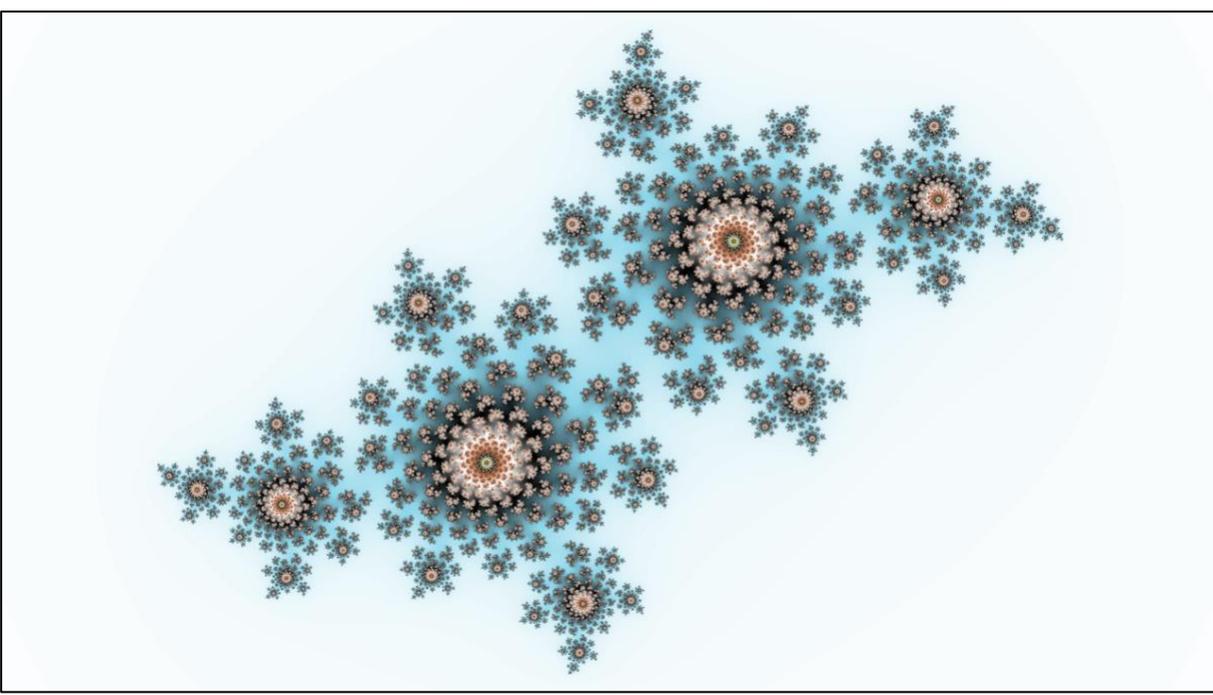


Abschätzung der fraktalen Dimension chaotischer Attraktoren mittels Kaplan-Yorke-Vermutung

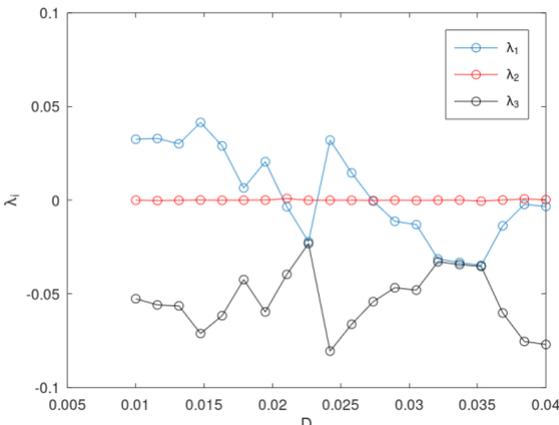
Jason von Juterczenka (16), Schülerforschungszentrum Nordhessen

Chaosforschung | Fraktale Dimension | Ljapunow-Spektrum | Attraktoren



PHYSIK

Chaotische Systeme unterliegen einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Dies wirft für mich die Frage auf, welche Mechanismen qualitativ den Verlauf der Trajektorie im Phasenraum bestimmen. Ich vermute, dass eine gebrochene Dimensionalität des zugrundeliegenden Attraktors oder dessen Einzugsbereichs ursächlich ist. Um dies zu überprüfen, analysiere ich mein Problem sowohl auf theoretischer Basis rechnerisch und geometrisch als auch durch numerische Computersimulationen chaotischer Systeme, die ich mithilfe von Poincaré-Abbildungen und Bifurkationsdiagrammen auswerte. Ziel ist die Bestimmung des Ljapunow-Spektrums, um mittels Kaplan-Yorke-Vermutung ermitteln zu können, ob der Attraktor des Systems fraktal ist.



Jugend forscht 2022,
Regionalwettbewerb Hessen Nord,
Kategorie Physik

Inhalt

1. Einführung	1
2. Messungen mit dem Chaospendel	1
2.1 Sensitive Abhängigkeit	1
2.2 Ljapunow-Exponenten	2
3. Simulation von himmelsmechanischen Problemen	2
3.1 Zweikörperproblem	2
3.2 Dreikörperproblem	3
3.3 Divergente Ljapunow-Exponenten	4
4. Simulation des Chaospendels	5
4.1 Gekoppelte Kreisbewegung	5
4.2 Lagrange-Formalismus	6
4.3 Poincare-Schnitt	7
5. Ursache sensitiver Abhängigkeit	7
5.1 Hausdorff-Dimension	7
5.2 Probleme des Chaospendels	8
6. Messungen mit dem Pohlschen Resonator	8
6.1 Der Pohlsche Resonator	8
6.2 Experimentelles Setup	9
6.3 Schwingungsdiagramme	10
6.4 Fourieranalyse	11
6.5 Zersplitterung des Torus-Attraktors	12
7. Simulation des Pohlschen Resonators	12
7.1 Weg ins Chaos	13
7.2 Ljapunow-Spektrum	14
8. Fraktale Dimension	15
8.1 Beispielrechnung	15
8.2 Diskussion	15
9. Fazit	15
9.1 Ausblick	15
10. Anhang	15
	I

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

1.Einführung. Als ich 2016 am SFN auf der Suche nach einem Forschungsthema den Begriff „Chaostheorie“ las, sah ich darin zunächst eine Paradoxie: Eine Theorie ist schließlich eine *Ordnung*, die möglichst viele erfahrene Phänomene durch einen möglichst kleinen Satz von Regeln erklärt und dadurch Vorhersagen ermöglicht – für den Begriff „Chaos“ schien in der Wissenschaft kein Platz zu sein.

2.Messungen mit dem Chaospendel. Dies weckte mein Interesse: Aus zwei Metallstangen aus dem Baumarkt, einem Kugellager und einer Verpackung als Farbpunkt konstruierte ich ein

Attraktors liegen könnte und beide somit völlig unterschiedliche weitere Verläufe nehmen könnten. Da ein Phasenraum-Volumen ein Energievolumen darstellt, wäre die Entwicklung des Systems demzufolge von der Anfangsenergie abhängig, manifestiert in einer oder mehreren Variablen. Dies führte mich zu folgenden Fragestellungen:

- Liegt dort eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen vor?
- Welcher Mechanismus ist dafür ursächlich? (*Vermutung: Fraktaler Attraktor*)
- Welche Konsequenzen (Energieerhaltung, Unschärfe, ...) ergeben sich daraus?



einfaches Chaospendel mit Messkonstruktion.

Ich begann mit theoretischer Vorarbeit, denn mir fehlte bis dato die Möglichkeit, meine theoretischen Messdaten selbst aufzeichnen zu können.

Abb.1 | Eine Auswahl der aus am getriebenen Chaospendel gewonnenen Messdaten selbst aufgezeichneten Phasenraum-Diagramme an meinem Arbeitsplatz

Ich zeichnete aus experimentell erhobenen Daten Phasenraum-Diagramme auf und beobachtete, dass sich das Pendel – sobald es zu einem Überschlag kommt – trotz gleich gemessenem Auslenkungswinkel unterschiedlich verhält. Ich vermutete fraktale Strukturen im Phasenraum als geometrische Ursache dieser Sensitivität, denn ich stellte mir vor, dass von zwei Startpunkten mit infinitesimalem Abstand einer außerhalb und einer innerhalb des Einzugsbereichs eines fraktalen

Erklärungen für das am Chaospendel beobachtete Phänomen streng zu beweisen.

2.1 Sensitive Abhängigkeit. Zunächst definiere ich, was ich im Folgenden unter sensitiver Abhängigkeit verstehe: Eine Funktion f ist sensitiv abhängig von ihren Anfangsbedingungen, wenn die Differenz zweier beliebig großer Ableitungen größer ist als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$, denn nur wenn Ableitungen (die Änderungsraten beschreiben) nicht

verschwinden, können Trajektorien exponentiell auseinanderlaufen. Diese Überlegungen finden sich in verschiedenen mathematischen Definitionen wieder, die den Begriff unterschiedlich streng auslegen.¹

2.2 Ljapunow-Exponenten. Auf der Suche nach einem quantitativen Maß für die sensitive Abhängigkeit, mit dem ich meinen Eindruck überprüfen kann, stieß ich auf den Ljapunow-Exponenten. Der Ljapunow-Exponent λ nach ALEXANDER MICHAJLOWITSCH LJAPUNOW (1857-1918) ist der Wachstumsfaktor des Abstands zweier Phasenraum-Trajektorien bei kleinem (infinitesimalem) Anfangsabstand $D_0 = |a_0 - b_0|$, wobei a_0 und b_0 ihre Startpunkte sind. Bei $\lambda < 0$ tritt Konvergenz auf, bei $\lambda = 0$ divergieren die Trajektorien polynomiell, also stets langsamer als exponentiell, bei $\lambda > 0$ exponentiell. In diesem Fall kann parameterabhängig Chaos auftreten. Pro Phasenraum-Dimension kann ein Ljapunow-Exponent angegeben werden, ihre Gesamtheit ergibt das Ljapunow-Spektrum, i.d.R. geordnet angegeben ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$). Für das Vorliegen sensitiver Abhängigkeit ist der größte Exponent des Spektrums λ_{max} relevant. Ich formte den Näherungsterm² um, bzw. löste ihn nach λ auf.

$$D(t) \approx D_0 \cdot 2^{\lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{t} \cdot \log_2 \left(\frac{D(t)}{D_0} \right) \approx \lambda \quad (2.1)$$

Auf diese Weise lässt sich immerhin λ_{max} einfach ermitteln. Allerdings ist es umständlich ein Ljapunow-Spektrum aus experimentellen Messwerten zu bestimmen, da kein vollständiger Satz von Zustandsgrößen vorliegt, sondern i.d.R. nur eine skalare Größe als Funktion der Zeit. Mittels eines Einbettungsverfahrens kann dieses Problem zwar gelöst werden³, doch ich suchte nach einer einfacheren Lösung.

