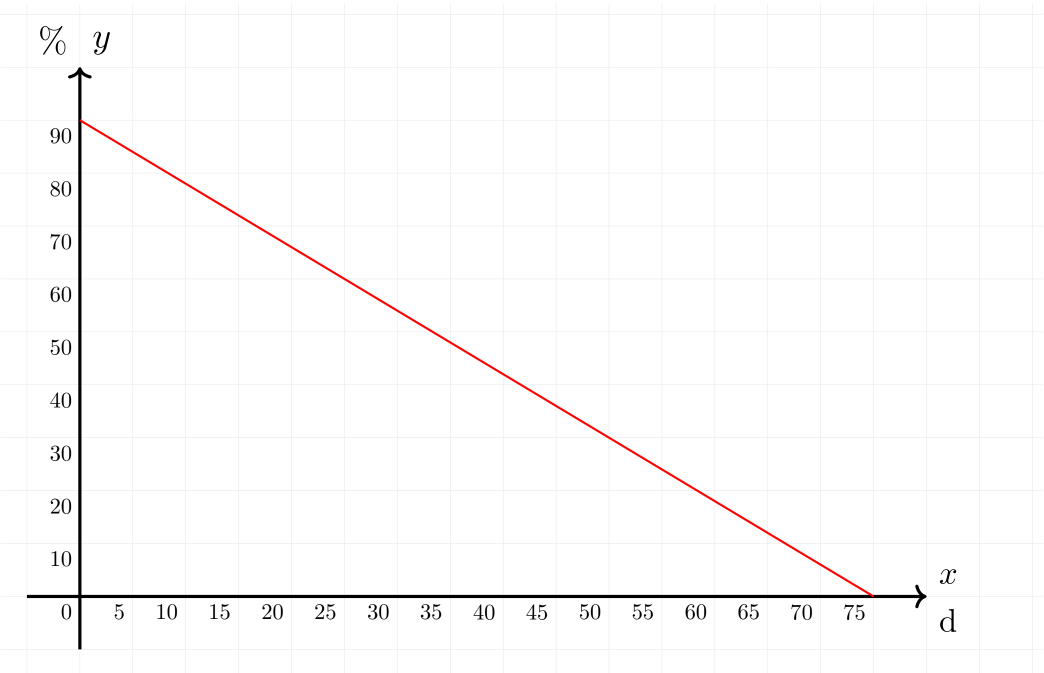
$$\frac{48}{1,2} = 40$$

Taudista tulee peruuttamaton $35 + 40 = 75$ päivän kuluttua puhkeamisesta.

d)

$$\begin{aligned}
\frac{p-48}{t-35} &= -\frac{6}{5} \\
p - 48 &= -\frac{6(t-35)}{5} \\
p &= -\frac{6t-210}{5} + 48 \\
p &= -\frac{6t}{5} + \frac{210}{5} + 48 \\
p &= -1,2t + 90
\end{aligned}$$

e)



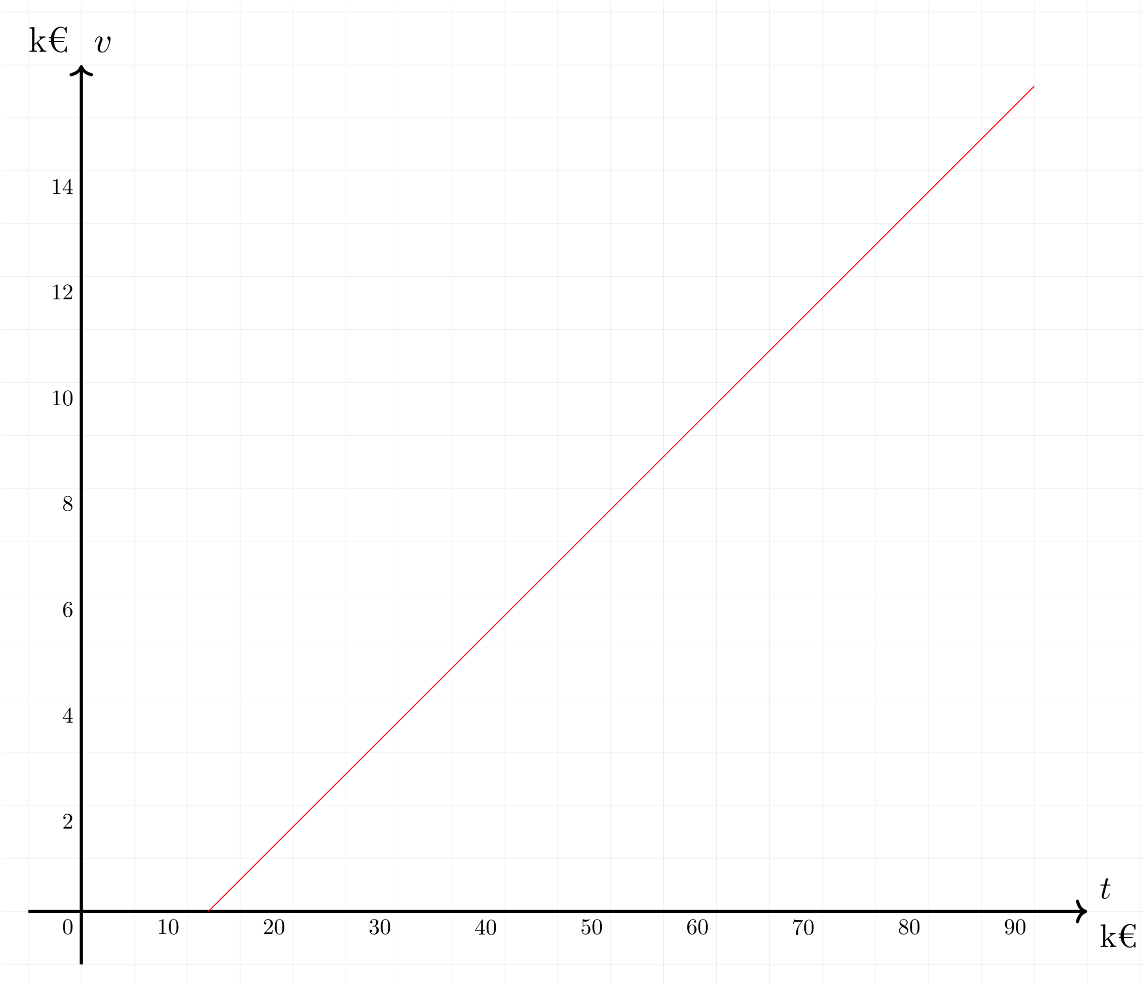
Tehtävä

Harjoitustehtävä 150. Tehtävä

Merkitään tulojen määrää t ja veron määrää v.

Verojen määrä saadaan, kun lasketaan ensin verotettava osuus: $t - 12\,000$ ja lasketaan tästä 20%.

$$v = 0,20(t - 12\,000) \quad t > 12\,000$$
$$v = 0,20t - 2400$$



Tehtävä

151. Tehtävä

Tapa 1:

Hinnan ja myynnin muutos ovat suoraan verrannolliset. a-kohdassa voidaan selvittää, kuinka paljon hintaa pitää laskea, jotta myynti nousisi tasan 20 kg. b-kohdassa voidaan selvittää, kuinka paljon hintaa pitää nostaa, jotta myynti laskisi tasan 80 kg.

hinnan muutos	myynnin muutos
$0,80$	-25
Δh_a	20
Δh_b	-80
$\Delta h = h - 6$	$\Delta m = m - 80$

a)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h_a}{20} &= -\frac{0,80}{25}\\ \Delta h_a &= -\frac{4}{5}\cdot 0,80\\ \Delta h_a &= -0,64\end{aligned}$$

Uusi hinta on $6 - 0,64 = 5,36$ €/kg.

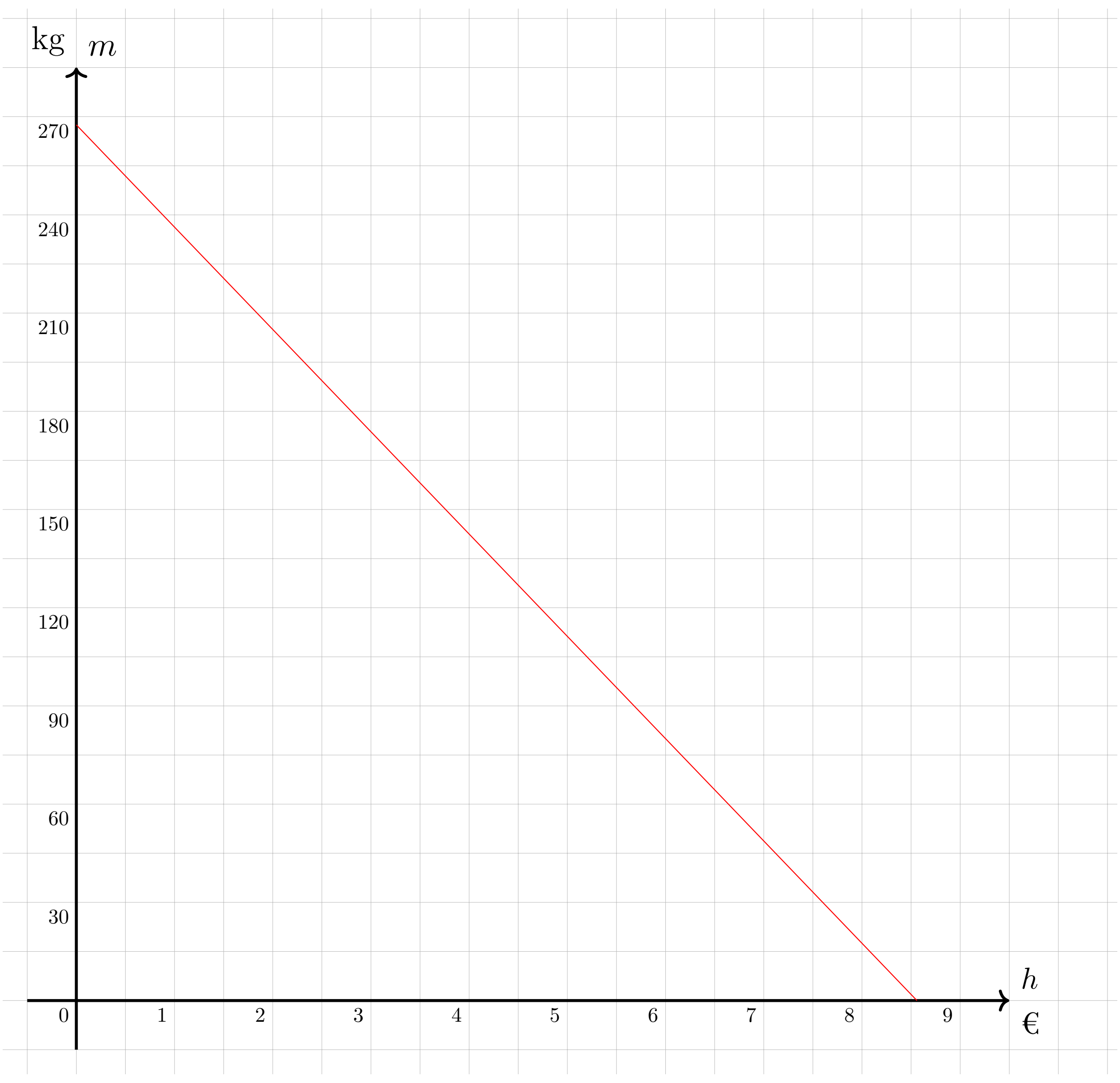
b)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h_b}{\cancel{-}80} &= \frac{0,80}{\cancel{-}25}\\ \Delta h_b &= \frac{0,80}{25}\cdot 80\\ \Delta h_b &= 2,56\end{aligned}$$

Hintaa pitää korottaa $2,56$ €/kg, joten uusi hinta on $6 + 2,56 = 8,56$ €/kg.

c)

$$\begin{aligned}\frac{m-80}{h-6} &= -\frac{25}{0,80}\\ m - 80 &= -\frac{25\cdot(h-6)}{0,80}\\ m-80 &= \frac{150-25h}{0,80}\\ m - 80 &= 187,50 - 31,25h\\ m &= 267,50 - 31,25h\end{aligned}$$



Tapa 2:

Tehdään ensin c-kohta. Muodostetaan yhtälö, kun tiedetään, että hinta ja myynnin määrä ovat lineaarisesti riippuvaisia. Lineaarista riippuvuutta kuvaa aina ensimmäisen asteen yhtälö $y = kx + b$, joka tulee tässä tapauksessa muotoon $m = kh + b$.

