Matematik A, STX

14-08-2013

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Parameterfremstillingen benævnes med l. Parameterfremstillingen har retningsvektoren $\vec{r} = \langle 2,1 \rangle$. Anvendes linjens ligning for m, har man

$$2(x-3)+1(y-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$2x-6+y-4=0 \Leftrightarrow$$
$$2x+y-10=0$$

Som så står vinkelret på l.

Opgave 2:

a) Først opstilles funktionen $h(x)$.

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3^x}{2^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Dermed er fremskrivningsfaktoren for $h(x)$ bestemt til at være $3/2$.

Opgave 3:

a) Arealet bestemmes vha. et integral, så der gælder

$$M=\int_0^1 (\mathrm{e}^x+2)\,dx=[\mathrm{e}^x+2x]_0^1=\mathrm{e}^1+2\cdot 1-(\mathrm{e}^0+2\cdot 0)=\mathrm{e}+1$$

Så arealet af M er $\mathrm{e}+1$.

Opgave 4:

a) Den ubekendte r isoleres i ligningen

$$\frac{32}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow 32\pi=4\pi r^3 \Leftrightarrow 8=r^3 \Leftrightarrow r=2$$

Så radius i kuglen er 2, når rumfanget er $32\pi/3$.

Opgave 5:

a) Monotoniforholdene bestemmes for $f(x)$. Funktionen differentieres og sættes lig 0.

$$f'(x)=3x^2-3x-6$$

Ligningen $f'(x)=0$ løses.

$$3x^2-3x-6=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0$$

Så her er rødderne $x=-1 \lor x=2$. Der laves fortegnsvariation, så man vælger tre talværdier, der er forskelligt fra nulpunkterne. Der vælges -2, 0 og 3.

Så ved fortegnsvariation er

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 6 = 12$$
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 6 = -6$$
$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 6 = 12$$

Så kan man lave et monotoniskema. Der er et ”Plus-Minus-Plus” tilfælde.

x		-1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Dermed kan man slutte, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; -1]$ og $[2; \infty[$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-1; 2]$

En anden vej vil være at finde den anden afledede.

$$f''(x) = 6x - 3$$

Indsæt rødderne fra $f'(x) = 0$, så har man

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 3 = -9$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 3 = 9$$

Da $f''(-1) < 0$ er der lokalt maksimum og da $f''(2) > 0$ er der lokalt minimum. Man kan da slutte, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; -1]$ og $[2; \infty[$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-1; 2]$

Opgave 6:

a) Man kender $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 4$, så kan man finde $f'(x_0)$ ved at indsætte $P(1; 4)$ i differentialligningen.