3.Simulation von himmelsmechanischen Problemen. Aus diesem Grund wechselte ich von

meinem experimentellen Aufbau zur Nutzung von Simulationen. Da dies kein Informatik-Projekt ist und es mir um die induktive Beantwortung meiner Forschungsfrage ging, griff ich wann immer es ging, auf schon vorhandene Simulationen zurück und modifizierte sie lediglich. Ein grundsätzliches Problem dabei bestand in der Tatsache, dass sich bei chaotischen Systemen kaum beurteilen lässt, ob Simulationsergebnisse sinnvoll sind – sonst müsste ich schließlich nicht simulieren. Ich musste die Simulation also so kleinschrittig prüfen, dass ich den späteren Daten vertrauen kann. Dafür simulierte ich zunächst verschiedene astronomische Systeme, deren Dynamik durch das Newtonsche Gravitationsgesetz verstanden ist, sodass ich die Simulationsergebnisse mit den erwarteten Resultaten vergleichen und dadurch Probleme auffindig machen konnte. Dabei gewann ich Erfahrung im Umgang mit numerischen Zeitschritten und testete mein Verfahren zur Bestimmung des Ljapunow-Exponenten.

3.1 Zweikörperproblem. Aus der Lösung des Zweikörperproblems (bei mit dem Quadrat der Entfernung abnehmender Gravitationskraft zwischen den Körpern) ergeben sich die Keplerschen Gesetze des JOHANNES KEPLER (1571-1630). Wie erwartet, bewegt sich die Erde in meiner Simulation von Erde und Sonne auf einer Ellipse mit der Sonne im Brennpunkt. Da es sich



nicht um eine gedämpfte Schwingung (Punktattraktor), sondern um eine harmonische, zyklische Bewegung unter Einhaltung der

¹ Vgl. Wikipedia: „Sensitive Abhängigkeit“

² Vgl. Feldman: Chaos and Fractals, 2012, S.96

³ Vgl. Leven, Koch, Pompe: Chaos in Dissipativen Systemen, 1989, S.65-71

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Energieerhaltung handelt, folgt das System nach meinen Überlegungen einem Kreisattraktor.

$D_0(\mathbf{x})$	λ_{max}	$\sum_{i=1}^f \lambda_i$
1 AE	$3,12664 \cdot 10^{-6}$	$7,534 \cdot 10^{-6}$
10 AE	$3,02660 \cdot 10^{-6}$	$7,202 \cdot 10^{-6}$
100 AE	$3,02650 \cdot 10^{-6}$	$6,869 \cdot 10^{-6}$
1.000 AE	$3,02660 \cdot 10^{-6}$	$6,537 \cdot 10^{-6}$

Abb.2 | Kreisattraktor einer streng periodischen, ungedämpften Oszillation

Diese Systeme verhalten sich periodisch stabil, die Trajektorie ist unter Ausschluss numerischer Fehler geschlossen, dementsprechend prognostizierte ich Ljapunow-Exponenten ≤ 0 . Ich ermittelte mittels der Formel (2.1) den größten Ljapunow-Exponenten bei verschieden großer Änderung des x-Startwertes.

Unter der Annahme, dass sowohl der maximale Exponent als auch die Summe aller Exponenten mit Berücksichtigung numerischer Fehler als null zu interpretieren ist, bestätigt dies die Stabilität sowie die Energieerhaltung des Systems – dennoch stellte

mich diese ein Stück weit willkürliche Interpretation Tab.1 | Ljapunow-Analyse der Mondbahn in meiner Zweikörpersimulation

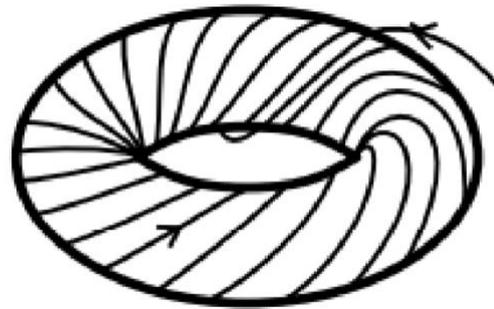
3.2 Dreikörperproblem. Ich fuhr fort mit einer Dreikörpersimulation: Durch die Erweiterung zum Dreikörperproblem wird das System nichtlinear, die Bewegungsgleichungen werden durch nicht algebraische Integrale analytisch unlösbar. Bildet man aus den Newtonschen Termen durch Addition der auf den Körper einwirkenden Gravitationskräfte die Superposition und klammert dann aus, lassen sich die neuen Geschwindigkeiten der drei Körper allerdings wie folgt in Abhängigkeit von der alten

Geschwindigkeit, der Gravitationskonstante sowie den Abständen und Massen der anderen beiden Körper numerisch berechnen.

$$\text{Erde: } vx_t = vx - \left[G \frac{x}{\Delta t} \left(\frac{m_\sigma}{r_\sigma^3} + \frac{m_\odot}{r_\odot^3} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$\text{Mars: } vx_t = vx - \left[G \frac{x}{\Delta t} \left(\frac{m_\oplus}{r_\oplus^3} + \frac{m_\odot}{r_\odot^3} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$



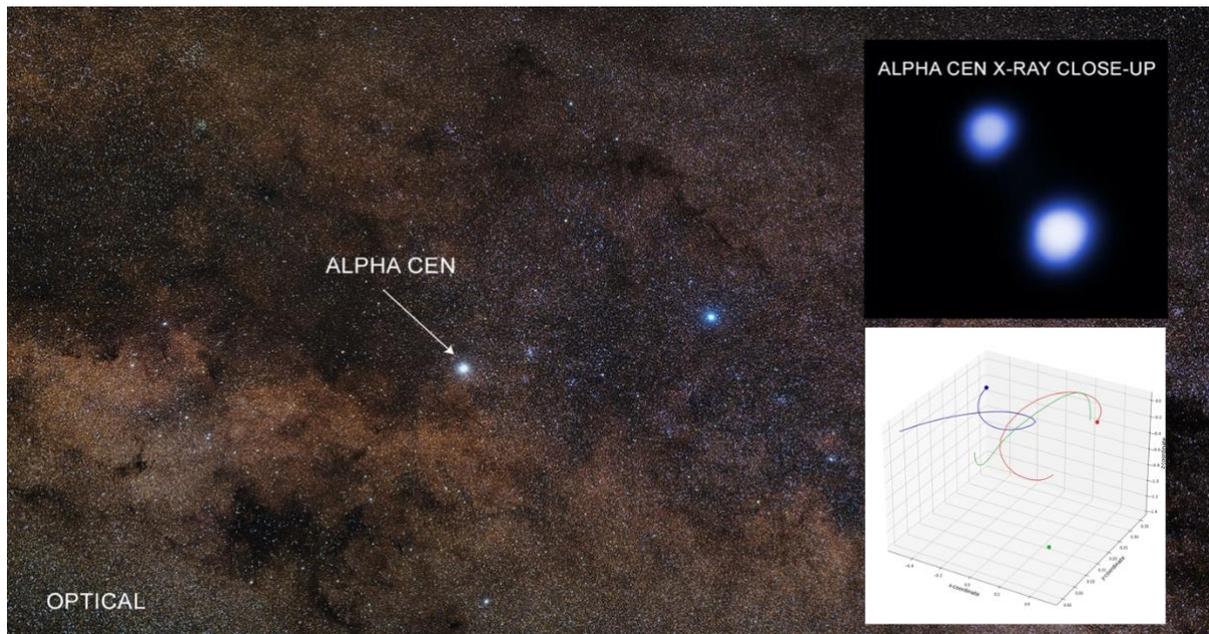
$$\text{Sonne: } vx_t = vx - \left[G \frac{x}{\Delta t} \left(\frac{m_\oplus}{r_\oplus^3} + \frac{m_\sigma}{r_\sigma^3} \right) \right]$$

Dieselbe Berechnung wird natürlich ebenso für die y-Komponente der Geschwindigkeit angewandt. Dem sogenannten KAM-Theorem zufolge wird auch schon der Torus-Attraktor eines Zweikörperproblems bei einer kleinen Störung instabil, sobald die Frequenzen der Oszillatoren ein rationales Verhältnis eingehen (in der Himmelsmechanik sind das Bahnresonanzen, bspw. 2:1, 3:2 oder 5:2), die Phasenbahnen den Torus also nicht quasiperiodisch umlaufen, sondern streng periodisch in sich zurücklaufen, denn unter diesem Umständen wachsen Störungen exponentiell.