Kulmakerroin on muuttujien muutossuhde. Tyypilliseti se ilmaistaan muodossa $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Tässä tapauksessa se tulee muotoon

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta h} = \frac{-25}{0,80} = -31,25.$$

Sijoitetaan kulmakerroin yhtälöön, jolloin se tulee muotoon

$$m = -31,25h + b.$$

Selvitetään vielä vakiotermi b sijoittamalla tunnettu arvopari $m = 80$; $h = 6$ yhtälöön. Tällöin b jää ainoaksi tuntemattoksi, joten se voidaan ratkaista.

$$\begin{aligned}80 &= -31,25\cdot 6 + b\\ b &= 267,50\end{aligned}$$

Sijoitetaan b yhtälöön, jolloin se tulee valmiiksi.

$$m = -31,25h + 267,50$$

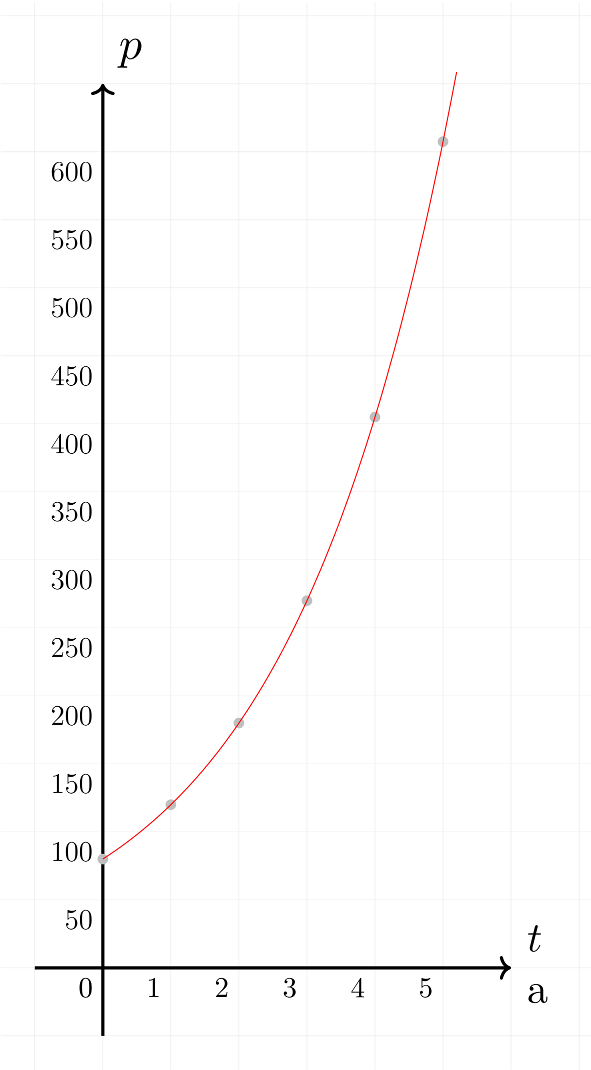
a-kohta voidaan selvittää sijoittamalla yhtälöön $m = 100$ ja b-kohta sijoittamalla $m = 0$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 152.

Tehtävä

aika	populaation suuruus	
0	80	80
1	$80 \cdot 1,5$	120
2	$80 \cdot 1,5^2$	180
3	$80 \cdot 1,5^3$	270
4	$80 \cdot 1,5^4$	405
5	$80 \cdot 1,5^5$	608
...	...	
t	$80 \cdot 1,5^t$	



Vastaukset

Populaatio on vuoden 2002 lopussa sama kuin 2003 alussa, eli 270 yksilöä.

$$p(t) = 80 \cdot 1,5^t$$

Kuvaaja on hyvä esimerkki aidosti kasvavan eksponenttifunktion kuvaajasta.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 153. Tehtävä

a) $x = 4$

$$
\begin{aligned}
5 \cdot x^3 &= 320 \quad || :5 \\
x^3 &= \frac{320}{5} \\
x^3 &= 64 \quad || \sqrt[3]{} \\
x &= \sqrt[3]{64} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

b) $t = \pm 12$

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{6} &= 24 \quad || \cdot 6 \\
t^2 &= 144 \quad || \sqrt{ X} \\
t &= \pm\sqrt{144} \\
t &= \pm 12
\end{aligned}
$$

c) $x = \pm 3$

$$
\begin{aligned}
4x^4 &= 324 \\
x^4 &= 81 \quad || \sqrt[4]{} \\
x &= \pm\sqrt[4]{81} \\
x &= \pm 3
\end{aligned}
$$

d) $x = \pm\frac{6}{5}$

$$
\begin{aligned}
50h^2 &= 72 \\
h^2 &= \frac{\overset{36}{\cancel{72}}}{\underset{25}{\cancel{50}}} \\
h^2 &= \frac{36}{25} \quad || \sqrt{} \\
h &= \pm\sqrt{\frac{36}{25}} \\
h &= \pm\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} \\
h &= \pm\frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 154. Tehtävä

Lääkeaineen määrän muutoskerroin: $1 - 0,25 = 0,75$

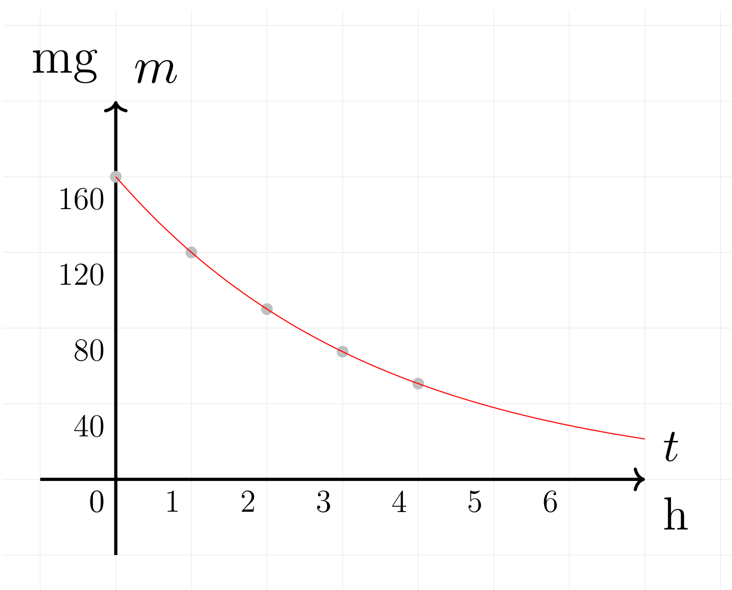
Lääkeaineen määrä elimistössä pienenee tunnissa 75 prosenttiin edellisen tunnin määrästä.

Muodostetaan taulukkoa.

aika (h)	lääkeaineen määrä (mg)	
0	160	$= 160$
1	$160 \cdot 0,75$	$= 120$ (päässälasku)
2	$160 \cdot 0,75^2$	$= 90$ (päässälasku)
3	$160 \cdot 0,75^3$	$= 67,5$ (päässälasku)
4	$160 \cdot 0,75^4$	$= 50,625$
...	...	
t	$160 \cdot 0,75^t$	

Vastaukset:
$m(t) = 160 \cdot 0,75^t$, jossa t on aika tunteina.

3 tunnin kuluttua lääkettä on jäljellä potilaan elimistössä $67,5$ mg.



Tämä kuvaaja on hyvä esimerkki aidosti vähenevästä eksponenttifunktiosta.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 155. Tehtävä

a) $\dfrac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2}$ toisaalta $\dfrac{4^3}{4^5} = \dfrac{\cancel{4 \cdot 4 \cdot 4}}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4 \cdot 4 \cdot 4}} = \dfrac{1}{4 \cdot 4} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

Joten $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

b) $\dfrac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}$ toisaalta $\dfrac{5^3}{5^6} = \dfrac{1}{5^{6-3}} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

Joten $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

c) $\dfrac{t^3}{t^3} = t^{3-3} = t^0$ toisaalta $\dfrac{t^3}{t^3} = 1$, joten $t^0 = 1$

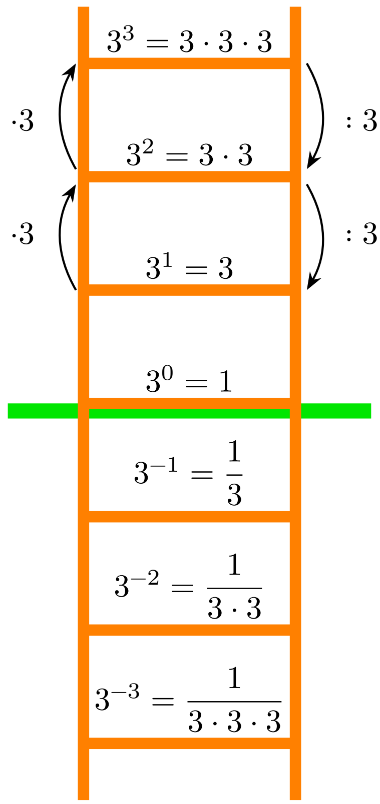
Tehtävä

Harjoitustehtävä 156. Tehtävä

a) Kun noustaan askelma ylös päin, pitää kertoa kolmella.

b) Kun laskeudutaan askelma alas päin, pitää jakaa kolmella.

c)



Maantaso:

$$3^0 = \frac{3^1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

-1 askelma:

$$3^{-1} = \frac{3^0}{3} = \frac{1}{3}$$

-2 askelma:

$$3^{-2} = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^{*} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

***Muista!** Jakaminen on sama kuin käänteisluvulla kertominen.

-3 askelma:

$$3^{-3} = \frac{1}{3 \cdot 3} : 3 = \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{27}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 157. Tehtävä

Aloitetaan esimerkiksi toteamalla, että $5^1 = 5$. Myös $5^2 = 25$ on helppo laskea. 5^3 saadaan, kun kiivetään potenssitikapuilla seuraavalle askelmalle kertomalla 5^2 viidellä: $5^3 = 25 \cdot 5 = 125$.

5^0, 5^{-1} jne. saadaan jakamalla aina edeltävä, korkeampi, potenssi viidellä. 5^0 saadaan jakamalla 5^1 viidellä: $\dfrac{5}{5} = 1$.

5^{-1} saadaan, kun jaetaan 5^0 viidellä: $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

5^{-2} saadaan jakamalla 5^{-1} viidellä: $5^{-2} = \dfrac{1}{5} : 5 = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$.

5^{-3} saadaan jakamalla 5^{-2} viidellä: $5^{-3} = \dfrac{1}{25} : 5 = \dfrac{1}{25} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{125}$.

$$\begin{aligned}
5^3 &= 125 \\
5^2 &= 25 \\
5^1 &= 5 \\
5^0 &= 1 \\
5^{-1} &= \frac{1}{5} \\
5^{-2} &= \frac{1}{25} \\
5^{-3} &= \frac{1}{125}
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 158. Tehtävä

a) $4^0 = 1$

b) $15^{-1} = \dfrac{1}{15}$

c) $11^{-2} = \dfrac{1}{11^2} = \dfrac{1}{121}$

d) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

e) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{3} = \dfrac{5^3}{2^3} = \dfrac{125}{8} = 15\dfrac{5}{8}$

f) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2} = \dfrac{4^2}{5^2} = \dfrac{16}{25}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 159. Tehtävä

a) $b6^2 = 36$

b) $6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ tai $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

c) $-6^2 = -(6 \cdot 6) = -36$ muista laskujärjestyssopimus; potenssilasku ennen miinusta

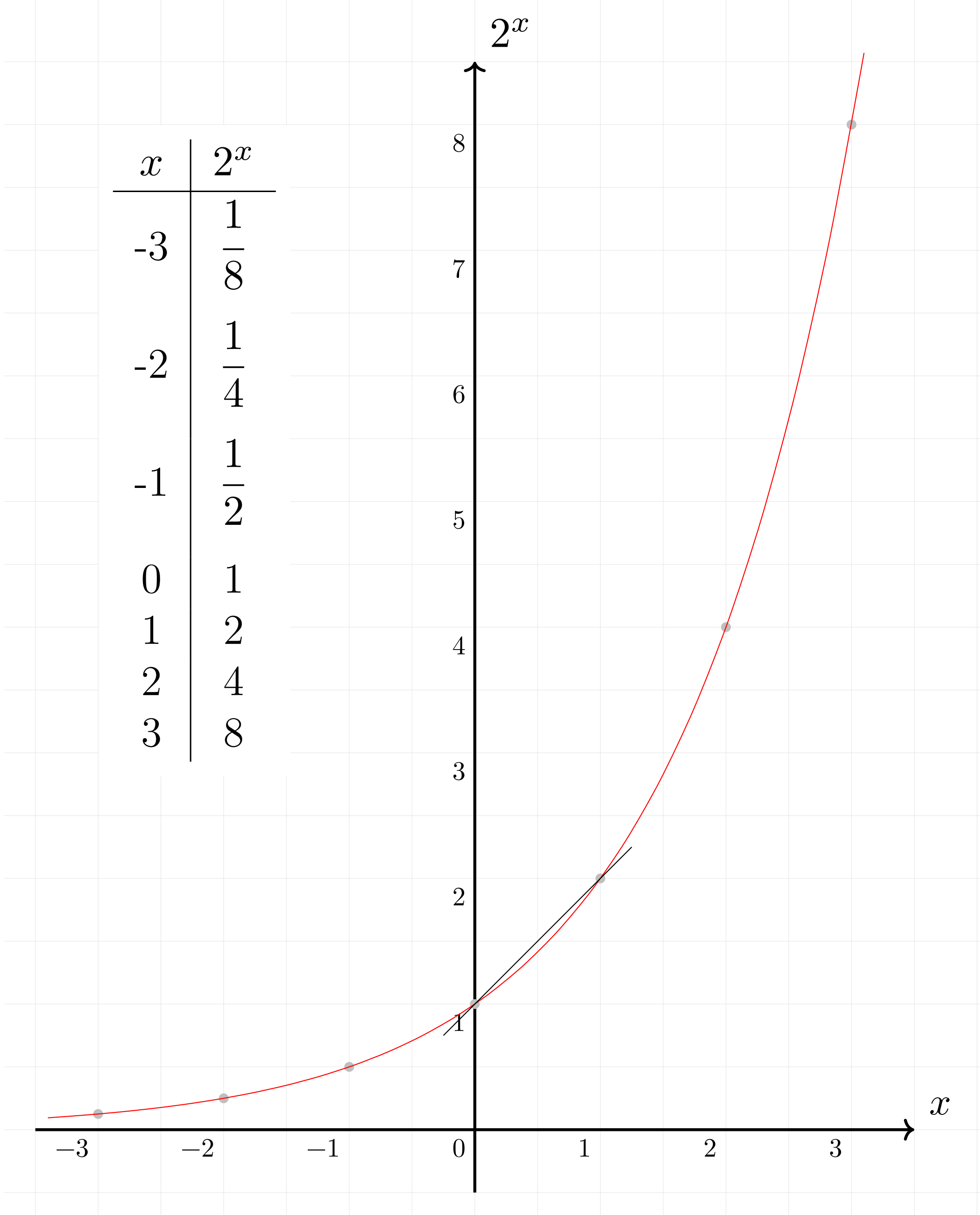
d) $-6^{-2} = -\left(\frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{1}{36}$

e) $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

f) $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6) \cdot (-6)} = \frac{1}{36}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 160. Tehtävä



x	2^x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Vedetään suora viiva pisteiden $(0,1)$ ja $(1,2)$ välille. Viiva kulkee x:n kohdassa $\frac{1}{2}$ arvon $\frac{3}{2} = 1,5$ kautta. Koska kuvaaja kuitenkin kaartuu tämän kohdan alapuolelta, näyttäisi siltä, että $2^{\frac{1}{2}}$ on hieman vähemmän kuin $1,5$. Kuvaajasta arvioituna $1,4$. Kappaleessa murtolukueksponentti opitaan selvittämään luvun puolikas potenssi tarkasti.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 161. Tehtävä

a) 5^{-1}

b) 2^{-3} $\qquad \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}$

c) 3^{-4} $\qquad \dfrac{1}{81} = \dfrac{1}{3^4} = 3^{-4}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 162. Tehtävä

a) a^{-5}

Tapa 1:

$$\frac{a^3}{a^8} = a^{3-8} = a^{-5}$$

Tapa 2:

$$\frac{a^3}{a^8} = \frac{\cancel{a^3}}{\cancel{a^3} \cdot a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$$

b) $\dfrac{b}{a}$ (tai ba^{-1})