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$$

Så tangenten i punktet $P(1; 4)$ er

$$y = 17(x - 1) + 4$$
$$= 17x - 13$$

Som er den ønskede tangentligning.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tallene indlæses i Maple og der udføres eksponentiel regression.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0, 5, 8, 9, 10] :
E2 := [4963, 8249, 10296, 12459, 13661] :
f(t) := ExpReg(E1, E2, t) :
evalf[7](f(t))
                4946.448 1.104739^t                    (1)
```

Af ovenstående kan man slutte, at tallene a og b er:

$$a = 1.104739$$
$$b = 4946.448$$

b) Man anvender fordoblingskonstanten.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.104739)} = 6.9585$$

Dvs. i slutningen af år 2006 vil reklametimerne på de danske tv-kanaler være fordoblet. Så ca. hvert 6.96 år fordobles timerne.

c) Man beregner den afledede funktion.

$$f'(t) = 4946.448 \cdot 1.104739^t \cdot \ln(1.104739)$$

Så indsættes $t = 6$ og man får

$$f'(6) = 4946.448 \cdot 1.104739^6 \cdot \ln(1.104739) = 895.678$$

Dvs. efter 6 år øges antal reklametimerne på de danske tv-kanaler hvert år med 895.678timer pr år.

Opgave 8:

a) Vinklen mellem to vektorer bestemmes.

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Så man indsætter blot sine vektorer.

$$v = \arccos\left(\frac{-3 \cdot 1 + 7 \cdot (-4)}{\sqrt{(-3)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2}}\right) = 170.838^o$$

b) Man har længden af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fra ovenstående formel, og så anvender man blot ½-appelsinformlen. Så arealet af trekanten der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2} \cdot \sin(170.838) = 2.5$$

Så arealet af trekanten er 2.5. (Man kan også bruge determinanten).

Opgave 9: [Via Maple]

a) Man indsætter $t = 0$ i modellen.

$$w(0) = \frac{519.9}{1 + 0.098e^{-0.434\cdot 0}} = 473.5$$

Så i år 1994 producerede en EU-borger ca. 473.5kg affaldsproduktion.

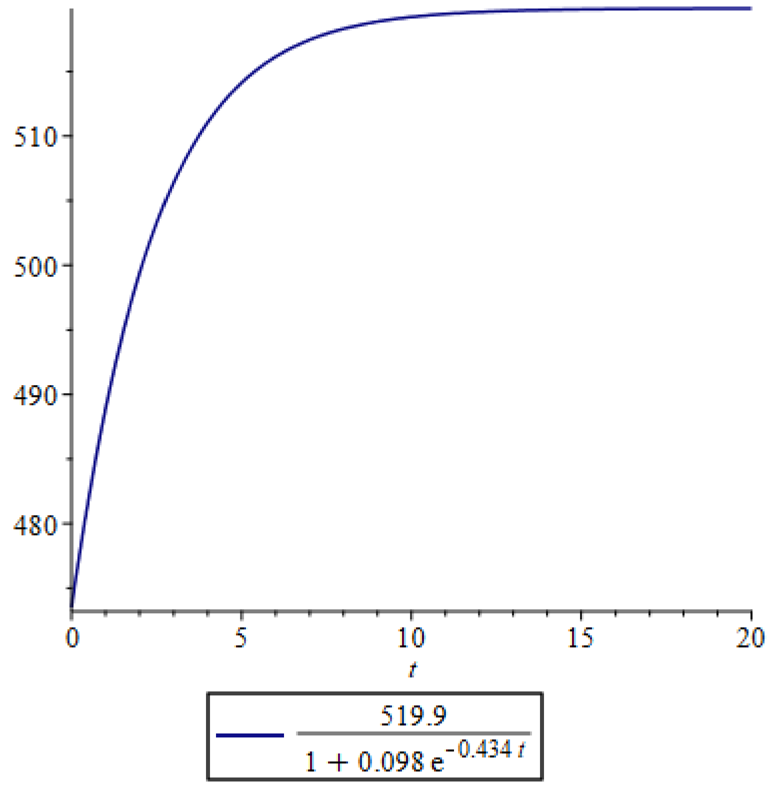
b) I Maple tegnes grafen.

restart

with(*Gym*) :

$w(t) := \dfrac{519.9}{1 + 0.098 \cdot \exp(-0.434 \cdot t)}$:

plot($w(t)$, $t = 0\,..20$, *legend* = $w(t)$, *color* = "Navy")



Påstanden holder, da grafen stabiliserer sig omkring de 519.9 idet $w(t)$ er asymptote med $y = 519.9$, så når $t \to \infty$ så går $w(t) \to 519.9$.

Opgave 10: [Via Maple]

a) I Maple defineres punkterne og to vektorer opstilles, sådan så der kan laves krydsprodukt mellem de to pågældende vektorer.

```
restart
with(Gym) :
local D
A := [3, 0, 0] :; B := [3, 3, 0] :; C := [0, 3, 0] :; D := [0, 0, 3] :
```
$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$:
$\overrightarrow{AD} := \langle D - A \rangle$:
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Dermed er normalvektoren til planen α fundet. Ligningen for planen er

$$9(x-3)+0(y-0)+9(z-0)=0 \Leftrightarrow 9x-27+9z=0$$

b) Vinklen mellem to planer findes ved at bruge formlen fra opgave 7b. Så anvendes normalvektorerne til at finde den vinkel mellem planerne.

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \langle 9,0,9 \rangle$$
$$\overrightarrow{n_\beta} = \langle 0,1,1 \rangle$$

Så man har

$$v = \arccos\left(\frac{9\cdot 0 + 0\cdot 1 + 9\cdot 1}{\sqrt{9^2+0^2+9^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}}\right) = 60^o$$

Sådan fandt man vinklen, som heldigvis er spids.

Opgave 11: [Via Maple]

a) Nulhypotesen:

H: Efterlønsalder er uafhængig af personens sammenbo med en partner.

De forventede værdier udregnes vha. formlen

$$forventet = \frac{(vandret\ sum)\cdot(lodret\ sum)}{sum\ total}$$

Så man bruger formlen:

$$forventet_{ja,60år} = \frac{(28+62)\cdot(28+73)}{253} = 35.929$$

Resten regnes i Maple.