Da mein Ziel nicht quantitative Aussagen über die Stabilität von Bahnen in Dreikörpersystemen, sondern der Test einer nichtlinearen Simulation war, ging ich in allen Simulationen von punktförmigen Massen aus und berücksichtigte keine Zweier- oder

Abb.3 | Geschlossene Trajektorie auf der Oberfläche eines 2-Torus als Attraktor

Dreikörper (da eine willkürliche Gravitationskraft in diesen Fällen unendlich groß würde). Um Simulation und Darstellung in mehreren Dimensionen zu testen, führte ich eine weitere Dreikörpersimulation in drei Dimensionen durch, berücksichtigte also auch eine Bewegung auf der z-



Achse. Dabei simulierte ich das Sternsystem Alpha Centauri, bestehend aus drei Sternen: Zwei sich eng umkreisenden sonnenähnlichen Sternen und einem weiter entfernten Zwergstern. Die Massen und Entfernungen der Sterne passte ich an die realen Gegebenheiten an. Eine sensitive Abhängigkeit ist durch Vergleich der Bewegungen zu erkennen, die simulierten Bahnen sind allerdings nicht geschlossen. Dies kann ich damit erklären, dass die relativen Positionen und Anfangsgeschwindigkeiten sowie Beschleunigungen in der Simulation nicht der Realität entsprechen und Rechnungen mit ausreichend kleinen Zeitschritten viel Zeit beanspruchen würden. Beide Probleme wären zwar theoretisch lösbar, übersteigen aber den

Rahmen meines Projekts. Daher versuchte ich auch bei Dreikörperproblemen Ljapunow-Exponenten zu berechnen, die Beträge der resultierenden Werte waren allerdings erneut zu klein um sinnvoll ausgewertet werden zu können. So kam es vor, dass ich – deduktiv vorgehend, bereits ein bestimmtes Ergebnis erwartend – Werte als null interpretieren musste, die einen größeren Betrag hatten als solche, die ich als negative oder positive Exponenten

ungleich null sehen musste. Auf diese Weise war kein Verlass auf meine Daten, denn die Interpretation war willkürlich.

3.3 Divergente Ljapunow-Exponenten. Ich suchte nach einer Erklärung für die geringen Beträge der Ljapunow-Exponenten. Dabei dachte ich auch an meine wissenschaftshistorischen Recherchen in der Phase der Ideenfindung: Chaosforschung galt vor der Entdeckung des Lorenz-Systems im Jahre 1963 oft eher als ein Problem der Informatik, nicht als ein physikalisches Forschungsfeld, denn so wie die Periheldrehung der Merkurbahn auch ohne das physikalisch neue Prinzip der Relativität mittels Rechenungenauigkeiten (Planet „Vulkan“) in der Newtonschen Mechanik erklärt werden kann, so können

Rundungsfehler auch in nicht sensitiven Systemen scheinbar chaotisches Verhalten erzeugen oder physikalische Phänomene imitieren. Ljapunow-Exponenten können in Simulationen deshalb divergieren, der Exponent λ der n -ten Dimension ergibt sich wie ich herausfand⁴ nämlich aus dem Volumen eines von Störungsvektoren aufgespannten Parallelepipeds

⁴Vgl. Leven, Koch, Pompe: Chaos in Dissipativen Systemen, 1989, S.64

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

$$\lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln Vol_n(t). \quad (3.4)$$

Da das Volumen des Parallelepipeds zum Zeitpunkt t folglich durch

$$\langle Vol_n(t) \rangle_t = Vol_n(0) \times e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \quad (3.5)$$

bestimmt ist, kann es in chaotischen Systemen (bei $\lambda_{max} > 0$) bei kleiner Anfangsstörung extrem verzerrt werden, sodass numerische Ermittlung versagt.

Um extrem lange Simulationszeiten aufgrund astronomischer Zeitspannen, auf denen sich das System

charakteristischerweise chaotisch verhält (die Abb.5 | Durch Störungsvektoren aufgespanntes Parallelepiped des Punktes $x(t)$ der Trajektorie), nun wieder das Chaospendel in den Fokus.

4.Simulation des Chaospendels. Um das Problem der großen Ljapunow-Zeit zu umgehen, begann ich mich dem Problem des Chaospendels anzunähern, indem ich zunächst ohne Berücksichtigung der mechanischen Kräfte gekoppelte Kreisbewegungen simulierte.

4.1 Gekoppelte Kreisbewegung. Dafür wandte ich auf einen Punkt $P(x|y)$ die Rotationsmatrix A an, um den um den Winkel α gedrehten neuen Punkt $P'(x'|y')$ zu erhalten.

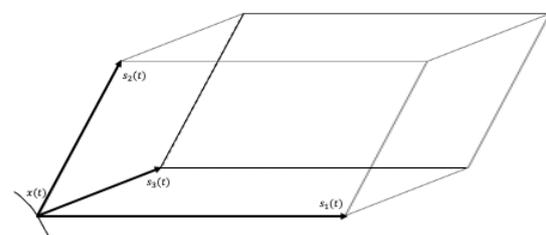
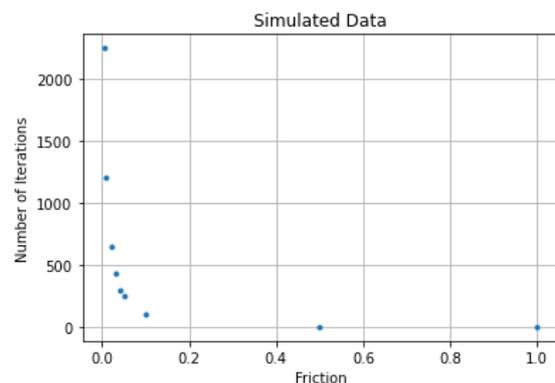
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Im nächsten Schritt verschob ich diese Kreisbewegung innerhalb des Koordinatensystems, indem ich eine durch eine Translationsmatrix eine Störung auf das System wirken ließ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Wie sich leicht erkennen lässt, bewirkt die 3x3-Translationsmatrix eine **Verschiebung** um a und b der ursprünglichen **Positionen** x und y . Diese zunächst statische Translation lässt sich auch pro

Zeitschritt in eine Schleife einbinden, sodass die Bewegung nicht nur einmalig im Koordinatensystem verschoben wird, sondern auch die Geschwindigkeiten sich ändern und Epizykel („Kringel“) entstehen. Ich wollte nun die Aufhängung des einen Pendels selbst in eine Rotationsbewegung versetzen, um zwei gekoppelte Oszillatoren und damit einen auf Störungen sensibel reagierenden Torus-Attraktor zu erhalten. Außerdem fügte ich einen linearen Reibungsfaktor μ hinzu, um zu überprüfen, ob der reibungsbedingte Übergang der Bewegung in eine einfache Kreisbewegung mit den zwischen 2016 und 2019 experimentell am Chaospendel gesammelten Daten zum Bruch der Ergodizität durch Reibung übereinstimmt.⁵



⁵ Untersuchung eines Chaospendels mithilfe des Ortsraums, Schüler experimentieren 2019

Die Reibung zeigt den erwarteten Effekt, die Anzahl der Iterationen, nach der die gekoppelten

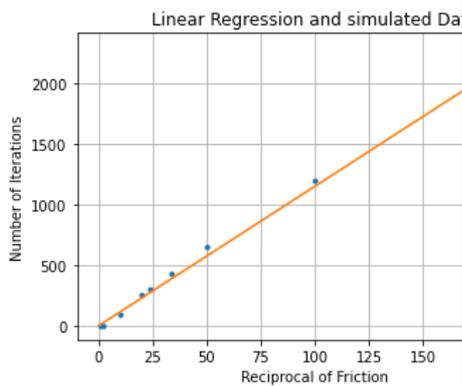
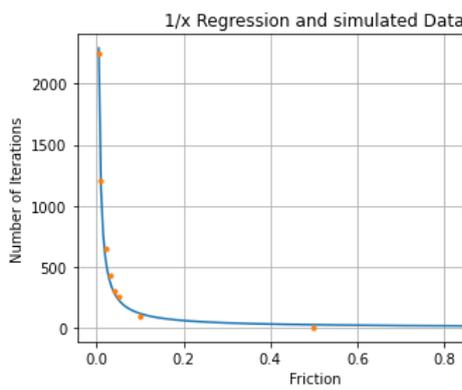
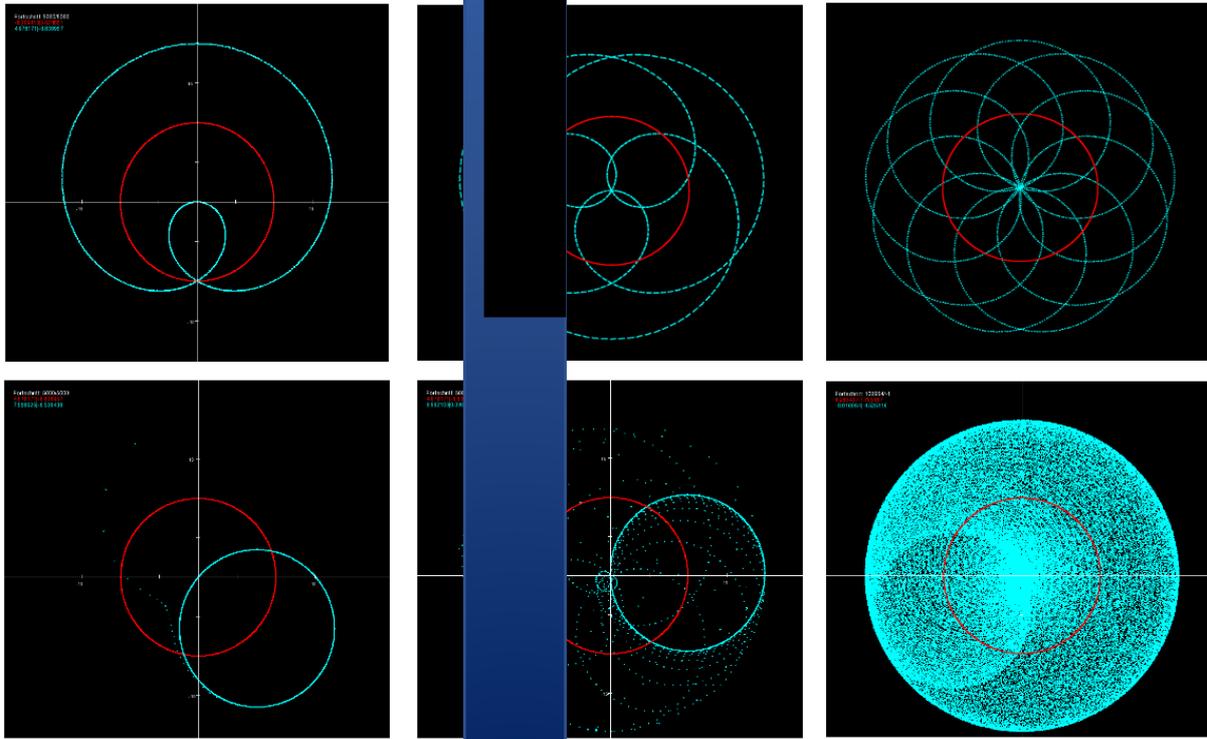