Tapa 1:

$$\begin{aligned}(ab)^{-3} \cdot a^2b^4 &= a^{-3}b^{-3}a^2b^4 \\ &= a^{-3+2} \cdot b^{-3+4} \\ &= a^{-1}b^1 \\ &= \frac{1}{a} \cdot b \\ &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Tapa 2:

$$\begin{aligned}(ab)^{-3} \cdot a^2b^4 &= \frac{1}{(ab)^3} \cdot a^2b^4 \\ &= \frac{a^{\cancel{2}}b^{\cancel{4}}}{a^{\cancel{3}}\cancel{b^3}} \\ &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 163. Tehtävä

Liikevaihdon kasvukerroin on $1 + 0,25 = 1,25 = \frac{5}{4}$.

Vuonna 2015 liikevaihto saadaan laskemalla $565000 \cdot 1,25^2$.

Vuoden 2012 liikevaihto saadaan selville, kun tiedetään että 2013 liikevaihto on vuoden 2012 liikevaihto kerrottuna kasvukertoimella.

$$a \cdot 1,25 = 565000 \qquad a \text{ on edellisen vuoden liikevaihto}$$

$$\begin{aligned} a \cdot 1,25 &= 565000 \qquad || : 1,25 \\ a &= \frac{565000}{1,25} \\ a &= 565000 \cdot \frac{1}{1,25} \\ a &= 565000 \cdot 1,25^{-1} \end{aligned}$$

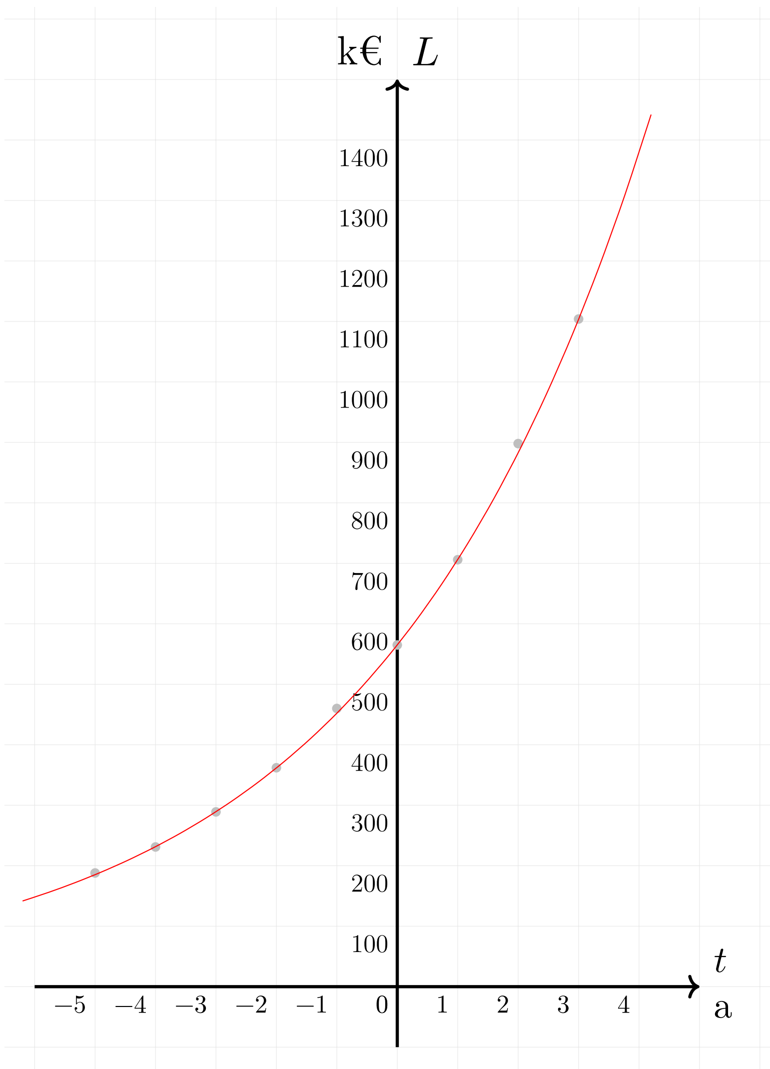
Vuoden 2008 liikevaihto saadaan selville, kun tiedetään, että 2013 liikevaihto on vuoden 2008 liikevaihto kerrottuna kasvukertoimella viidesti.

$$a \cdot 1,25^5 = 565000 \qquad a \text{ on vuoden 2008 liikevaihto}$$

$$\begin{aligned} a \cdot 1,25^5 &= 565000 \qquad || : 1,25^5 \\ a &= \frac{565000}{1,25^5} \\ a &= 565000 \cdot \frac{1}{1,25^5} \\ a &= 565000 \cdot 1,25^{-5} \end{aligned}$$

Muodostetaan taulukko

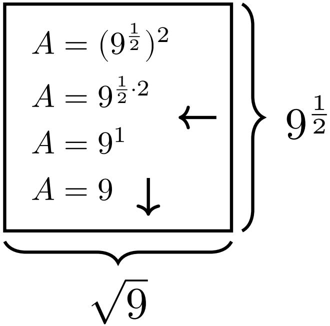
vuosi	liikevaihto	
2016 (3)	$565000 \cdot 1,25^3$	1103516
2015 (2)	$565000 \cdot 1,25^2$	882813
2014 (1)	$565000 \cdot 1,25$	706250
2013 (0)	565000	565000
2012 (-1)	$565000 \cdot 1,25^{-1}$	452000
2011 (-2)	$565000 \cdot 1,25^{-2}$	361600
2010 (-3)	$565000 \cdot 1,25^{-3}$	289280
2009 (-4)	$565000 \cdot 1,25^{-4}$	231424
2008 (-5)	$565000 \cdot 1,25^{-5}$	185139



Vastaukset:
vuonna 2015 883000 euroa.
Vuonna 2012 452000 euroa.
Vuonna 2008 185000 euroa.
Funktio: $L(t) = 565000 \cdot 1,25^t$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 164. Tehtävä



Neliön pinta-ala saadaan korottamalla sivun pituus toiseen potenssiin.

Neliön sivun pituus on pinta-alan neliöjuuri.

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 165.

Tehtävä

Kuution tilavuus saadaan korottamalla särmän pituus potenssiin kolme.
Kuution särmän pituus saadaan, kun lasketaan tilavuuden kuutiojuuri.

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 166. Tehtävä

a) 6 $\quad 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36}$ =”Mikä luku korotettuna potenssiin 2 tuottaa 36?”

b) 5 $\quad 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$ =”Mikä luku korotettuna potenssiin 3 tuottaa 125?”

c) 3 $\quad 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$ =”Mikä luku korotettuna potenssiin 4 tuottaa 81?”

d) 2 $\quad 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 167. Tehtävä

a) $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[5]{h} = h^{\frac{1}{5}}$ c) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 168. Tehtävä

a) $25^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

b) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{3}{2}$

c) $\left(\dfrac{1}{243}\right)^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 169. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 16^{\frac{3}{2}} &= 16^{\frac{1}{2}\cdot 3} \\ &= (16^{\frac{1}{2}})^3 \\ &= 4^3 \\ &= 64 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &= 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} \\ &= (8^{\frac{1}{3}})^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 170. Tehtävä

a) $9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$

b) $125^{\frac{2}{3}} = (125^{\frac{1}{3}})^2 = 5^2 = 25$

c) $32^{\frac{7}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^7 = 2^7 = 128$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 171. Tehtävä

a) $\sqrt{r}^5 = r^{\frac{5}{2}}$ b) $\sqrt[4]{k}^3 = k^{\frac{3}{4}}$ c) $l^{\frac{9}{2}} = \sqrt{l}^9$ d) $d^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{d}^2$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 172. Tehtävä

a) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{25}$

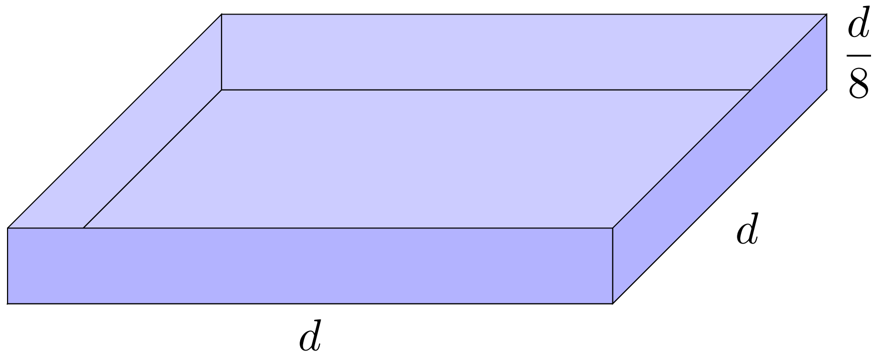
b) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{243}$

c) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{64}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 173. Tehtävä

Merkitään pohjasärmän pituutta d:llä.



Määritetään laatikon tilavuus ja ratkaistaan siitä särmän pituus.

$$V = d^2 \cdot \frac{d}{8}$$
$$V = \frac{d^3}{8}$$

$$\frac{d^3}{8} = V$$
$$d^3 = 8V$$
$$d = (8V)^{\frac{1}{3}}$$
$$d = 8^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}$$
$$d = 2V^{\frac{1}{3}}$$

Laatikon pinta-ala

$$A = d^2 + 4 \cdot d \cdot \frac{d}{8}$$
$$A = \frac{3d^2}{2}$$

$$A = \frac{3d^2}{2} \qquad \text{sijoitetaan } d = 2V^{\frac{1}{3}}$$
$$A(V) = \frac{3 \cdot (2V^{\frac{1}{3}})^2}{2}$$
$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot V^{\frac{1}{3} \cdot 2}}{\cancel{2}}$$
$$A(V) = 6V^{\frac{2}{3}}$$

$A(512) = 6 \cdot 512^{\frac{2}{3}}$ Huom! päässälasku

$A(512) = 6 \cdot 64$

$A(512) = 384 \ \text{dm}^2$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 174. Tehtävä

Merkitään bakteerien alkuperäistä määrää a:lla.

Koska tehtävässä pitäisi selvittää tunnin aikana tapahtuva kasvu ja tiedossa 45 minuutissa tapahtuva kasvu, voidaan tilannetta tarkastella 15 minuutin jaksoina.

Merkitään 15 minuutissa tapahtuvaa suhteellista kasvua k:lla.

$$\begin{aligned} ak^3 &= 1,9a \quad || : a \\ k^3 &= 1,9 \quad ||()^{\frac{1}{3}} \\ (k^3)^{\frac{1}{3}} &= 1,9^{\frac{1}{3}} \\ k &= 1,9^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Tunnissa bakteerien määrä kasvaa $k^4 = (1,9^{\frac{1}{3}})^4 = k^{\frac{4}{3}} = 2,3533 \approx 2,4$-kertaiseksi.

Tehtävä

175. Tehtävä

$11\,145 \approx 11\,000$

Peurojen lukumäärän vuosittainen suhteellinen kasvu: $\dfrac{1800}{1500} = \dfrac{6}{5}$.

Peurojen lukumäärä 10 vuoden kuluttua: $1800 \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{10} = 11145.$

Tehtävä

176. Tehtävä

Merkitään vuotuista muutoskerrointa k ja alkuperäistä päästöjen määrää P.

Viiden vuoden kuluttua jäljellä saisi olla enää puolet päästöistä, eli $\frac{P}{2}$.

Vuodet	päästöt
0	P
1	$P \cdot k$
2	$P \cdot k^2$
...	
5	$P \cdot k^5$

$$\begin{aligned} P \cdot k^5 &= \frac{P}{2} && \| : P \\ k^5 &= \frac{1}{2} && \| \sqrt[5]{} \\ k &= \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \\ k &= 0,8706 \end{aligned}$$

Päästöjä pitää vähentää joka vuosi $1 - 0,8706 = 12,94 \approx 13$ %.