```
restart
with(Gym) :
obs := ⟨⟨28, 73|62, 90⟩⟩ :
forventet(obs)
```

$$\begin{bmatrix} 35.929 & 54.071 \\ 65.071 & 97.929 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

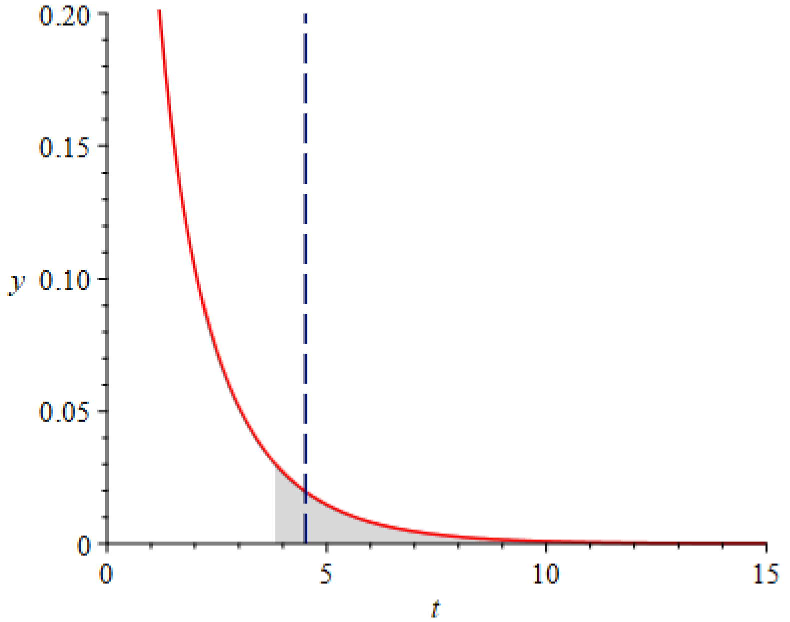
Så en passende tabel over de forventede værdier er

Efterlønsalder / Lever sammen med en partner	60år	61-65år
Ja	35.929	54.071
Nej	65.071	97.292

b) I Maple udregnes teststørrelsen. Der testes med et 5% signifikansniveau.

```
restart
with(Gym) :
obs := ⟨⟨28, 73|62, 90⟩⟩ :
ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 4.5205
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.033491



Da p-værdien er mindre end 5%, som der testes med, afvises nulhypotesen. Der er altså signifikans forskel på, om man lever sammen med en partner eller ej.

Opgave 12: [Via Maple]

a) Afstanden mellem pylonerne er 1280m, så er toppunktet ved 640m, med højden 80m. Altså er toppunktet $T(640{,}80)$. Pylonerne har højden 220m, så der er to yderligere punkter. $P(0{,}220)$ og $Q(1280{,}220)$. Anvendes toppunktsformlerne kan man opstille et ligningssystem.

$$640 = -\frac{b}{2 \cdot a}$$
$$80 = \frac{4 \cdot a \cdot 220 - b^2}{4 \cdot a}$$

Isoleres b i første ligning får man

$$640 = -\frac{b}{2 \cdot a} \Leftrightarrow b = -1280a$$

Indsættes ovenstående i anden ligning vil man have en ubekendt.

$$80 = \frac{4 \cdot a \cdot 220 - (-1280a)^2}{4 \cdot a} \Leftrightarrow 80 \ = \ -409600a + 220 \Leftrightarrow a = \frac{7}{20480}$$

Indsættes denne nu i første ligning kan man finde b.