Abb.6 | Die Anzahl der bis zum Übergang in eine einfache Kreisbewegung benötigten Iterationen gegen den Reibungsfaktor aufgetragen, 1/x-Regressionshyperbel. Darunter linearisierten Daten mit Regressions

Kreisbewegungen in eine einfache Kreisbewegung übergegangen sind (s. Abb.7), ist umgekehrt proportional zum Reibungsfaktor. Dieses Ergebnis ist physikalisch sinnvoll, bei einer Reibung von null wird die bis zum Erreichen der Kreisbewegung benötigten Iterationen unendlich groß. Bei unkräftiger gekoppelter Kreisbewegungen bei $\frac{f_2}{f_1} = 1$ und ungedämpfte gekoppelte Kreisbewegungen bei $\mu = 0, 1; \mu = 1$. Das Bestimmtheitsmaß ist überraschend hoch, berücksichtigt man die Tatsache, dass ich das Erreichen der einfachen Kreisbewegung rein optisch „nach Eindruck“ beurteilte.

Allerdings zeigte sich unabhängig vom Verhältnis der Grundfrequenzen kein sensitives oder quasi-periodisches Verhalten, die Bahnen verliefen ohne Reibung streng periodisch in sich geschlossen. Dies lässt sich damit erklären, dass eine mögliche

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Rückkopplung durch die festen Grundfrequenzen unterbunden wird und die Berücksichtigung der wirkenden mechanischen Kräfte auftritt.

4.2 Lagrange-Formalismus. Ich begann das Problem physikalisch zu analysieren und stellte fest, dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade durch das Aufstellen von Zwangsbedingungen reduzieren lässt, denn das Pendel ist nur auf der zweidimensionalen Ebene beweglich (pendelt nicht vor und zurück) und zudem nur entlang der durch die Pendellänge als Radius festgelegten Kreisbahn. Daher konnte ich die im Phasenraum-Koordinaten x, y, z, p_x, p_y, p_z den kleineren Koordinatensatz $\phi_1, \dot{\phi}_1$ einsetzen. Dies sind generalisierte Koordinaten im Lagrange-Formalismus. Verwendung der Lagrange-Funktion L . Dabei handelt es sich um eine von JOSEPH-LAGRANGE (1736-1813) entwickelte Formulierung der Newtonschen Mechanik.

nach dem Hamiltonschen Prinzip der stationären (genauer: stationären) Wirkung. Mittels der Lagrange selbst von LEONHARD EULER (1707-1783) entwickelten Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich die Bewegungsgleichung des Pendels aufstellen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} = 0$$

In den meisten Fällen gilt dabei für die Lagrange-Funktion L :

$$L = T - V$$

Da ich im Alter von zehn Jahren mit meiner Physik begann, war es für mich entscheidend, mathematische Probleme möglichst zu vereinfachen, weshalb ich den Lagrange-Formalismus einsetzte. Für das Chaospendel ist der Term für die potentielle Energie

$$V = mgl(2 \cos \phi_1 + \cos \phi_2), \quad (4.5)$$

jener für die kinetische Energie⁶

$$T = ml^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_2^2 + ml^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (4.6)$$

Auf diese Weise lässt sich das Chaospendel mit Kräfte-Rückkopplung simulieren.

4.3 Poincaré-Schnitt. Da das Chaospendel jedoch selbst mit generalisierten Koordinaten im Zustandsraum vierdimensional ist, benötigt es den von HENRI POINCARÉ (1854-1912) entwickelten Poincaré-Schnitt. Dabei werden die Durchstoßpunkte der Trajektorie mit einer Hyperebene im Phasenraum aufgetragen, Parameter werden festgelegt. Die Verteilung der Schnittpunkte ermöglicht ebenso eine Analyse des Systems wie der Phasenraum selbst. Für chaotische Systeme ist neben einem positiven größten Ljapunow-Exponenten ein bei $t \rightarrow \infty$ innerhalb energetischer Grenzen vollständig mit Punkten gefüllter Poincaré-Schnitt charakteristisch.

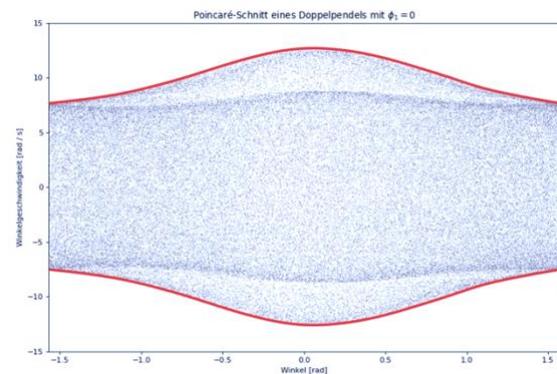


Abb.8 | Simulierte Poincaré-Abbildung mit ϕ_1 und ω_2 auf der Ebene $\phi_1 = 0$. Die rote Linie zeigt die energetische Limitierung.

Ich trug in Abb.8 alle Winkel und Winkelgeschwindigkeiten des zweiten Pendels, also ϕ_2 und ω_2 auf, wenn der Winkel des ersten Pendels $\phi_1 = 0$ ist. Da dies in einer numerischen Simulation kaum exakt der Fall ist, erlaubte ich einen Toleranzbereich, trug also alle Punkte unterhalb einer festen Differenz auf. Ein Kriterium für Chaos besteht in einem sich vollständig mit Punkten anfüllenden Poincaré-Schnitts, da dies einen

⁶ Vgl. Bohn: A Student's Guide to Analytical Mechanics, 2018, S.196-198

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

einfachen Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ausschließt. Da Chaos in sensitiven Systemen auftreten kann, beantwortet den ersten Teil der Forschungsfrage nicht das Auftreten sensitiver Abhängigkeit.

5. Ursache sensitiver Abhängigkeit

Überprüfung der anfangs geäußerten Vermutung, dass sensitive Abhängigkeit sei geometrisch. Die Konsequenz eines fraktalen Attraktors zu interpretieren, musste ich nun dessen Dimension berechnen. Es gibt verschiedene Dimensionsbegriffe, welche die topologische Dimension um die nicht-Ganzen Zahlen erweitern. In den meisten Fällen aber identisch sind, sind die Skalierungsdimension, die Clusterdimension, die Minkowski-Dimension, die Informationsdimension oder den Unsicherheitsexponenten.

5.1 Hausdorff-Dimension. Die Hausdorff-Dimension, eingeführt von FELIX HAUSDORFF (1886-1942), gibt anschaulich formuliert an, wie oft bzw. in sich verschachtelt ein Objekt ist. Für gewöhnliche geometrische Objekte entspricht die Hausdorff-Dimension der topologischen Dimension (Punkt: 0, Linie: 1, Fläche: 2, Figur: 3), doch für eine raumfüllende Kurve (ein Beispiel ist die Hilbert-Kurve) würde bspw. die topologische Dimension $D = 1$ zugewiesen, obwohl sie die Charakteristika einer Fläche aufweist. Die Hausdorff-Dimension ist größer als die topologische Dimension, aber kleiner als die euklidische Dimension, also die des Phasenraums. Sie ist unabhängig von der lokalen Metrik, also den Abstand zwischen Punkten, an, indem das Objekt gedanklich mit einer Kugel $N(r)$ von Kugeln mit dem Radius r bedeckt wird. Die Hausdorff-Dimension entspricht dann D , durch die $N(r)$ bei $r \rightarrow 0$ polynomiell wächst.

$$N(r) \sim \frac{1}{r^D}$$

Folglich ist

$$D = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)}$$

Dies ist eine vereinfachte Definition.

Da ich mich aber für den Zusammenhang zwischen einer dynamischen Eigenschaft der Trajektorie, nämlich den Ljapunow-Exponenten, und der statischen Eigenschaft des Attraktors, also der Hausdorff-Dimension, interessierte, wählte ich eine spezielle Methode nach JAMES A. YORKE (*1941) und JAMES L. KAPLAN zur Ermittlung der Hausdorff-Dimension des Attraktors. Die Kaplan-Yorke-Vermutung liefert eine ungefähre Abschätzung der Hausdorff-Dimension des Attraktors auf Basis der Ljapunow-Exponenten, bzw. legt sie dessen physikalische Obergrenze fest. Es gilt $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (5.3)$$

Der Parameter j ist definiert durch

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad (5.4)$$

und

$$\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \quad (5.5)$$

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Wie Formeln (5.4) und (5.5) festlegen, ist j das größte i für das die Summe aller Ljapunow-Exponenten positiv oder null bleibt, wobei die λ_i absteigender Größe geordnet sind.

Addiert man dann einen weiteren Ljapunow-Exponenten hinzu, also λ_{j+1} , wird die Gesamtsumme aller Ljapunow-Exponenten negativ.