Tehtävä

177. Tehtävä

Merkitään korkokerrointa k:lla

vuodet	pääoma
0	4000
1	$4000 \cdot k$
2	$4000 \cdot k^2 = 4368,10$

$$
\begin{aligned}
4000 \cdot k^2 &= 4368,10 \\
k^2 &= \frac{4368,10}{4000} \\
k &= \sqrt{\frac{4368,10}{4000}} \quad k > 0 \\
k &= 1,045
\end{aligned}
$$

Tehtävä

178. Tehtävä

Selvitetään aluksi, mihin osuuteen hiili-14 pitoisuus pienenee vuodessa. Radioaktiivinen hajoaminen on eksponentiaalista vähenemistä. Merkitään vuoden hajoamisen jälkeen jäljelle jäävää osuutta k ja alkuperäistä C-14 pitoisuutta a. Tiedetään, että 5730 vuodessa pitoisuus pienenee puoleen, joten

$$\begin{aligned}
ak^{5730} &= \frac{a}{2} && || : a \\
k^{5730} &= \frac{1}{2} && ||()^{\frac{1}{5730}} \\
(k^{5730})^{\frac{1}{5730}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}} \\
k^{5730\cdot\frac{1}{5730}} &= (2^{-1})^{\frac{1}{5730}} \\
k &= 2^{-\frac{1}{5730}}
\end{aligned}$$

Vielä ei kannata laskea k:n likiarvoa.

Selvitetään kuinka monessa vuodessa pitoisuus pienenee yhdeksään prosenttiin.

$$\begin{aligned}
ak^t &= 0,09a && || : a \\
(2^{-\frac{1}{5730}})^t &= 0,09 \\
2^{-\frac{1}{5730}t} &= 0,09 \\
2^{-\frac{t}{5730}} &= 0,09 && ||\log_2()\ ^* \\
-\frac{t}{5730} &= \log_2(0,09) && || \cdot (-5730) \\
t &= -5730 \cdot \log_2(0,09) \\
t &= 19\,906 \\
t &\approx 20\,000
\end{aligned}$$

Hammas on noin 20 000 vuotta vanha.

* Joillakin vanhemmilla laskimilla joudutaan toimimaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
2^{-\frac{t}{5730}} &= 0,09 && ||\log_{10}() \\
\log_{10}(2^{-\frac{t}{5730}}) &= \log_{10}(0,09) \\
-\frac{t}{5730}\log_{10}(2) &= \log_{10}(0,09) && || : \log_{10}(2)\ \cdot(-5730) \\
t &= -\frac{\log_{10}(0,09)}{\log_{10}(2)} \cdot 5730
\end{aligned}$$

Tehtävä

179.

Tehtävä

Korko: $3,25\ \% = 0,0325$

Korkokerroin: $1 + 0,0325 = 1,0325$

vuodet	pääoma
0	3000
1	$3000 \cdot 1,0325$
2	$3000 \cdot 1,0325 \cdot 1,0325 = 3000 \cdot 1,0325^2$
3	$3000 \cdot 1,0325^3$
...	...
18	$3000 \cdot 1,0325^{18} = 5335,0973$

Pääoma kasvaa $5335,10$ euroon.

Tehtävä

180. Tehtävä

Määritetään muutoskertoimet, jotka ovat muotoa $1+p$, missä p on muutosprosentti.

$$\begin{aligned} 2005: &\quad k_5 = 1,0310 \\ 2006: &\quad k_6 = 0,9580 \\ 2007: &\quad k_7 = 1,0650 \end{aligned}$$

a)

$$a \cdot 1,031 \cdot 0,958 \cdot 1,065 = 1,051898a$$

$$1,051898 - 1 = 0,051898 \approx 5,19\ \%$$

b) Merkitään vakiota vuotuista muutoskerrointa k ja vuonna 2004 juodun kahvin määrää a.

$$\begin{aligned} a \cdot k^3 &= a \cdot 1,031 \cdot 0,958 \cdot 1,065 \quad || : a \\ k^3 &= 1,031 \cdot 0,958 \cdot 1,065 \\ k &= \sqrt[3]{1,031 \cdot 0,958 \cdot 1,065} \\ k &= 1,017009 \end{aligned}$$

$$1,017008 - 1 = 0,017009 \approx 1,70\ \%$$

Tehtävä

181. Tehtävä

Vastaukset: a) 1,37 g b) 1,31 g c) 1,26 g d) 2,23 g

Promethiumin määrästä jää vuoden aikana jäljelle $100 - 23,2 = 76,8\%$

Selvitetään, kuinka paljon promethiumista jää jäljelle 1 kuukauden kuluessa. Merkitään kuukaudessa jäljelle jäävää prosenttimäärää k:lla. Tiedetään, että 12 kuukaudessa jäljelle jää 76,8%.

$$k^{12} = 0,768 \qquad ||^{\frac{1}{12}}$$
$$k = 0,768^{\frac{1}{12}}$$

Muodostetaan taulukkoa

kuukaudet	massa
-18	$1,50 \cdot 0,768^{-\frac{3}{2}}$
-2	$1,50 \cdot 0,768^{-\frac{1}{6}}$
-1	$1,50 \cdot 0,768^{-\frac{1}{12}}$
0	1,50
1	$1,50 \cdot 0,768^{\frac{1}{12}}$
2	$1,50 \cdot (0,768^{\frac{1}{12}})^2 = 1,50 \cdot 76,8^{\frac{2}{12}} = 1,50 \cdot 76,8^{\frac{1}{6}}$
3	$1,50 \cdot 0,768^{\frac{3}{12}} = 1,50 \cdot 76,8^{\frac{1}{4}}$
4	$1,50 \cdot 0,768^{\frac{4}{12}} = 1,50 \cdot 76,8^{\frac{1}{3}}$
6	$1,50 \cdot 0,768^{\frac{1}{2}}$
8	$1,50 \cdot 0,768^{\frac{2}{3}}$

Tehtävä

182. Tehtävä

$2858 \approx 2900$

vuodet	hirvien määrä	
-5		$4200 \cdot 1,08^{-5} = 2585$
...	...	
-2	$\dfrac{4200 \cdot 1,08^{-1}}{1,08}$	$4200 \cdot 1,08^{-2}$
-1	$\dfrac{4200}{1,08} = 4200 \cdot \dfrac{1}{1,08}$	$4200 \cdot 1,08^{-1}$
0	4200	$4800 \cdot 1,08^{0}$
1	$4200 \cdot 1,08$	$4200 \cdot 1,08^{1}$
2	$4200 \cdot 1,08 \cdot 1,08$	$2000 \cdot 1,08^{2}$
3		$4200 \cdot 1,08^{3}$

Tehtävä

183. Tehtävä

Merkitään viime vuoden liikevaihtoa x.

Tiedetään, että kun viimevuoden liikevaihto kasvoi 17 %, lopputuloksena oli $12,5$ miljoonaa. Muodostetaan tästä yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x \cdot 1,17 &= 12,5 \\ x &= \frac{12,5}{1,17} \\ x &= 10,6838 \approx 10,7 \end{aligned}$$

Liikevaihto oli viime vuonna $10,7$ miljoonaa euroa.

Viiden vuoden kuluttua: $12,5 \cdot 1,17^5 = 27,4056 \approx 27,4$ miljoonaa euroa.

Tehtävä

184. Tehtävä

a) 75 %

b) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}} = 0,045158 \approx 4,5\ \%$

c) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{15}} = 0,62107 \approx 62\ \%$

Tehtävä

185. Tehtävä

a) $3,28 \cdot (1 - 0,023)^n = 3,28 \cdot 0,977^n$

b) $3,28 \cdot 0,977^{15} = 2,3136 \text{ kg} \approx 2,31 \text{ kg}$

c) $3,28 \cdot 0,977^{-1,5} = 3,3965 \text{ kg} \approx 3,40 \text{ kg}$

Tehtävä

Sisällysluettelo

186. Tehtävä

$0,8$ cm paksun lasilevyn läpäisee 75 % valosta.

a) Lasilevyn läpäisee $0,75^{\frac{1,3}{0,8}} = 0,62658$ valosta, eli siihen absorboituu $1 - 0,62658 = 0,37342 \approx 37$ %.

b) $1 - 0,75^{\frac{0,4}{0,8}} = 0,13397 \approx 13$ %

Tehtävä

187. Tehtävä

a) $17,253\ \% \approx 17,3\ \%$

b) $73,438\ \% \approx 73,4\ \%$

Tehtävä

188. Tehtävä

$63,56\ \% \approx 64\ \%$

$1,5$ cm paksusta suodattimesta pääsee läpi $1-0,78=0,22$ pölyhiukkasista.

$1,0$ cm paksun suodattimen läpäisee $0,22^{\frac{1}{1,5}}=0,3644$. Tämä suodatin suodattaa $1-0,3644=0,6356=63,56\ \%$ pölyhiukkasista.

Tehtävä

189. Tehtävä

Korko: $4,35\ \% = 0,0435$

Korkokerroin: $1 + 0,0435 = 1,0435$

$$2000 \cdot 1,0435^{20} = 4686,8285 \approx 4686,83\ €$$

Tehtävä

190. Tehtävä

Määritetään ensin väkiluvun suhteellinen muutos yhden vuoden aikana. Merkitään yhden vuoden suhteellista muutosta k.

Suhteellinen muutos kolmen vuoden aikana: $1-0,3=0,7$. Selvitetään k. k:n voi ilmaista kahdella tavalla.

$$\begin{aligned} k^3 &= 0,7 \quad || \sqrt[3]{\ } \\ k &= \sqrt[3]{0,7} \\ k &= 0,8879 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} k^3 &= 0,7 \quad ||^{\frac{1}{3}} \\ (k^3)^{\frac{1}{3}} &= 0,7^{\frac{1}{3}} \\ k^{3\cdot\frac{1}{3}} &= 0,7^{\frac{1}{3}} \\ k &= 0,7^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Tässä vaiheessa nähdään, että vuosittain kunnasta muuttaa pois $1-0,8879=0,1121\approx 11\ \%$ väestöstä. Käytetään laskuissa kuitenkin tarkkaa arvoa.

a) $16\,400\cdot 0,7^{\frac{1}{3}}=14562\approx 14\,600$

b) $16\,400\cdot(0,7^{\frac{1}{3}})^6=16\,400\cdot 0,7^{\frac{1}{3}\cdot 6}=16\,400\cdot 0,7^2=8036\approx 8040$

c) $16\,400\cdot(0,7^{\frac{1}{3}})^{-2}=16\,400\cdot 0,7^{-\frac{2}{3}}=20\,802\approx 20\,800$

c-kohdan voi tehdä myös seuraavasti:

Merkitään väestömäärää kaksi vuotta sitten p. Tiedetään, että kahden vuoden kuluttua tästä väestömäärä on 16 400.

$$\begin{aligned} p\cdot\sqrt[3]{0,7}^2 &= 16\,400 \qquad || : \sqrt[3]{0,7}^2 \\ p &= \frac{16\,400}{\sqrt[3]{0,7}^2} \\ p &= 20\,802\approx 20\,800 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 191. Tehtävä

Kokeilemalla saadaan selville:

a) $x = 2$ b) $t = 3$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 192. Tehtävä

a) 2 (Mihin potenssiin 6 pitää korottaa, jotta saadaan 36)

b) 3 (Koska 2^3 on 8)

c) 4

d) 1

e) 0 (Kun 8 korotetaan potenssiin 0 saadaan 1)

Tehtävä

Harjoitustehtävä 193. Tehtävä

a)

$$
\begin{aligned}
4^x &= 64 \\
x &= \log_4(64) \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
5^x &= 625 \\
x &= \log_5(625) \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 194. Tehtävä

a) -1

b) 6 $\quad \lg() = \log_{10}()$ Huomaa, että luvussa 1 000 000 on kuusi nollaa.

c) 4 $\quad \mathrm{lb}() = \log_2()$

d) -3

e) $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ Neliöjuuri luvusta 9 on 3. Neliöjuuri on sama kuin $\frac{1}{2}$-potenssiin korotus.

f) $3\dfrac{1}{2}$ $\quad$ Joillakin laskimilla pitää käyttää muotoa $\dfrac{\log_{10}(16384)}{\log_{10}(16)}$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 195. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^x &= 135 \qquad || : 5 \\ 3^x &= 27 \\ x &= \log_3(27) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \cdot 18^t &= 144 \cdot 3^t \quad || : 4 \quad || : 3^t \\ \frac{18^t}{3^t} &= \frac{144}{4} \\ \left(\frac{18}{3}\right)^t &= 36 \\ 6^t &= 36 \\ t &= \log_6(36) \\ t &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 13 \cdot 8^x - 48 &= 4 \\ 13 \cdot 8^x &= 52 \\ 8^x &= \frac{52}{13} && \text{Huomaa! 52 on jaollinen kahdella, jaa se tekijöihin} \\ 8^x &= 4 \\ x &= \log_8(4) && \text{Tämä on hiukan hankala, selvitys alla} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

8-kantainen logaritmi neljästä saadaan selville, kun ensin todetaan, että vastaus on ykkösen ja nollan välillä. Muistetaan, että kuutiojuuri kahdeksasta on kaksi, toisin ilmaistuna $8^{\frac{1}{3}} = 2$. Toisaalta $2^2 = 4$. Yhdistetään nämä.

$$(8^{\frac{1}{3}})^2 = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

Näin ollen vastaus logaritmilaskuun on $\frac{2}{3}$.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 196. Tehtävä