5.2 Probleme des Chaospendels. Wie sich aus (5.3) entnehmen lässt, benötigt es für Bestimmung der Kaplan-Yorke-Dimension das Ljapunow-Spektrum, welches für höherdimensionale Systeme mit $D > 3$ schwierig zu ermitteln ist. Bei maximal 3 Dimensionen lässt sich der fehlende Ljapunow-Exponent aus der Differenz der Summe aller Ljapunow-Exponenten, die gemäß dem

Tab. 2 | Vergleich meiner Versuchsobjekte

Liouville nach JOSEPH LIOUVILLE (1838) berechnet werden kann, berechnen. Da das Chaospendel von vier Ljapunow-Exponenten charakterisiert wird und diese Methode daher nicht funktioniert, wechselte ich für die Beantwortung des

in diesem Fall $D = 3$ ist und ich bei meiner Recherche noch auf keinerlei Publikationen über das Ljapunow-Spektrum oder die Entwicklung der fraktalen Dimension des Attraktors bei verschiedenen Dämpfungen gestoßen bin.

6.1 Der Pohlsche Resonator. Das Pohlsche Rad ist ein meist aus Kupfer bestehender Drehschwinger, welcher durch einen Erreger mit einstellbarer Frequenz um eine Drehfeder rotiert und durch eine Wirbelstrombremse gedämpft wird. Installiert man eine Masse rechts oder links des Zeigers, so schwingt das Rad nun periodisch um einen Punkt rechts oder links des Lots, gleichzeitig muss auf den Term des rücktreibenden Drehmoments $M_R = D \cdot \varphi$ nun noch $m \cdot g \cdot r_0 \cdot \sin(\varphi)$ addiert werden,

Chaospendels und des Pohlschen Rads

	Chaospendel	Pohlsches Rad
SDIC?	ja	ja
Anzahl Ljapunow-Exponenten (gleichzeitig Phasenraum-Dim.)	4	3 (einer davon null)
Variable	Ausschlagswinkel	Dämpfung der Wirbelstromachse
Stabile Ruhelagen	1	2

Teils meiner Fragestellung das Forschungs-

6. Messungen mit dem Pohlschen Rad

Meine Wahl fiel auf das Pohlsche Rad, benannt nach ROBERT WICHARD POHL (1884-

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

wodurch das System nichtlinear wird, zwei stabile Ruhelagen erhält und sich chaotisch verhalten kann.

6.2 Experimentelles Setup. Ich nutzte einen Pohlschen Resonator aus der Physiksammlung meiner Schule und montierte asymmetrisch eine kleine Unwucht, damit das Systemverhalten nichtlinear wird. Anschließend variierte ich in



- Ⓐ Farbpunkt
- Ⓑ Erreger mit Spiralfeder
- Ⓒ Wirbelstrombremse
- Ⓓ Netzteil der Wirbelstrombremse (DC 0~30 V / 0~5 A)
- Ⓔ Videokamera
- Ⓕ Antrieb
- Ⓖ Netzteil des Schrittmotors (DC 1~32 V / 0~20 A)

Abb.9 | Mein Versuchsaufbau für Messungen mit dem Pohlschen Resonator

Dämpfung. Dabei zeichnete ich die Bewegung des Drehpendels mit einer Videokamera auf und wertete die Videos mittels der Software *Measure Dynamics* aus. Um auch den Einschwingvorgang zu erfassen, startete jede Aufnahme in der Ruhelage. Um die Einstellungen des zu didaktischen Zwecken genutzten Pohlschen Rads in abgeleitete SI-Einheiten zu transferieren, lässt sich die magnetische Flussdichte B der Spule mittels einer Hall-Sonde in Abhängigkeit von der am Netzteil eingestellten Spannung U messen. Da die Dämpfung durch die veränderliche Drehgeschwindigkeit des kupfernen Drehpendels keine konstante Größe ist, sich aber proportional zur maximalen Dämpfung bei der größten Geschwindigkeit des Pendels verändert, konnte ich für die Auswertung stets die maximale Dämpfung einer Einstellung notieren. Es zeigte sich mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,9998$ ein proportionales Verhältnis zwischen Spannung und

magnetischer Flussdichte. Aus letzterer sowie der Momentangeschwindigkeit \vec{v} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} lässt sich die auf die kupferne

Scheibe wirkende Lorentzkraft berechnen.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.1)$$

Die max. Geschwindigkeit des Pendels kann durch

$$v = \omega \cdot r \quad (6.2)$$

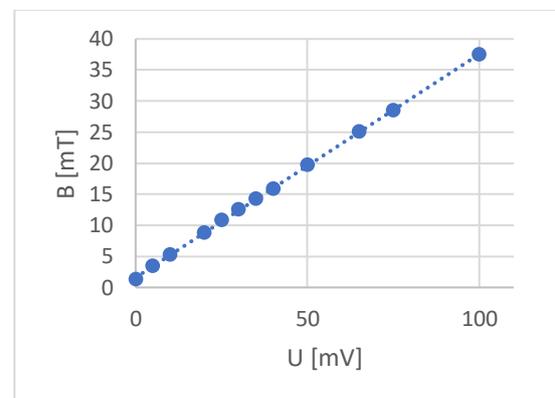


Abb.10 | Annähernd lineare ($R^2 = 0,9998$) Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte der Wirbelstrombremse von der am Netzteil der Spule eingestellten Spannung

6.3 Schwingungsdiagramme. Amplitude und Periodendauer lassen sich in Schwingungsdiagrammen

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

(s. Abb. 11-14) ablesen, dadurch lässt sich erahnen, ob eine Schwingung harmonisch oder chaotisch ist

oder ob eine Schwebung durch mehrere sich überlagernde Frequenzen vorliegt.

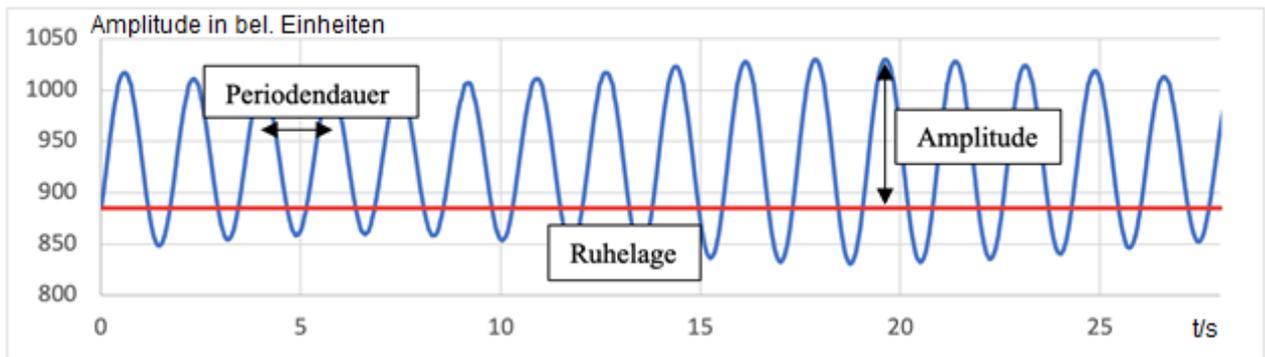


Abb.11 | Schwingungsdiagramm des Pohlschen Resonators bei $f_{Erreger} = 0,48 \text{ Hz}$ und $I = 0,005 \text{ A}$

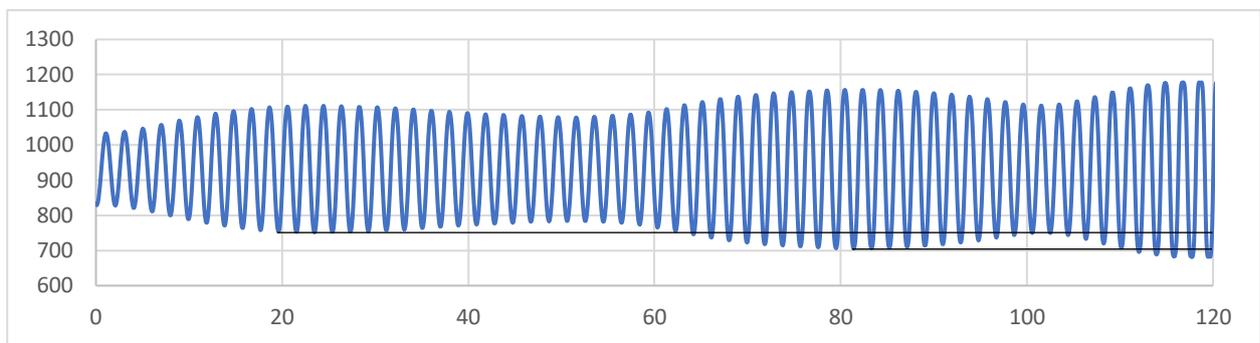


Abb.12 | Schwingungsdiagramm des Pohlschen Resonators bei $f_{Erreger} = 0,48 \text{ Hz}$ und $I = 0,113 \text{ A}$

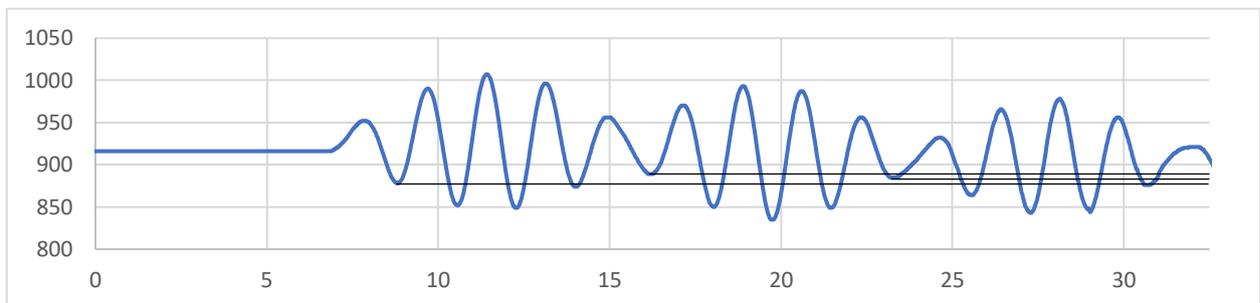


Abb.13 | Schwingungsdiagramm des Pohlschen Resonators bei $f_{Erreger} = 0,48 \text{ Hz}$ und $I = 0,028 \text{ A}$