Sijoituksen korkokerroin on $1 + 0,37 = 1,37$.

$$
\begin{aligned}
3000 \cdot 1,37^t &= 10\,000 && \| : 3000 \\
1,37^t &= \frac{10}{3} \\
t &= \log_{1,37}\left(\frac{10}{3}\right) \\
t &= 3,82
\end{aligned}
$$

Vastaus: 4 vuoden kuluttua.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 197. Tehtävä

a) Merkitään päivässä jäljelle jäävää osuutta k:lla ja aineen alkuperäistä määrää a:lla.

$$\begin{aligned} a \cdot k^{3,82} &= \frac{a}{2} && \|: a \\ k^{3,82} &= \frac{1}{2} && \|()^{\frac{1}{3,82}} \\ (k^{3,82})^{\frac{1}{3,82}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3,82}} \\ k^{3,82\cdot\frac{1}{3,82}} &= 0,83406 \\ k &= 0,83406 \end{aligned}$$

Isotoopista hajoaa päivässä $1 - 0,83406 = 0,16594 \approx 16,6\%$

b) Vuodessa Curiumin määrä pienenee $100 - 2,35 = 97,65$ prosenttiin.

$$\begin{aligned} a \cdot 0,9765^t &= \frac{a}{2} \\ 0,9765^t &= \frac{1}{2} \\ t &= \log_{0,9765}\left(\frac{1}{2}\right) \\ t &= 29,148 \\ t &\approx 29,1 \text{ vuotta} \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 198. Tehtävä

a) $\log_2(2^4) = \log_2(16) = 4$

b) $\log_5(5^3) = \log_5(125) = 3$

c) $\log_7(7^5) = 7$ Mihin potenssiin 7 pitää korottaa, jotta saadaan 7^5? Oletettavasti viiteen.

d) $\log_{12}(12^8) = 8$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 199. Tehtävä

a) $6^{\log_6(36)} = 6^2 = 36$

b) $3^{\log_3(81)} = 3^4 = 81$

c) $2^{\log_2(6)} =$ Huomaa, että eksponentissa määritellään ensin sellainen luku, johon kun 2 korotetaan, saadaan 6. Yleisin virhe on lähteä miettimään kyseisen luvun suuruutta. Sen suuruudella ei ole mitään merkitystä tehtävän kannalta. Seuraavaksi lasketaan kaksi potenssiin se äsken määritelty luku. Mitä saadaan? Tietenkin kuusi.

Ajatellaan sama tehtävä eri tavalla: Mitä saadaan, kun luku kaksi korotetaan potenssiin, johon kun se korotetaan, saadaan kuusi? Varmaankin kuusi.

d) $15^{\log_{15}(4)} = 4$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 200.

Tehtävä

a) 2 ja $\dfrac{1}{2}$

b) 3 ja $\dfrac{1}{3}$

c) -4 ja $-\dfrac{1}{4}$

Näyttäisi siltä, että vastaukset ovat toistensa käänteislukuja. Eli oletettavasti voidaan yleistää, että logaritmin käänteisluku saadaan vaihtamalla jäsenten paikat keskenään.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 201.

Tehtävä

a) $\log_8(8^{\frac{2}{5}}) = \dfrac{2}{5}$

b) $150^{\log_{150}(149)} = 149$

c) $2^{5\log_{32}(3)} = (2^5)^{\log_{32}(3)} = 32^{\log_{32}(3)} = 3$

d) $\log_{14}(\sqrt{14}) = \log_{14}(14^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 202. Tehtävä

a) $\log_3(9^5) = \log_3((3^2)^5) = \log_3(3^{2\cdot 5}) = \log_3(3^{10}) = 10$

b) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-3}\right) = \log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{3}\right) = \log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{3}\right) = \log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot 3}\right) =$
$\log_{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\right) = 6$

c) $8^{\log_2(5)} = (2^3)^{\log_2(5)} = (2^{\log_2(5)})^3 = 5^3 = 125$

d) $243^{\log_3(10)} = (3^5)^{\log_3(10)} = (3^{\log_3(10)})^5 = 10^5 = 100\ 000$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 203. Tehtävä

a) $\log_7((7^2)^3) = \log_7(7^{2\cdot3}) = 2\cdot3 = 6$

b) $\log_3(81^{12}) = \log_3((3^4)^12) = \log_3(3^{4\cdot12}) = 4\cdot12 = 48$

c) $\log_{27}(9^6) = \log_{27}((27^{\frac{2}{3}})^6) = \log_{27}(27^{\frac{2}{3}\cdot6}) = \dfrac{2}{3}\cdot6 = 9$

Näyttäisi siltä että sama lopputulos saadaan laskemalla esim. a-kohdassa $\log_7(49)\cdot3$ Eli oletettavasti logaritmin sisällä olevan eksponentin voisi siirtää logaritmin kertojaksi.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 204. Tehtävä

$$\begin{aligned}
\log_3(8^u) &= 12 \cdot \log_3(2) \\
\log_3((3^{\log_3(8)})^u) &= 12 \cdot \log_3(2) \\
\log_3(3^{\log_3(8)\cdot u}) &= 12 \cdot \log_3(2) \\
\log_3(8) \cdot u &= 12 \cdot \log_3(2) \\
u &= 12 \cdot \frac{\log_3(2)}{\log_3(8)} \\
u &= 4
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 205. Tehtävä

a) $\log_{11}(121^5) = 5 \cdot \log_{11}(121) = 5 \cdot 2 = 10$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(9^{14}) = 14 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(9) = 14 \cdot (-2) = -28$

c) $\log_{125}(5^{-3}) = -3 \cdot \log_{125}(5) = -3 \cdot \dfrac{1}{3} = -1$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 206. Tehtävä

a) $\log_3(256) \cdot \log_4(3) = \log_4(3^{\log_3(256)}) = \log_4(256) = 4$

b) $\log_{32}(9) \cdot \log_9(8) = \log_{32}(9^{\log_9(8)}) = \log_{32}(8) = \dfrac{3}{5}$

c) $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = \log_a(b^{\log_b(a)}) = \log_a(a) = 1$

Tehtävä

Sisällysluettelo

Harjoitustehtävä 207. Tehtävä

a) Vastaus: $x = 4$
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 12^x &= 20736 && ||\log_{10}() \\ \log_{10}(12^x) &= \log_{10}(20736) && \text{Eksponentin siirtosääntö} \\ x \cdot \log_{10}(12) &= \log_{10}(20736) && || : \log_{10}(12) \\ x &= \frac{\log_{10}(20736)}{\log_{10}(12)} && \text{Loppu laskimella} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

b) Vastaus: $t = \frac{4}{3}$
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 216^t - 450 &= 2142 && || + 450 \\ 2 \cdot 216^t &= 2592 && || : 2 \\ 216^t &= 1296 && ||\lg() \\ \lg(216^t) &= \lg(1296) \\ t\lg(216) &= \lg(1296) \\ t &= \frac{\lg(1296)}{\lg(216)} \\ t &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

c) Vastaus:
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{1300}{2 \cdot 6^{-t} + 3} &= 432 && || \cdot (2 \cdot 6^t + 3) \\ 1300 &= 432 \cdot (2 \cdot 6^{-t} + 3) && || : 432 \\ \frac{325}{108} &= 2 \cdot 6^{-t} + 3 && || - 3 \\ \frac{325}{108} - 3 &= 2 \cdot 6^{-t} \\ \frac{325}{108} - \frac{324}{108} &= 2 \cdot 6^{-t} \\ \frac{1}{108} &= 2 \cdot 6^{-t} && || : 2 \\ \frac{1}{216} &= 6^{-t} && \text{Muutetaan puolittain käänteisluvuiksi} \\ 216 &= 6^t \\ 6^t &= 216 && ||\lg() \\ \lg(6^t) &= \lg(216) \\ t\lg(6) &= \lg(216) \\ t &= \frac{\lg(216)}{\lg(6)} \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 208. Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}
x &= \log_4(8) \\
4^x &= 8 \qquad\qquad || \log_2() \\
\log_2(4^x) &= \log_2(8) \\
x\log_2(4) &= \log_2(8) \\
x &= \frac{\log_2(8)}{\log_2(4)} \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x &= \log_{243}(27) \\
243^x &= 27 \qquad\qquad || \log_3() \\
x\log_3(243) &= \log_3(27) \\
x &= \frac{\log_3(27)}{\log_3(243)} \\
x &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x &= \log_{19}(2476099) \\
19^x &= 2476099 \qquad\qquad || \lg() \\
x\lg(19) &= \lg(2476099) \\
x &= \frac{\lg(2476099)}{\lg(19)} \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 209. Tehtävä

a) 2

$$\begin{aligned}\log_6(2) + \log_6(18) &= \log_6(6^{\log_6(2)+\log_6(18)})\\ &= \log_6(6^{\log_6(2)} \cdot 6^{\log_6(18)})\\ &= \log_6(2 \cdot 18)\\ &= \log_6(36)\\ &= 2\end{aligned}$$

b) 4

$$\begin{aligned}\lg(40) + \lg(250) &= \log_{10}(40) + \log_{10}(250)\\ &= \log_{10}(10^{\log_{10}(40)+\log_{10}(250)})\\ &= \log_{10}(10^{\log_{10}(40)} \cdot 10^{\log_{10}(250)})\\ &= \log_{10}(40 \cdot 250)\\ &= \log_{10}(10\,000)\\ &= 4\end{aligned}$$

c) 2

$$\begin{aligned}\log_{12}(3) + \log_{12}(6) + \log_{12}(8) &= \log_{12}(12^{\log_{12}(3)+\log_{12}(6)+\log_{12}(8)})\\ &= \log_{12}(12^{\log_{12}(3)} \cdot 12^{\log_{12}(6)} \cdot 12^{\log_{12}(8)})\\ &= \log_{12}(3 \cdot 6 \cdot 8)\\ &= \log_{12}(144)\\ &= 2\end{aligned}$$

Päässä/paperillalaskuohjeita.

b-kohta: Laske ensin $10 \cdot 250 = 2500$ sen jälkeen kerro vielä neljällä $4 \cdot 2500 = 10\,000$ Voit tehdä samat vaiheet myös toisin päin.

c-kohta: $18 \cdot 8$: laske ensin $20 \cdot 8 = 160$ ja vähennä siitä $2 \cdot 18 = 36$. $180 - 36 = 144$. Tai laske ensin $10 \cdot 8$, lisää siihen puolet ja vielä $3 \cdot 8$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 210. Tehtävä

a) 2

$$\begin{aligned}\log_5(100)-\log_5(4) &= \log_5(5^{\log_5(100)-\log_5(4)})\\ &= \log_5\left(\frac{5^{\log_5(100)}}{5^{\log_5(4)}}\right)\\ &= \log_5\left(\frac{100}{4}\right)\\ &= \log_5(25)\\ &= 2\end{aligned}$$

b) 1

$$\begin{aligned}\log_9(108)-\log_9(12) &= \log_9(9^{\log_9(108)-\log_9(12)})\\ &= \log_9\left(\frac{9^{\log_9(108)}}{9^{\log_9(12)}}\right)\\ &= \log_9\left(\frac{108}{12}\right)\\ &= \log_9(9)\\ &= 1\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 211. Tehtävä

a) 2

$$\begin{aligned}\log_8(80) - \log_8(5) + \log_8(4) &= \log_8\left(\frac{80 \cdot 4}{5}\right)\\ &= \log_8(64)\\ &= 2\end{aligned}$$

b) 3

$$\begin{aligned}\log_2(5+\sqrt{17}) + \log_2(5-\sqrt{17}) &= \log_2((5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17}))\\ &= \log_2(5^2 - \sqrt{17}^2)\\ &= \log_2(25-17)\\ &= \log_2(8)\\ &= 3\end{aligned}$$

Tehtävä

212. Tehtävä

a) 2 (Mihin potenssiin 3 pitää korottaa, jotta saadaan 9?)

b) 3 c) 2 d) 3 e) 5

f) 0 Seitsemän pitää korottaa potenssiin 0, jotta saadaan 1.

g) 5

Tehtävä

213. Tehtävä

Kun korosta vähennetään lähdevero, 30 %, jäljelle jää 70 %.

Todellinen vuosikorko, eli korko vähennettynä lähdeverolla. $0,70 \cdot 0,0210 = 0,0147$

Korkokerroin $k = 1,0147$

Tavoitepääoma $300 + 100 = 400$ €

Vuosien lukumäärä n

$$\begin{aligned}
300 \cdot 1,0147^n &= 400 && ||:300 \\
1,0147^n &= \frac{4}{3} \\
n &= \log_{1,0147}\left(\frac{4}{3}\right) \\
n &= 19,71 \approx 20
\end{aligned}$$

Huom! Tämän tyyppisissä tehtävissä kannattaa olla tarkkana pyöristyksen kanssa. Vaikka n olisi ollut vähemmän kuin $19,5$, olisi lopullinen vastaus kuitenkin pyöristetty ylös, koska vaadittu sadan euron tuotto ei olisi tullut täyteen pienemmässä ajassa.

Jos käytössä on laskin, jossa on vain kymmenkantainen logaritmi.

$$\begin{aligned}
1,0147^n &= \frac{4}{3} && ||\lg() \\
\lg(1,0147^n) &= \lg\left(\frac{4}{3}\right) && \text{(Eksponentin siirtosääntö)} \\
n\lg(1,0147) &= \lg\left(\frac{4}{3}\right) && ||:n \\
n &= \frac{\lg\left(\frac{4}{3}\right)}{\lg(1,0147)}
\end{aligned}$$

Tehtävä

214. Tehtävä

a) 1536 yksilöä
2007 määrä kaksinkertaistuu kolme kertaa: $192 \cdot 2^3 = 1536$.

b) 48
2007 määrä puolittuu kahteen kertaan: $192 \cdot 2^{-2} = \dfrac{192}{4} = 48$.

c) Vuonna 2001

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n &= 192 \\ 2^n &= 64 \\ n &= \log_2(64) \\ n &= 6 \end{aligned}$$

6 vuotta aiemmin, eli vuonna 2001

Tehtävä

215. Tehtävä

70 vuoden kuluttua.

Cesiumista jää joka vuosi edellisen vuoden määrään verrattuna jäljelle $1 - 0,023 = 0,977 = 97,7\ \%$
Cesiumin turvallinen pitoisuus a
Cesiumin nykyinen pitoisuus $5a$
Vuosien määrä n

$$
\begin{aligned}
5a \cdot 0,977^n &= a \qquad || : 5a \\
0,977^n &= \frac{1}{5} \\
n &= \log_{0,977}\left(\frac{1}{5}\right) \\
n &= 69,17 \approx 70
\end{aligned}
$$

Aineen määrä on ensimmäisen kerran alle maksimirajan 70 vuoden kuluttua.

Tehtävä

216. Tehtävä

a) 2 b) 7

c) -1, Kun 2 korotetaan potenssiin -1, saadaan puolikas.

d) -2 e) 4

f) -3 Tiedetään, että $2^9 = 512$, voidaan päätellä, että $2^9 = 2^{3\cdot3} = (2^3)^3 = 8^3$.

Tehtävä

217. Tehtävä

Vastaus: Vuonna 2022

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1{,}022^n &= 1{,}27 \cdot 1{,}011^n \\
\frac{1{,}022^n}{1{,}011^n} &= 1{,}27 \\
\left(\frac{1{,}022}{1{,}011}\right)^n &= 1{,}27 \\
n &= \log_{\frac{1{,}022}{1{,}011}}(1{,}27) \\
n &= 22{,}08
\end{aligned}$$

Tehtävä

218. Tehtävä

Liikennekuolemien tavoiteltu muutoskerroin $1 - 0,08 = 0,92$.

$$\begin{aligned} 0,92^n &= \frac{1}{2} \\ n &= \log_{0,92}\left(\frac{1}{2}\right) \\ n &= 8,31 \approx 9 \qquad \text{(Ei puolitu vielä 8 vuodessa.)} \end{aligned}$$

Laskimella, jossa on vain 10-kantainen logaritmi:

$$\begin{aligned} 0,92^n &= \frac{1}{2} \qquad\qquad ||\lg() \\ \lg(0,92^n) &= \lg\left(\frac{1}{2}\right) \\ n \cdot \lg(0,92) &= \lg\left(\frac{1}{2}\right) \\ n &= \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg(0,92)} \end{aligned}$$

Tehtävä

219. Tehtävä

Vastaus: 187 vuoden kuluttua.

Ratkaisu: Katsotaan, miten saadaan selville, kuinka paljon radioaktiivisesta strontiumista jää jäljelle yhden vuoden hajoamisen jälkeen. Merkitään jäljelle jäävää osuutta k:lla. Tiedetään, että $29,5$ vuodessa määrä puolittuu, joten

$$
\begin{aligned}
k^{29,5} &= \frac{1}{2} \qquad\qquad || ()^{\frac{1}{29,5}} \\
(k^{29,5})^{\frac{1}{29,5}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{29,5}} \\
k &= 2^{-\frac{1}{29,5}}
\end{aligned}
$$

Aika vuosina: n

$$
\begin{aligned}
80a \cdot k^n &= a \\
80a \cdot (2^{-\frac{1}{29,5}})^n &= a \\
2^{-\frac{n}{29,5}} &= \frac{1}{80} \\
-\frac{n}{29,5} &= \log_2\left(\frac{1}{80}\right) \\
n &= -29,5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{80}\right) \\
n &= 186,497 \approx 187
\end{aligned}
$$

Tehtävä

220. Tehtävä

a) 4

b) -2

c) 2 Koska $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

d) -2 $\frac{1}{9}$ pitää korottaa potenssiin -1, jolloin saadaan 9, joka pitää edelleen korottaa potenssiin kaksi. Kun nämä yhdistetään, saadaan $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 81$.

e) $\frac{1}{2}$ Neliöjuuri luvusta 36 on 6. Neliöjuuri on sama kuin korotus $\frac{1}{2}$-potenssiin.

f) $-\frac{1}{3}$

g) $\frac{5}{3}$ Tiedetään, että $32 = 2^5$ ja että kuutiojuuri luvusta 8 on 2. Kuutiojuuri on sama kuin $\frac{1}{3}$-potenssiin korottaminen. Kun nämä yhdistetään, saadaan $(8^{\frac{1}{3}})^5 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 5} = 8^{\frac{5}{3}} = 32$.

Tehtävä

221.

Tehtävä

Vastaus: 16300 vuotta sitten.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5730}} &= 0,14 \\
2^{-\frac{n}{5730}} &= 0,14 \\
-\frac{n}{5730} &= \log_2(0,14) \\
n &= -5730 \cdot \log_2(0,14) \\
n &= 16253,15 \approx 16300
\end{aligned}
$$

Tehtävä

222. Tehtävä

Vastaus: Vuonna 2023

Ratkaisu:

Selvitetään vuosittainen suhteellinen kasvu

$$
\begin{aligned}
52300 \cdot k^2 &= 57600 \\
k^2 &= \frac{576}{523} \\
k &= \left(\frac{576}{523}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
52300 \cdot k^n &= 100000 \\
52300 \cdot \left(\left(\frac{576}{523}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n &= \frac{1000}{523} \\
\left(\frac{576}{523}\right)^{\frac{n}{2}} &= \frac{1000}{523} \\
\frac{n}{2} &= \log_{\frac{597}{523}}\left(\frac{1000}{523}\right) \\
n &= 2\log_{\frac{576}{523}}\left(\frac{1000}{523}\right) \\
n &= 13,4
\end{aligned}
$$

$2010 + 13,4 = 2023,4$ Siis vuoden 2023 aikana.

Tehtävä

223. Tehtävä

Vastaus: 4 suodatinta

Ratkaisu: Kun vesin menee yhden suodattimen läpi, jäljelle jää 55% epäpuhtauksista. Tavoite on, että jäljelle jäisi lopulta vain 10% suodatettavan veden epäpuhtauksista.

$$
\begin{aligned}
0,55^n &= 0,1 \\
n &= \log_{0,55}(0,1) \\
n &= 3,85
\end{aligned}
$$

Tehtävä

224. Tehtävä

a) 3 b) 2 c) 9 (lb() = $\log_2()$) d) $4\log_5(125) = 4 \cdot 3 = 12$

Tehtävä

225.

Tehtävä

Vastaus: 8,02 vuorokautta (8vrk 28min)

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
(1-0,0828)^n &= \frac{1}{2} \\
0,9172^n &= \frac{1}{2} \\
n &= \log_{0,9172}\left(\frac{1}{2}\right) \\
n &= 8,0198 \approx 8,02
\end{aligned}$$

Tehtävä

226. Tehtävä

Vastaus: n. 1600 BC.

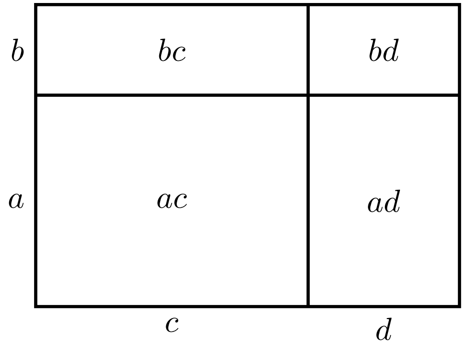
Ratkaisu: Hiili-14 isotoopin määrä pienenee joka vuosi kertoimella $2^{-\frac{1}{5730}}$.

$$\begin{aligned}
(2^{-\frac{1}{5730}})^n &= 0,65 \\
2^{-\frac{n}{5730}} &= 0,65 \\
-\frac{n}{5730} &= \log_2(0,65) \\
n &= -5730\log_2(0,65) \\
n &= 3561
\end{aligned}$$

$$1970 - 3561 = -1591$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 227. Tehtävä



Pinta-ala sivujen pituuksien tulona:

$$A = (a + b)(c + d)$$

Pinta-ala osien summana:

$$A = ac + ad + bc + bd$$

Tästä voidaan päätellä:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 228. Tehtävä

a)

$$
\begin{aligned}
(x-5)(x+8) &= x \cdot x + x \cdot 8 + (-5) \cdot x + (-5) \cdot 8 \\
&= x^2 + 8x - 5x - 40 \\
&= x^2 + 3x - 40
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
(d^2+1)(2d^2-d-4) &= d^2 \cdot 2d^2 + d^2 \cdot (-d) + d^2 \cdot (-4) + 2d^2 - d - 4 \\
&= 2d^4 - d^3 - 4d^2 + 2d^2 - d - 4 \\
&= 2d^4 - d^3 - 2d^2 - d - 4
\end{aligned}
$$

Tehtävä

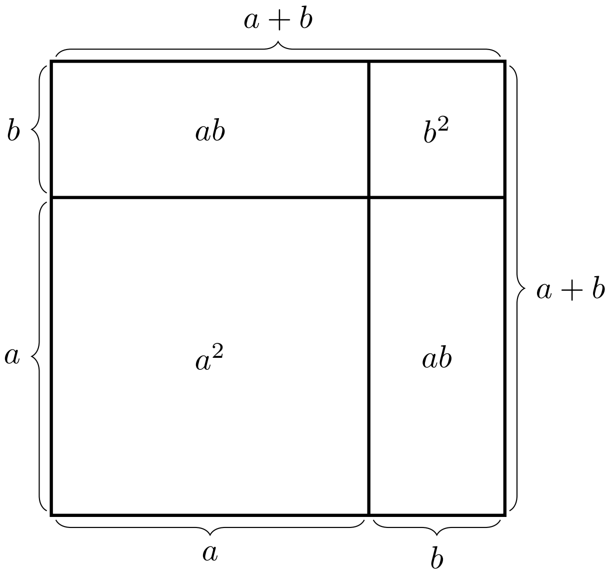
Harjoitustehtävä 229. Tehtävä

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2
1	1	$(1+1)^2 = 2^2 = 4$	$1^2+1^2 = 1+1 = 2$
1	2	$(1+2)^2 = 3^2 = 9$	$1^2+2^2 = 1+4 = 5$
2	2	16	8
2	5	49	29
10	8	324	164

Jos vähintään toinen luvuista on nolla, lausekkeista tulee sama tulos.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 230. Tehtävä



Neliön pint-ala sivun pituuden avulla on

$$A = (a+b)^2$$

Osasten yhteen laskettu pinta-ala on

$$A = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$A = a^2 + 2ab + b^2$$

Tästä saadaan kaava

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 231. Tehtävä

a) $(x+11)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 11 + 11^2 = x^2 + 22x + 121$

b) $(5-6a)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6a + (6a)^2 = 36a^2 - 60a + 25$

c) $(2t - t^2)^2 = ((2t)^2 - 2 \cdot 2t \cdot t^2 + (t^2)^2 = t^4 - 4t^3 + 4t^2$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 232. Tehtävä

Tapa 1:

a) Vaihdetaan termien paikkaa:

$$(-a+b)^2 = (b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

b) Otetaan yhteiseksi tekijäksi -1:

$$(-a-b)^2 = ((-1)\cdot(a+b))^2 = (-1)^2\cdot(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tapa 2:

a) $((-a)+b)^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $((-a)+(-b))^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 233. Tehtävä

a) $t^2 - 10t + 5^2 = t^2 - 2 \cdot t \cdot 5 + 5^2 = (t-5)^2 \quad (\text{tai } (5-t)^2)$

b) $c^2 + 8c + 16 = c^2 + 2 \cdot c \cdot 4 + 4^2 = (c+4)^2$

c) $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x-3)^2 \quad (\text{tai } (3-2x)^2)$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 234. Tehtävä

Merkitään lukuja n ja $n+2$.

$$n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

$n \geqslant 1$, joten $n+1 \geqslant 2$. Näin ollen tulos on aina positiivisen luonnollisen luvun neliö.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 235.

Tehtävä

a)

$$\begin{aligned}(a-2)(a+2) &= a \cdot a + a \cdot 2 + (-2) \cdot a + (-2) \cdot 2 \\ &= a^2 + 2a - 2a - 4 \\ &= a^2 - 4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(5+3x)(5-3x) &= 25 - 15x + 15x - 9x^2 \\ &= 25 - 9x^2\end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 236. Tehtävä

a) $(3b-2c)(3b+2c)=(3b)^2-(2c)^2=9b^2-4c^2$

b) $(12+n)(12-n)=12^2-n^2=144-n^2$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 237. Tehtävä

Vanhan taulun pinta-ala oli x^2

Uuden taulun pinta-ala on $(x+15)(x-15) = x^2 - 15^2 = x^2 - 225$.

Uuden taulun pinta-ala on 225 cm^2 pienempi.