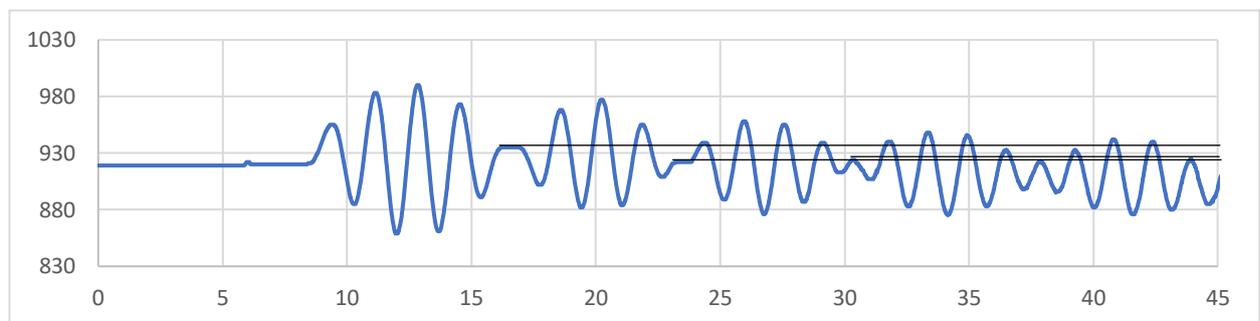


Abb.14 | Schwingungsdiagramm des Pohlschen Resonators $f_{Erreger} = 0,48 \text{ Hz}$ und $I = 0,113 \text{ A}$

Indem ich parallele Linien in die Perioden der Schwingungsdiagramme einzeichnete, konnte ich die verschiedenen Perioden grob auseinanderhalten.

Um Periodenverdopplung schneller für größere Datenmengen erkennen zu können und auch eng beieinanderliegende Frequenzen zu trennen, also leichte

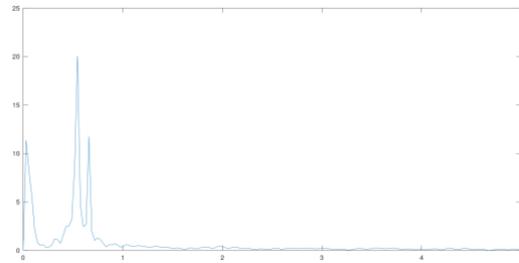
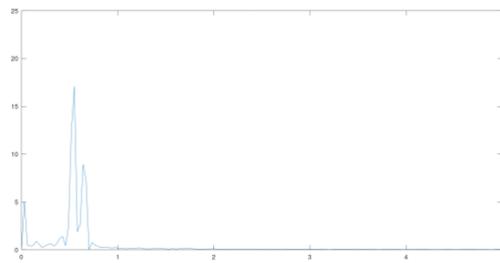
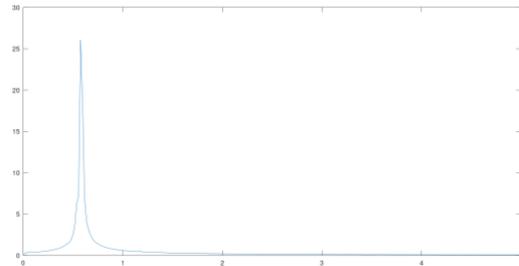
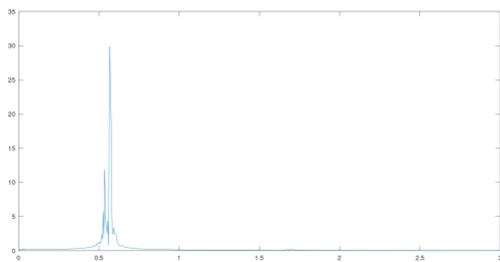
Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Schwebungen von harmonischen Schwingungen unterscheiden, analysierte ich die Datensätze im Anschluss an die Betrachtung der Diagramme noch auf

eine weitere Weise: Die Fourier-Transformation.

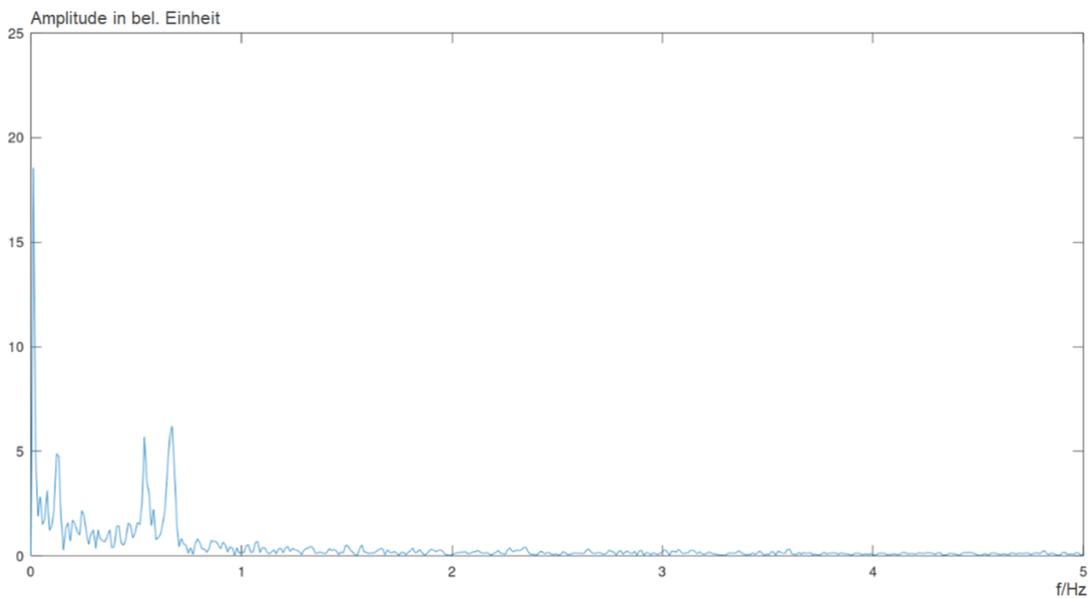
6.4 Fourieranalyse. Die Schnelle Fourier-Transformation (FFT) nach JOSEPH FOURIER

legt also dessen Frequenzspektrum offen und ermöglicht somit das Erkennen sich überlagernder Perioden, die einer der Wege ins Chaos sind. MATLAB führte ich mit meinen Daten eine Fourieranalyse durch. Dabei beachtete ich das



(1768-1830)

Sampling-Theorem und erhielt folgende

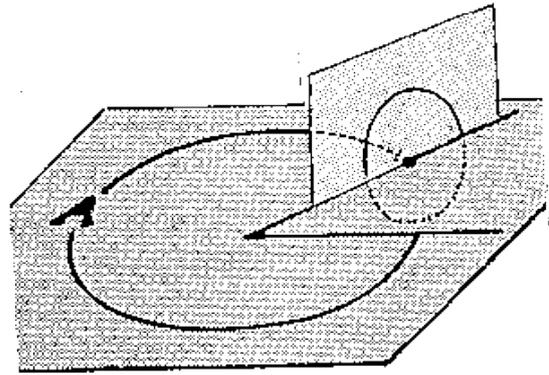


transferiert eine Schwingung in einen Frequenzraum

Frequenzspektren.

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

6.5 Zersplitterung des Tours-Attraktors. Über diese Ergebnisse nachdenkend, kam ich auf folgenden Gedankengang: Bei einer Schwebung durch Überlagerung mehrerer Perioden, was nur durch eine zusätzliche Systemvariable möglich ist, wird der Kreisattraktor (Abb.2) einer harmonischen Schwingung zu einem Torus. In weiteren Bifurkationsschritten „zersplittert“ dieser Torus zu einem seltsamen Attraktor mit fraktaler Dimension und verursacht eine chaotische Bewegung der Trajektorie. Dieser „Weg ins Chaos“ über den in immer engeren Schritten erfolgenden Zerfall von Perioden bei Variierung eines Bifurkationsparameters μ ist das, was ich in den Schwingungsdiagrammen und Frequenzspektren zu



Dimension des Phasenraums sein. Dieses Konzept lässt sich durch Ermittlung der fraktalen Dimension des Attraktors überprüfen. Da der Attraktor eines

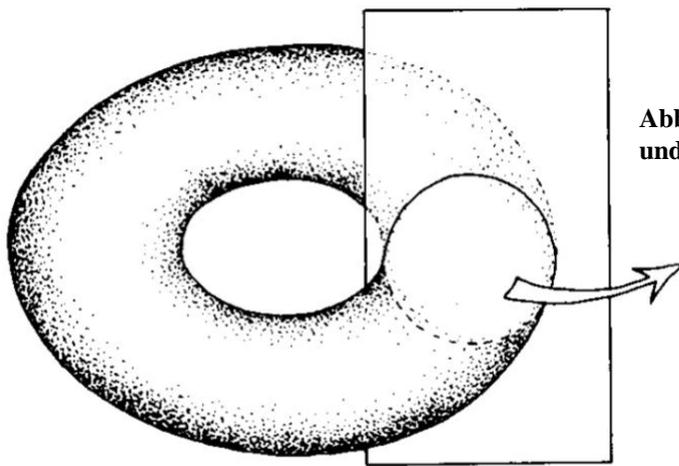
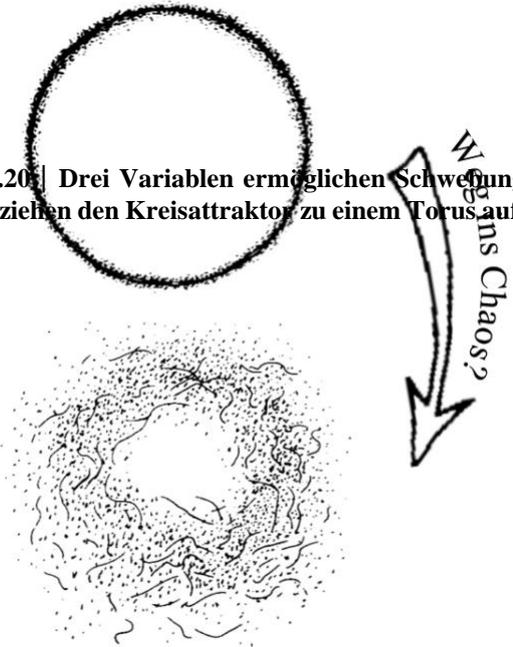


Abb.20 | Drei Variablen ermöglichen Schwebung und ziehen den Kreisattraktor zu einem Torus auf.



erkennen glaubte.