Tehtävä

Harjoitustehtävä 238. Tehtävä

a) $a^2 - 12^2 = (a + 12)(a - 12)$

b) $49 - y^2 = 7^2 - y^2 = (7 + y)(7 - y)$

c) $4r^2 - 1 = (2r)^2 - 1^2 = (2r + 1)(2r - 1)$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 239. Tehtävä

a) 0 b) 0 c) $x = 0$ d) $t = 0$ tai $u = 0$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 240. Tehtävä

a) $(5+t)t = 0$

$$\begin{aligned} 5+t &= 0 \quad \text{tai} \quad t = 0 \\ t &= -5 \end{aligned}$$

$$t = -5 \quad \text{tai} \quad t = 0$$

b) $25x(3x^2 - 12) = 0$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x = 0 \qquad\qquad x &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

c) $(4a^2 - 1)(a^3 + 8) = 0$

$$\begin{aligned} 4a^2 - 1 &= 0 & \text{tai} \quad a^3 + 8 &= 0 \\ 4a^2 &= 1 & a^3 &= -8 \\ a^2 &= \frac{1}{4} & a &= -2 \\ a &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$a = -2 \quad \text{tai} \quad a = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad a = \frac{1}{2}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 241. Tehtävä

a) $x = -3$ tai $x = 3$

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 && \|\sqrt{\ } \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

b) $b = -4$ tai $b = 4$

$$\begin{aligned} b^2 - 16 &= 0 && \| + 16 \\ b^2 &= 16 && \|\sqrt{\ } \\ b &= \pm\sqrt{16} \\ b &= \pm 4 \end{aligned}$$

c) $y = -2$ tai $y = 2$

$$\begin{aligned} 9y^2 + 2 &= 38 && \| - 2 \\ 9y^2 &= 36 && \|\sqrt{\ } \\ 3y &= \pm 6 \\ y &= \frac{\pm 6}{3} \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

d) $x = 1$ tai $x = 9$

$$\begin{aligned} (x-5)^2 &= 16 && \|\sqrt{\ } \\ x - 5 &= \pm 4 && \| + 5 \\ x &= 5 \pm 4 \end{aligned}$$

e) $t = 1$ tai $t = 3$

$$\begin{aligned} (5t-10)^2 - 20 &= 5 \\ (5t-10)^2 &= 25 && \|\sqrt{\ } \\ 5t - 10 &= \pm 5 \\ 5t &= 10 \pm 5 \\ t &= \frac{10 \pm 5}{5} \\ t &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 242. Tehtävä

a)

$$
\begin{aligned}
z^2 + 6z &= 0 \\
z(z+6) &= 0 \\
z + 6 = 0 \qquad &\text{tai} \qquad z = 0 \\
z = -6 \qquad & \qquad\quad\; z = 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
e^2 &= 2e \\
e^2 - 2e &= 0 \\
e(e-2) &= 0 \\
e = 0 \qquad &\text{tai} \qquad e - 2 = 0 \\
e = 0 \qquad & \qquad\qquad\; e = 2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
5x^2 - 20x &= 0 \\
5x(x-4) &= 0 \\
5x = 0 \qquad &\text{tai} \qquad x - 4 = 0 \\
x = 0 \qquad & \qquad\qquad\; x = 4
\end{aligned}
$$

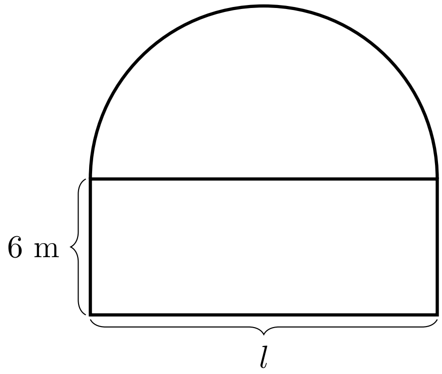
d) Aloitetaan tämä tehtävä jakamalla neljällä, jotta saadaan termeihin pienimmät mahdolliset kokonaisluvut. Tämä ei kuitenkaan ole välttämätöntä, vaan tehtävän voi ratkaista myös täsmälleen samoin kuin edellisetkin.

$$
\begin{aligned}
8u^2 &= -12u \qquad || : 4 \\
2u^2 &= -3u \\
2u^2 + 3u &= 0 \\
u(2u+3) &= 0 \\
2u + 3 = 0 \qquad &\text{tai} \qquad u = 0 \\
2u = -3 \qquad & \\
u = -\frac{3}{2} \qquad & \qquad\quad\; u = 0
\end{aligned}
$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 243. Tehtävä

Neliön sivun pituus	l
Neliön pinta-ala	$6l$
Puoliympyrän säde	$\frac{l}{2}$
Puoliympyrän pinta-ala	$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{8}$



Tapa 1:

$$\frac{\pi l^2}{8} = 6l \qquad || - 6l \quad || \cdot 8$$
$$\pi l^2 - 48l = 0$$
$$l(\pi l - 48) = 0$$

$(l = 0)$ tai $\pi l - 48 = 0$

$$l = \frac{48}{\pi}$$
$$l = 15,28$$
$$l \approx 15 \text{ m}$$

Tapa 2:

$$\frac{\pi l^2}{8} = 6l \qquad || : l \quad l > 0$$
$$\frac{\pi l}{8} = 6 \qquad || \cdot 8 \quad || : \pi$$
$$l = \frac{48}{\pi}$$
$$l = 15,28$$
$$l \approx 15 \text{ m}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 244. Tehtävä

a) $v = 3$

$$\begin{aligned} v^2 - 6v + 9 &= 0 && 6v = 2 \cdot v \cdot 3 \text{ ja } 9 = 3^2 \\ v^2 - 2 \cdot v \cdot 3 + 3^2 &= 0 && \text{tiivistetään binomin neliö} \\ (v-3)^2 &= 0 \\ v - 3 &= 0 \\ v &= 3 \end{aligned}$$

b) $x = -4$ tai $x = 8$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 36 \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 &= 36 \\ (x-2)^2 &= 36 \\ x - 2 &= \pm 6 \\ x &= 2 \pm 6 \\ x = -4 \quad &\text{tai} \quad x = 8 \end{aligned}$$

c) $d = -6$ tai $d = -4$

$$\begin{aligned} d^2 + 10d + 25 &= 1 \\ d^2 + 2 \cdot d \cdot 5 + 5^2 &= 1 \\ (d+5)^2 &= 1 \\ d + 5 &= \pm 1 \\ d &= \pm 1 - 5 \\ d = -6 \quad &\text{tai} \quad d = -4 \end{aligned}$$

d) $a = -2$ tai $a = \dfrac{8}{3}$

$$\begin{aligned} 9a^2 - 6a + 1 &= 49 \\ (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 1 + 1^2 &= 49 \\ (3a-1)^2 &= 49 \\ 3a - 1 &= \pm 7 \\ 3a &= 1 \pm 7 \\ a &= \frac{1 \pm 7}{3} \end{aligned}$$

e) $t = -\dfrac{1}{2}$ tai $t = \dfrac{7}{2}$

$$\begin{aligned} 4t^2 - 12t + 9 &= 16 \\ (2t)^2 - 2 \cdot 2t \cdot 3 + 3^2 &= 16 \\ (2t-3)^2 &= 16 \\ 2t - 3 &= \pm 4 \\ 2t &= 3 \pm 4 \\ t &= \frac{3 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 245. Tehtävä

a) $x = -9$ tai $x = 1$

$$\begin{aligned} x^2 + 8x &= 9 && 8x = 2 \cdot x \cdot 4 \\ x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 &= 9 && \text{lisätään puolittain } 4^2 \\ x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 &= 9 + 4^2 \\ (x+4)^2 &= 25 \\ x + 4 &= \pm 5 \\ x &= -4 \pm 5 \end{aligned}$$

b) $h = -2$ tai $h = 4$

$$\begin{aligned} h^2 - 2h &= 8 \\ h^2 - 2 \cdot h \cdot 1 &= 8 \\ h^2 - 2 \cdot h \cdot 1 + 1 &= 9 \\ (h-1)^2 &= 9 \\ h - 1 &= \pm 3 \\ h &= 1 \pm 3 \end{aligned}$$

c) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 1$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} && \text{lavennetaan termi } \frac{x}{2} \text{ kahdella} \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{9}{16} \\ x - \frac{1}{4} &= \pm\sqrt{\frac{9}{16}} && \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \\ x &= \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} && \text{yhteinen nimittäjä 4} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

d) $r = 5$

$$\begin{aligned} r^2 - 10r &= -25 \\ r^2 - 2 \cdot r \cdot 5 &= -25 \quad || + 5^2 \\ r^2 - 2 \cdot r \cdot 5 + 5^2 &= 0 \\ (r-5)^2 &= 0 \\ r - 5 &= 0 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

e) $b = -1$ tai $b = 2$

$$\begin{aligned} b^2 - b &= 2 \\ b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} &= 2 \\ b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 2 + \frac{1}{4} \\ \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\ b - \frac{1}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\ b &= \frac{1 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 246. Tehtävä

a) $c = -2$ tai $c = 8$

$$\begin{aligned} c^2 - 6c &= 16 \\ c^2 - 2 \cdot c \cdot 3 &= 16 && \| + 3^2 \\ c^2 - 2 \cdot c \cdot 3 + 3^2 &= 16 + 9 \\ (c-3)^2 &= 25 \\ c - 3 &= \pm 5 \\ c &= 3 \pm 5 \end{aligned}$$

b) $x = -4$ tai $x = 6$

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + 24 \\ x^2 - 2x &= 24 \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 &= 24 && \| + 1^2 \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 &= 25 \\ (x-1)^2 &= 25 \\ x - 1 &= \pm 5 \\ x &= 1 \pm 5 \end{aligned}$$

c) $y = -5$ tai $y = 1$

$$\begin{aligned} y^2 + 4y - 5 &= 0 \\ y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 &= 5 \\ y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 &= 9 \\ (y+2)^2 &= 9 \\ y + 2 &= \pm 3 \\ y &= -2 \pm 3 \end{aligned}$$

d) $n = -2$ tai $n = 7$

$$\begin{aligned} n^2 - 5n - 10 &= 4 \\ n^2 - 2 \cdot n \cdot \frac{5}{2} &= 14 \\ n^2 - 2 \cdot n \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 14 + \frac{25}{4} \\ \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{81}{4} \\ n - \frac{5}{2} &= \pm\frac{9}{2} \\ n &= \frac{5 \pm 9}{2} \end{aligned}$$

e) $b = \frac{1}{4}$ tai $b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} b^2 + \frac{b}{4} + \frac{1}{8} &= b \\ b^2 - \frac{3b}{4} &= -\frac{1}{8} && \left(\frac{3b}{4} = 2 \cdot b \cdot \frac{3}{8}\right) \quad \Big\| + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\ b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 &= \frac{1}{64} \\ \left(b - \frac{3}{8}\right)^2 &= \frac{1}{64} \\ b - \frac{3}{8} &= \pm\frac{1}{8} \\ b &= \frac{3 \pm 1}{8} \end{aligned}$$

f) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 8$

g) $z = \frac{2}{5}$ tai $z = \frac{8}{5}$

Tehtävä

a) $m = -5$ tai $m = 9$

$$2m^2 - 8m = 90 \qquad || : 2$$
$$m^2 - 4m = 45$$
$$m^2 - 2 \cdot m \cdot 2 = 45$$

Erotellaan ensimmäisen asteen termistä tekijä 2

$$m^2 - 2 \cdot m \cdot 2 + 2^2 = 45 + 2^2$$

ja lisätään sen neliö yhtälöön puolittain.

$$(m-2)^2 = 49 \qquad ||\sqrt{}$$
$$m - 2 = \pm 7$$
$$m = 2 \pm 7$$
$$m = -5 \quad \text{tai} \quad m = 9$$

b) $p = -1$ tai $p = 2$

$$8p^2 - x = 2p^2 + 5p + 12$$
$$6p^2 - 6p = 12 \qquad || : 6$$
$$p^2 - p = 2$$
$$p^2 - 2 \cdot p \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$p - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$$
$$p = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$p = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$p = -1 \quad \text{tai} \quad p = 2$$

c) $x = 2$ tai $x = 10$

$$\frac{x^2}{4} + 5 = 3x$$
$$\frac{x^2}{4} - 3x = -5 \qquad || \cdot 4$$
$$x^2 - 12x = -20$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = 6^2 - 20$$
$$(x-6)^2 = 16$$
$$x - 6 = \pm 4$$
$$x = 6 \pm 4$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

d) $x = -5$ tai $x = 2$

$$3x^2 = 30 - 9x$$
$$x^2 + 3x = 10$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$
$$x = \frac{\pm 7 - 3}{2}$$
$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

e) $e = \frac{7}{4}$ tai $e = 6$

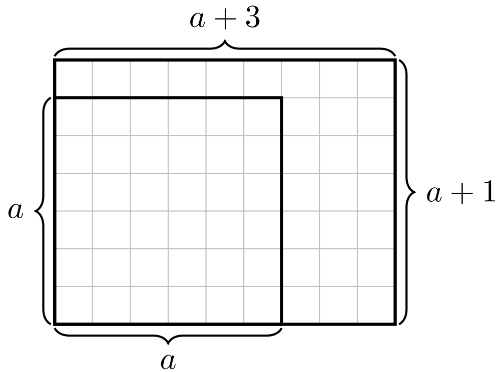
$$4e^2 - 31e + 42 = 0$$
$$e^2 - \frac{31}{4}e = -\frac{21}{2}$$
$$e^2 - 2 \cdot e \cdot \frac{31}{8} + \left(\frac{31}{8}\right)^2 = \frac{961}{64} - \frac{21}{2}$$
$$\left(e - \frac{31}{8}\right)^2 = \frac{961 - 672}{64}$$
$$= \frac{289}{64}$$
$$e - \frac{31}{8} = \pm\frac{17}{8}$$
$$e = \frac{31 \pm 17}{8}$$
$$e = \frac{7}{4} \quad \text{tai} \quad e = 6$$

f) $s = -\frac{5}{4}$ tai $s = \frac{1}{2}$

$$\frac{4}{3}s^2 + s = \frac{5}{6} \qquad || \cdot \frac{3}{4}$$
$$s^2 + \frac{3}{4}s = \frac{5}{8}$$
$$s^2 + 2 \cdot s \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{5}{8} + \frac{9}{64}$$
$$\left(s + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$
$$s + \frac{3}{8} = \pm\frac{7}{8}$$
$$s = \frac{\pm 7 - 3}{8}$$
$$s = -\frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad s = \frac{1}{2}$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 248. Tehtävä



$$\begin{aligned}
(a+1)(a+3) &= 63\\
a^2+3a+a+3\cdot 4 &= 63\\
a^2+4a &= 60\\
a^2+2\cdot a\cdot 2+2^2 &= 60+2^2\\
(a+2)^2 &= 64\\
a+2 &= 8 \qquad\qquad a>0\\
a &= 8-2\\
a &= 6
\end{aligned}$$

$$a^2 = 36$$

Tehtävä

Harjoitustehtävä 249. Tehtävä

a)