Sowie der eindimensionale Grenzyklus den nulldimensionalen Punktattraktor und die zweidimensionale Torusoberfläche den Grenzyklus steigert, so entspräche ein seltsamer Attraktor einer Steigerung der Dimensionalität des Torus bei nicht-chaotischen Werten des Bifurkationsparameters: Seine Dimension müsste somit stets kleiner als die einbettende

Systems dessen Verhalten bei $t \rightarrow \infty$ beschreibt, ist es erheblich einfacher ihn durch Simulationen zu

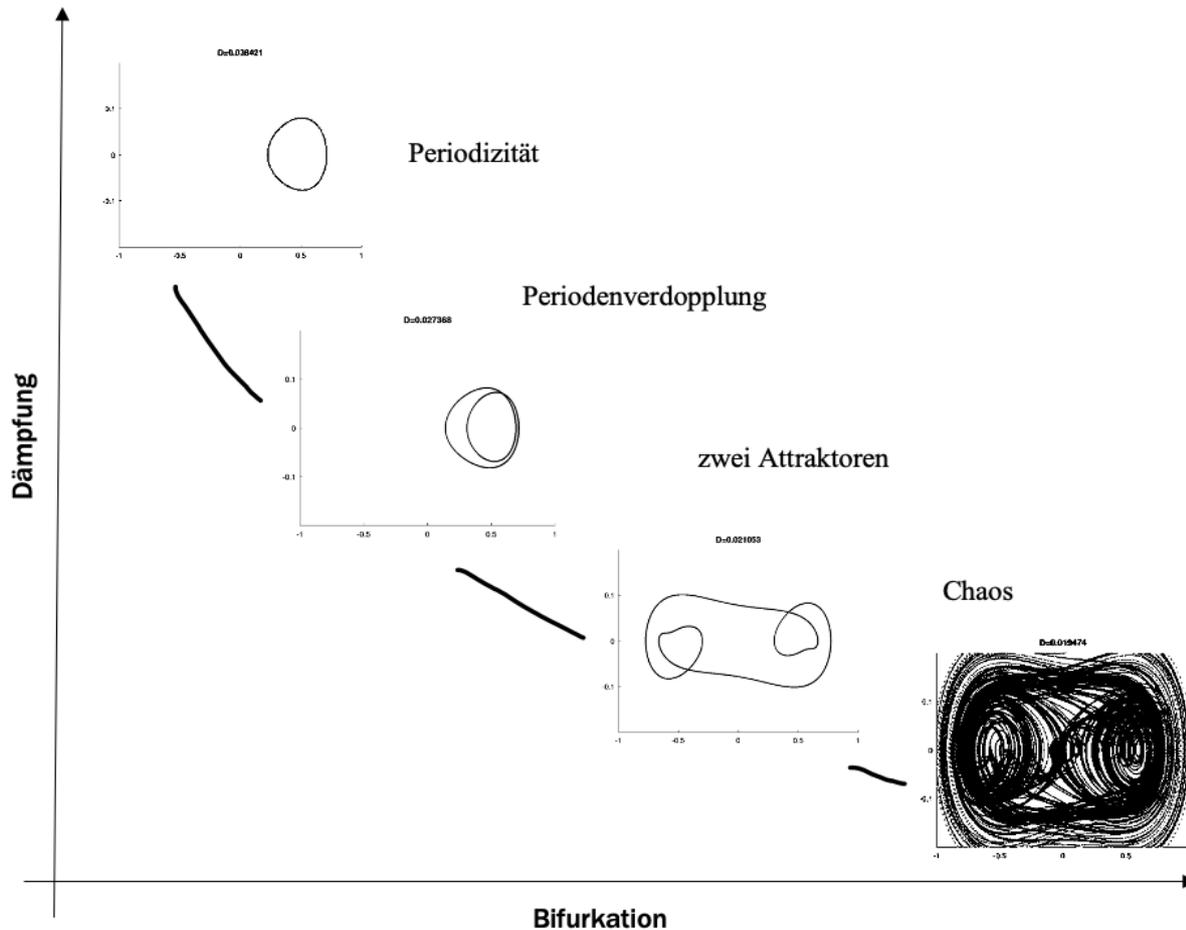
ermitteln, bzw. dessen fraktale Dimension zu beweisen, als durch Messreihen. Daher wechselte ich von Messungen mit meinem Pohlschen Resonator zu einer Simulation.

7. Simulation des Pohlschen Resonators. Das Pohlsche Rad ist im Zustandsraum dreidimensional

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

(Auslenkung des Pendels, Winkelgeschwindigkeit des Pendels, Phasenwinkel des Oszillators), durch das „Festhalten“ einer Variablen, also die Wahl einer Phasenraum-Ebene und Betrachtung der Durchstoßpunkte kann der Zustandsraum aber zu einer Zustandsebene vereinfacht werden. Da einer der drei Ljapunow-Exponenten des Pohlschen Rads immer null ist, muss ich nur zwei der von null

Ljapunow-Exponenten und Zustandsebenen relevante Schlussfolgerungen ab. Die Simulation arbeitet mit dem Runge-Kutta-Verfahren ODE45, durch die veränderliche Punktdichte entstände bei der Darstellung des Attraktors ansonsten ein zweiter nur in der Simulation existenter Parameter ohne physikalische Entsprechung. Durch äquidistante Interpolation kann diese Variable eliminiert werden.



verschiedenen Ljapunow-Exponenten ermitteln, **Abb.22** der Weg ins Chaos“ des Pohlschen Rads: Eine Periode zerfällt bis die einzelnen Schwingungen nicht mehr zu trennen sind und das Verhalten unvorhersehbar wird.

7.1 Weg ins Chaos. Beim Erstellen der Phasenraum-Attraktoren des Pohlschen Rads konnte ich mehrere Parameter variieren: Die statische Verdrehung des Pen-

kleinere der beiden direkt über den Satz von Liouville ermittelt werden kann. Ich arbeitete mit einer vorgefertigten MATLAB-Simulation des Pohlschen Resonators (siehe „Unterstützungsleistungen“), aus dessen Output ich die fraktale Dimension des Attraktors berechnete. Dafür führte ich systematisch bisher über 50 Simulationen mit verschiedenen Anfangsbedingungen durch, und leitete aus den

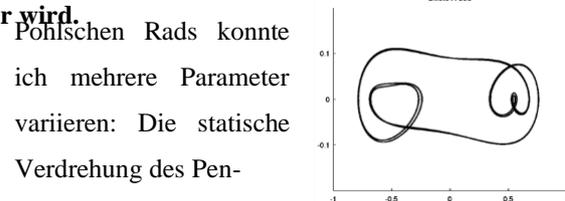


Abb.23-26 | Bifurkationsschritte auf dem Weg ins Chaos: Ab dem dritten Bifurkationsschritt wird das Systemverhalten unvorhersehbar.

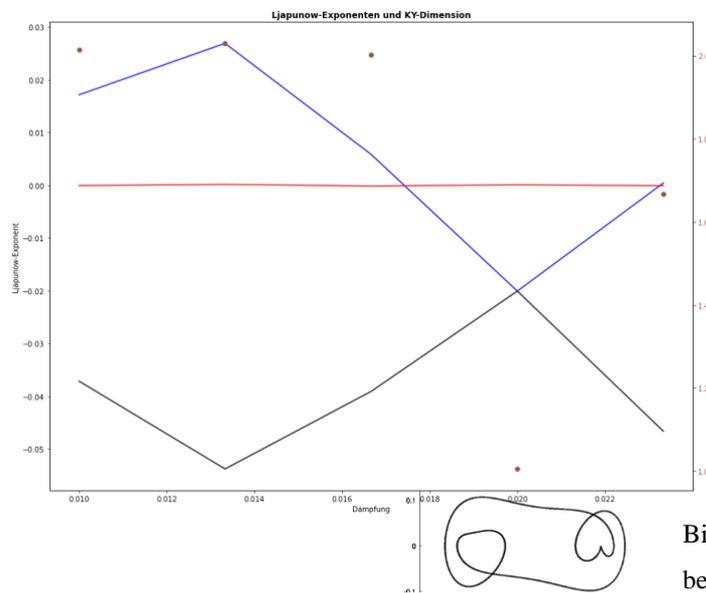
dels als Äquivalent zur asymmetrisch befestigten Masse und die Dämpfung als Äquivalent zur eingestellten Spannung der Wirbelstrombremse. Beide Parameter sind relevant für die Entwicklung chaotischen Verhaltens, denn mit Veränderung der Dämpfung verschiebt sich die Resonanzfrequenz des Pendels. Die Erregerfrequenz beließ ich innerhalb einer Reihe gleich, um den isolierten Einfluss der Dämpfung zu betrachten. Dabei muss außerdem die Einschwingzeit berücksichtigt werden, also die Zeitspanne bis zur Übereinstimmung der Frequenzen von Schwinger und Erreger (Resonanz), bzw. bis zum Erreichen des Attraktors. Nach Ende der Einschwingzeit tritt eine periodische Schwingung mit konstanter Schwingungsfrequenz und Amplitude ein. Bei geringerer Dämpfung tritt die Bifurkation ein, der Schwinger wechselt nun zwischen zwei Amplituden und das System unterliegt zwei Attraktoren. Dadurch liegt keine Resonanz mehr vor, denn die

Abb.27 | Verlauf der drei Ljapunow-Exponenten (Primären berechneten Kaplan-Yorke-Dimension des Attraktors

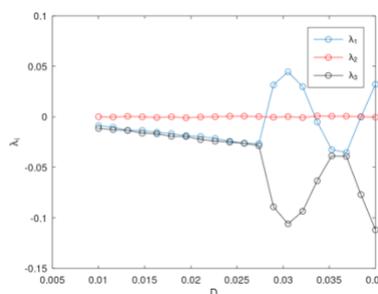
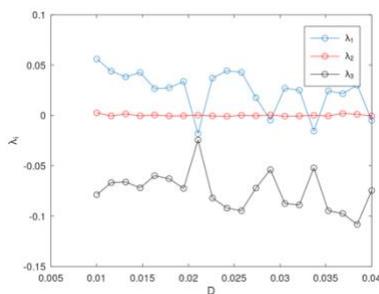
Amplitude beeinflusst die Frequenz des Pendels, die somit nicht mehr mit der des Erregers übereinstimmt. Da die Bifurkationen immer enger aufeinander folgen, lassen sie sich kaum noch trennen, sodass das System sich deterministisch chaotisch verhält. Auch die Simulation zeigte diesen Weg ins Chaos. Nun begann ich mit der Berechnung der Dimension, um ein Zusammenhang chaotischem Verhalten zu hinterfragen.

7.2 Ljapunow-Spektrum. Als ich dafür die Ljapunow-Spektren auftrug, sah ich zunächst kaum einen Zusammenhang. Die von null verschiedenen Ljapunow-Exponenten wachsen oder fallen nicht streng monoton bei Veränderung der Dämpfung, viel mehr fluktuieren sie. Dies bestätigt die „Fenster im Chaos“, die auch bei Bifurkationsdiagrammen des

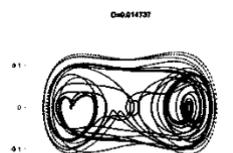
Pohlschen Rads mit der Dämpfung als



Bifurkationsparameter zu beobachten sind, denn nur bei den Dämpfungen, die



einen



Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

max. Ljapunow-Exponenten >0 zeigen, kann chaotisches Verhalten auftreten.

Zähler des Bruchs stellt die divergierende Phasenraum-Komponente an und gibt an wie **chaotisch** der Attraktor ist, der Nenner drückt die Dissipation aus und gibt somit an wie **attraktiv** er ist - ohne diese Komponente existiert kein Attraktor. Das j ist der „ganze“ Anteil der Dimension, es ist ein Relikt des Torus-Attraktors, dem der seltsame Attraktor durch Bifurkation entsprang (s. Abb.21). Im Gegensatz zu den in Fachliteratur gefundenen Angaben, war nicht immer einer der Exponenten exakt null, seine Größenordnung lag aber meist bei $\pm 10^{-4}$ oder geringer. Damit liegt sein Betrag um mindestens zwei Größenordnungen unter den für die anderen Exponenten resultierenden Werten, wodurch deren Berechnung über den Satz von Liouville (s. Abs.5.2) nicht unbrauchbar wird. Dies lässt sich dadurch erklären, dass auch numerische Fehler in einem chaotischen System exponentiell wachsen, womit sich der Kreis schließt und ich wieder bei den Hintergrundrecherchen zur Geschichte der Chaostheorie angelange.

8.Fraktale Dimension. Aus diesen Ljapunow-Spektren war es mir gelungen die fraktale Dimension zu berechnen (s. Abb.27).

8.1 Beispielrechnung. Nun stelle ich den Prozess beispielhaft an einem chaotischen Parametersatz dar. Für die Einstellungen $f = 0,01$, $p = 1,05$ und $D = 0,01$ erhalte ich ein Ljapunow-Spektrum von $\lambda = \{0,017; 0,00; -0,037\}$. Es gilt $j = 2$, da

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 0,017 + 0,00 = 0,017 \geq 0$$

und (7.1)

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0,017 + 0,00 - 0,037 = -0,02 < 0 \quad (7.2)$$

Folglich konnte ich berechnen

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} = 2 + \frac{0,017 + 0,00}{|-0,037|} = 2,46 \quad (7.3)$$

Damit ist eine fraktale Kaplan-Yorke-Dimension bei chaotischen Parameterwerten bestätigt. Ich führte diese Rechnung für mehrere Einstellungen durch.

8.2 Diskussion. Der Attraktor weist somit Elemente einer Fläche und eines Volumens auf, die topologische Dimension beträgt 2, die einbettende Dimension 3. Im Zusammenhang meines Konzepts lässt sich die Formel wie folgt interpretieren: Der

9.Fazit. Die erste Frage, der Nachweis sensitiver Abhängigkeit konnte gelöst werden...

- **theoretisch** durch Analyse der Rückkopplungen in den Bewegungsgleichungen,
- **experimentell** durch Messreihen und deren Auswertung mittels Fourieranalysen, Phasen- und Schwingungsdiagrammen,

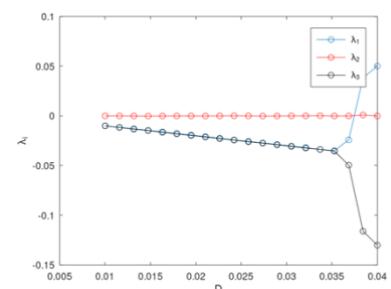


Abb. 31 | Zusammenfassung der Ergebnisse

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

- o **numerisch** durch Computersimulationen und deren Auswertung durch Ljapunow-Spektren und Poincaré-Abbildungen.

Die Frage nach dem zugrundeliegenden Mechanismus betreffend, konnte ich herausfinden, dass der Torus-Attraktor zu einem seltsamen Attraktor mit $D_{KY} \notin \mathbb{Z}$ zerfällt. Numerische Fehler beeinträchtigen die Aussagekraft der Kaplan-Yorke-Dimension, sodass sie bei ausschließlich negativen Exponenten nicht definiert ist und die klassische Boxcounting-Methode anzuwenden ist.

9.1 Ausblick. Diese Erkenntnisse nutze ich, um mich im weiteren Verlauf mit der Frage zu beschäftigen ob die „Kästchen“ der Hausdorff-Dimension eine reale physikalische Entsprechung haben und Fraktale auf diese Weise in der Lage sind (Quanten)-Unschärfeneffekte zu erzeugen oder die Energieerhaltung zu brechen (Teil 3 der Forschungsfrage).

10. Anhang

10.1 Literaturverzeichnis

Bohn (2018): *A Student's Guide to Analytical Mechanics*

Strogatz (1994): *Nonlinear Dynamics and Chaos*

Argyris et al. (1994): *Die Erforschung des Chaos*

Alligood, Sauer, Yorke (1996): *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*

Briggs, Peat (1993): *Die Entdeckung des Chaos – eine Reise durch die Chaos-Theorie*

Feldman (2012): *Chaos and Fractals: An Elementary Introduction*

Falconer (2014): *Fractal Geometry*

Peitgen (1989): *Chaos und Fraktale*

Leven, Koch, Pompe (1989): *Chaos in dissipativen Systemen*

Stoop, Steeb (2006): *Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen*

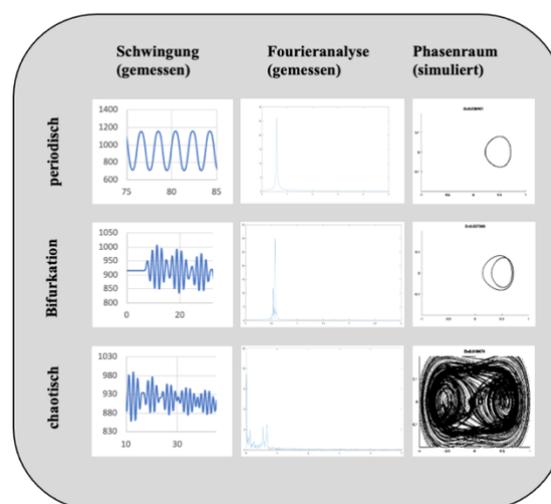
Schuster (1995): *Deterministic Chaos – an Introduction*

Reitmann (1996): *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Reguläre und chaotische Dynamik*

Sugihara, Hastings (1996): *Fraktale: Ein Leitfaden für Anwender*

Smith (2010): *Chaos (Reclam Sachbuch)*

Nayfeh, Balachandran: *Applied nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*, University of Maryland, Virginia Polytechnic Institute and State University



Hattori, Ishimura, Ohnishi, Umeki (1992): *Dimension Estimate of the Global Attractor for Forced Oscillation Systems*

10.2 Bildquellen

Abb.2:

<https://itp.tugraz.at/LV/arrigoni/projektpraktikum/paust/f.pdf> (Ausschnitt)

Abb.3:

<https://itp.tugraz.at/LV/arrigoni/projektpraktikum/paust/f.pdf> (Ausschnitt)

Abb.4:

https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/images/alpha-centauri-a-triple-star-system-about-4-light-years-from-earth.html

Fraktale Dimension chaotischer Attraktoren

Abb.19/20:

https://science.kairo.at/physics/fba_mandelbrot/kap3.html (Ausschnitte neu zusammengesetzt und bearbeitet)

Titelbild:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/9e/Julia-Menge_-0.4%2B0.6i.png/1280px-Julia-Menge_-0.4%2B0.6i.png

Alle weiteren Abbildungen habe ich selbst erstellt.

10.3 Unterstützungsleistungen.

Bei meiner Forschung unterstützt haben mich

KP Haupt als Projektberater,

Till MacCormac als Projektberater und durch seine Unterstützung beim Codieren,

Prof. Hartmut Hetzler durch die Bereitstellung von Literatur und des Simulationsprogramms des Pohlschen Resonators

und Ilian Eilmes durch eine Einführung in MATLAB,

die für das Zustandekommen dieser Arbeit eine gewisse Menge Chaos auf sich nahmen. Ihnen sei gedankt.