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{2-8}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+8}{2}$$

$$x = -3 \qquad\qquad x = 5$$

b)

$$m^2 + 7m = 18$$

$$m^2 + 7m - 18 = 0$$

$$m = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$m = \frac{-7 \pm 11}{2}$$

$$m = \frac{-7-11}{2} \quad \text{tai} \quad m = \frac{-7+11}{2}$$

$$m = -9 \qquad\qquad m = 2$$

c)

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

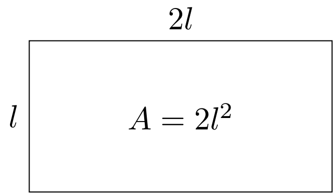
$$a = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$a = \frac{4-2}{6} \quad \text{tai} \quad a = \frac{4+2}{6}$$

$$a = \frac{1}{3} \qquad\qquad a = 1$$

Tehtävä

250. Tehtävä



Kentän pinta-ala: $2l \cdot l = 2l^2$
Kenttää ympäröivän aidan pituus: $6l$

$$
\begin{aligned}
2l^2 \cdot 65 + 6l \cdot 15 &= 7000 \\
130l^2 + 90l &= 7000 && || : 130 \\
l^2 + \frac{9}{13}l &= \frac{700}{13} \\
l^2 + 2 \cdot l\frac{9}{26} + \left(\frac{9}{26}\right)^2 &= \frac{700}{13} + \frac{81}{676} \\
\left(l + \frac{9}{26}\right)^2 &= \frac{36481}{676} \\
l + \frac{9}{26} &= \frac{191}{26} \\
l &= \frac{191-9}{26} \\
l &= \frac{182}{26} \\
l &= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= 7 \cdot 14 \\
A &= 98 \ \ \mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

7000 eurolla saadaan kenttä, jonka mitat ovat 7 m $\times$ 14 m, ja pinta-ala on 98 m^2.

Tehtävä

251. Tehtävä

$$
\begin{aligned}
(x+3)(x-3) &= 27 \\
x^2 - 3^2 &= 27 \\
x^2 - 9 &= 27 && \| + 9 \\
x^2 &= 27 + 9 \\
x^2 &= 36 && \| \sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{36} \\
x &= \pm 6
\end{aligned}
$$

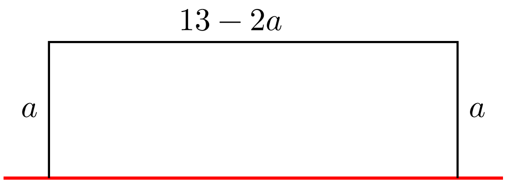
Tehtävä

Sisällysluettelo

252. Tehtävä

$2,5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \quad \text{tai} \quad 4 \text{ m} \times 5 \text{ m}$

Merkitään vajan seinään nähden kohtisuoria sivuja a.



$$\begin{aligned}
a \cdot (13 - 2a) &= 20 \\
13a - 2a^2 &= 20 \qquad\qquad || : (-10) \\
a^2 - \frac{13}{2}a &= -10 \\
a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{13}{4} + \left(\frac{13}{4}\right)^2 &= \frac{169}{16} - 10 \\
(a - \frac{13}{4})^2 &= \frac{9}{16} \\
a - \frac{13}{4} &= \pm\frac{3}{4} \\
a &= \frac{13 \pm 3}{4} \\
a = 2,5 \quad \text{tai} \quad a &= 4
\end{aligned}$$

Tehtävä

253. Tehtävä

Merkitään uutta hintaa h ja uutta myyntimäärää m.

Hinnan muutos: $h - 4,20$ Myynnin muutos: $m - 120$

Hinnan ja myynnin muutokset ovat suoraan verrannollisia. (Jos hinnan muutos kaksinkertaistetaan, niin myynnin muutoskin kaksinkertaistuu jne...)

$$\begin{aligned} \frac{m-190}{h-4,20} &= -\frac{38}{0,40} \\ m - 190 &= -95 \cdot (h - 4,20) \\ m - 190 &= -95h + 399 \\ m &= -95h + 589 \end{aligned}$$

$$mh = -95h^2 + 589h$$

$$\begin{aligned} -95h^2 + 589h &= 570 \\ 95h^2 - 589h + 570 &= 0 \\ h &= \frac{589 \pm \sqrt{(-589)^2 - 4 \cdot 95 \cdot 570}}{2 \cdot 95} \\ h = 1,20 \quad \text{tai} \quad h &= 5 \end{aligned}$$

Myyntihinnaksi pitää asettaa $5,00$ tai $1,20$ euroa.

Tehtävä

254. Tehtävä

Uusi litrahinta: l
Vanha litrahinta: $l + 0,21$

$$[\text{litrahinta}] = \frac{[\text{tankkauksen hinta}]}{[\text{tankattu määrä}]}$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{h}{V} \\ V &= \frac{h}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= 10,5 \\
\frac{65}{l} - \frac{65}{l+0,21} &= 10,5 \\
\frac{65(l+0,21) - 65l}{l(l+0,21)} &= 10,5 \\
65l + 13,65 - 65l &= 10,5l(l+0,21) \\
13,65 &= 10,5l^2 + 2,205l \\
10500l^2 + 2205l &= 13650 && || : 10500 \\
l^2 + \frac{21}{100}l &= \frac{13}{10} \\
l^2 + 2 \cdot l \cdot \frac{21}{200} + \left(\frac{21}{200}\right)^2 &= \frac{13}{10} + \frac{441}{40000} \\
\left(l + \frac{21}{200}\right)^2 &= \frac{52441}{40000} \\
l + \frac{21}{200} &= \frac{229}{200} && l > 0 \\
l &= \frac{229 - 21}{200} \\
l &= \frac{208}{200} \\
l &= \frac{104}{100} \\
l &= 1,04
\end{aligned}$$

Polttoaineen alennettu hinta oli $1,04$ €/l.

Tehtävä

255. Tehtävä

Alkuperäinen kappalehinta:	k
Alennettu kappalehinta:	$k - 1,50$
Suunniteltu määrä:	n_1
Ostettu määrä:	n_2

$$
\begin{aligned}
[\text{kappalehinta}] &= \frac{[\text{hinta}]}{[\text{määrä}]} \\
k &= \frac{h}{n} \\
n &= \frac{h}{k}
\end{aligned}
$$

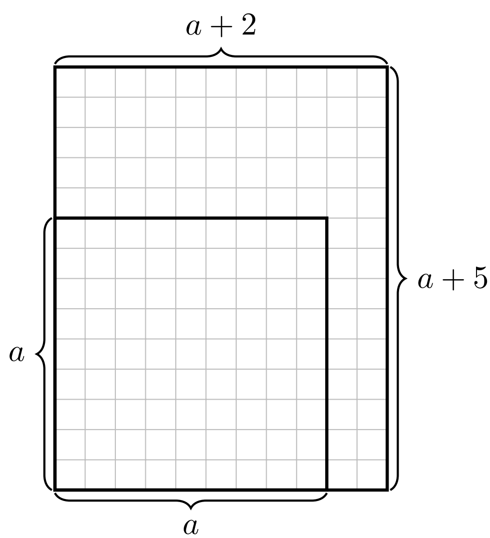
$$
\begin{aligned}
n_2 - n_1 &= 75 \\
\frac{500}{k-1,50} - \frac{500}{k} &= 75 \\
\frac{500k - 500(k-1,50)}{k(k-1,50)} &= 75 \\
\frac{750}{k^2 - 1,5k} &= 75 \\
75(k^2 - 1,5k) &= 750 \qquad || : 75 \\
k^2 - 1,5k &= 10 \\
k^2 - 2 \cdot k \cdot 0,75 + 0,75^2 &= 10 + 0,5625 \\
(k - 0,75)^2 &= 10,5625 \\
k - 0,75 &= 3,25 \\
k &= 3,25 + 0,75 \\
k &= 4,00
\end{aligned}
$$

Rapujen alkuperäinen kappalehinta oli $4,00$ euroa.

Tehtävä

256. Tehtävä

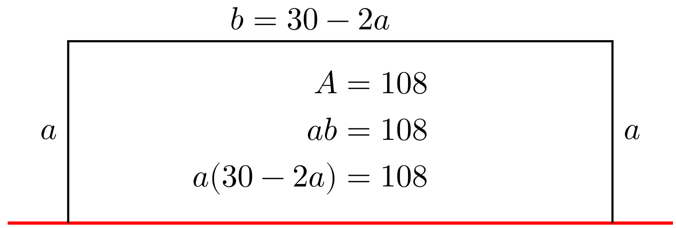
$$
\begin{aligned}
(a+2)(a+5) &= 154 \\
a^2+7a+10 &= 154 \\
a^2+7a &= 144 \\
a^2+2\cdot a\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2 &= 144+\frac{49}{4} \\
\left(a+\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{625}{4} \\
a+\frac{7}{2} &= \frac{25}{2} \qquad\qquad a>0 \\
a &= \frac{18}{2} \\
a &= 9 \\
\\
a^2 &= 81
\end{aligned}
$$



Asetelmassa oli 81 pulloa.

Tehtävä

257. Tehtävä



$$
\begin{aligned}
2a + b &= 30 \\
b &= 30 - 2a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \cdot (30 - 2a) &= 108 \\
30a - 2a^2 &= 108 && || : (-2) \\
a^2 - 15a &= -54 \\
a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{15}{2} + \left(\frac{15}{2}\right)^2 &= -52 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \\
\left(a - \frac{15}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
a - \frac{15}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\
a &= \frac{15 \pm 3}{2} \\
a_1 = 6 \quad \text{tai} \quad a_2 &= 9
\end{aligned}
$$

Selvitetään toisen sivun pituus tilanteissa 1 ja 2.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 30 - 2a_1 & \qquad b_2 &= 30 - 2a_2 \\
b_1 &= 30 - 2 \cdot 6 & \qquad b_2 &= 30 - 2 \cdot 9 \\
b_1 &= 8 & \qquad b_2 &= 12
\end{aligned}
$$

Vip-alueen mitat ovat 6×18 tai 9×12 metriä.

Tehtävä

258. Tehtävä

Merkitään korkokerrointa k.

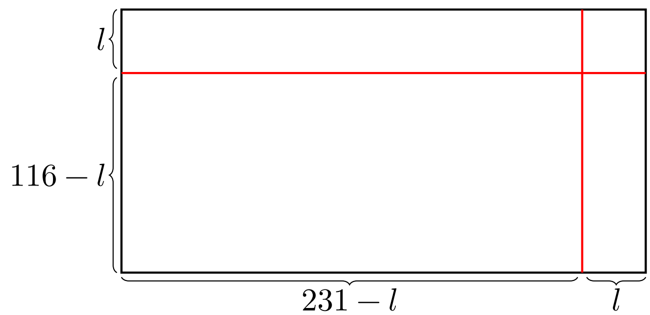
vuosi	saldo
2010	900
2011	$900k + 900$
2012	$900k^2 + 900k = 1854,36$

$$\begin{aligned}
900k^2 + 900k &= 1854,36 \qquad || : 900 \\
k^2 + k &= 2,0604 \\
k^2 + 2 \cdot k \cdot 0,5 + 0,5^2 &= 2,0604 + 0,5^2 \\
(k + 0,5)^2 &= 2,3104 \\
k + 0,5 &= 1,52 \\
k &= 1,52 - 0,5 \\
k &= 1,02
\end{aligned}$$

Korko oli 2 %.

Tehtävä

259. Tehtävä



Kun tontista otetaan pois kolmasosa, jää tontin pinta-alasta jäljelle kaksi kolmasosaa.

Tontin alkuperäinen pinta-ala: $\quad 231 \cdot 116 = 26796$

Tontin uusi pinta-ala: $\quad \dfrac{\overset{77}{\cancel{231}} \cdot 116 \cdot 2}{\cancel{3}} = 77 \cdot 232 = 17864$

$$\begin{aligned}
(231-l)(116-l) &= 17864\\
l^2 - 347l + 26796 &= 17864\\
l^2 - 347l &= -8932\\
l^2 - 2 \cdot l \cdot \frac{347}{2} + \left(\frac{347}{2}\right)^2 &= \frac{120409}{4} - \frac{35728}{4}\\
\left(l - \frac{347}{2}\right)^2 &= \frac{84681}{4}\\
l - \frac{347}{2} &= \pm\frac{291}{2}\\
l &= \frac{347 \pm 291}{2}
\end{aligned}$$

$$l = 28 \quad \text{tai} \quad l = 319$$

319 on liian iso, joten tontista menetetään 28 metriä leveät kaistaleet.

Tehtävä