$$b = -1280 \cdot \frac{7}{20480} = -\frac{7}{16}$$

Endelig er forskriften

$$f(x) = \frac{7}{20480}x^2 - \frac{7}{16}x + 220$$

b) I Maple udregnes længden af pylonerne, når $x_1 = 0$ og $x_2 = 1280$, så

restart
with(Gym) :

$$f(x) := \frac{7}{20480} \cdot x^2 - \frac{7}{16} \cdot x + 220 :$$
$$L = \int_0^{1280} \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right) dx$$
$$L = 40\sqrt{305} + \frac{40960 \ln(2)}{7} - \frac{10240 \ln\left(-7 + \sqrt{305}\right)}{7} \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$L = 1319.8 \qquad (2)$$

Ifølge Maple er længden af bærekablet $1319.8m$

Opgave 13:

a) Man indsætter $1.5\mu g/L$ i differentialligningen, så

$$c'(t) = -0.035 \cdot 1.5 = -0.0525$$

Så koncentrationen i blodet er $1.5\mu g/L$ aftager koncentrationen hver time med $0.0525\mu g/L/t$.

b) Dette er en af de simple differentialligninger. Løsningen til den er

$$c(t) = k\mathrm{e}^{-0.035t}$$

Så bestemmes konstanten k.

$$2 = k\mathrm{e}^{-0.035 \cdot 0} \Leftrightarrow k = 2$$

Den partikulære løsning er

$$c(t) = 2\mathrm{e}^{-0.035t}$$

Opgave 14:

a) Længden $|AB|$ bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$|AB| = \sqrt{20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(82)} = 26.242cm$$

Vinkel A bestemmes vha. cosinusrelationerne for en vinkel.

$$A = \arccos\left(\frac{20^2 + 26.242^2 - 20^2}{2 \cdot 20 \cdot 26.242}\right) = 49^o$$

(Man kunne også dele trekanten op i to retvinklede trekanter og tage den derfra).

Bemærk, at $|EC| = |AC| = 20$. Længden $|DE|$ er

$$|DE| = |BD| = \frac{|AB|}{2} - |AD| = \frac{26.242}{2} - 5.643 = 7.478cm$$

Man kan finde $|DC|$ via. cosinusrelationerne.

$$|DC| = \sqrt{(26.242 - 7.478)^2 + 20^2 - 2 \cdot (26.242 - 7.478) \cdot 20 \cdot \cos(49)}$$
$$= 16.114cm$$

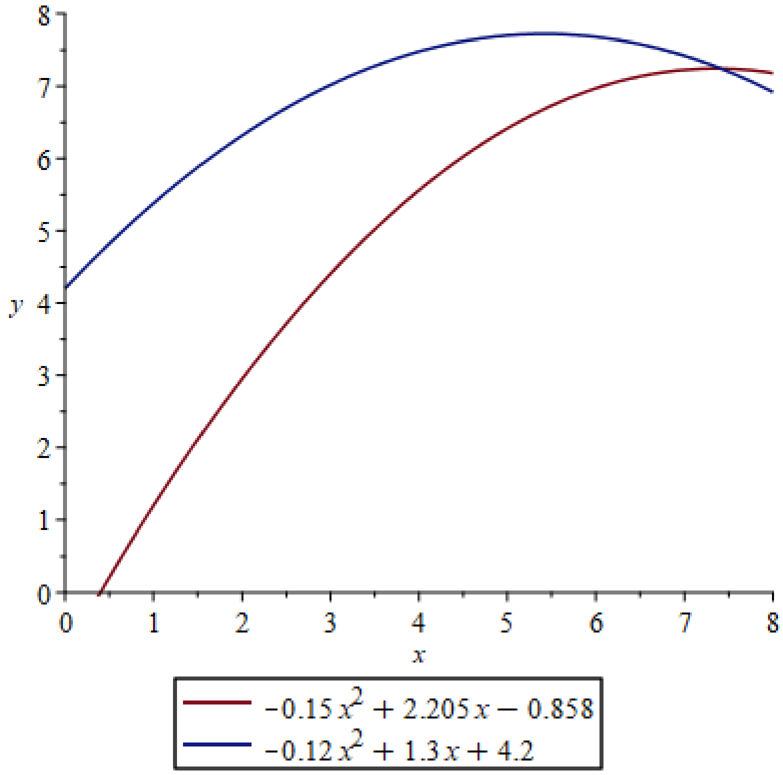
Vha. ½-appelsinformlen fås arealet af CDE.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 16.114 \cdot 20 \cdot \sin\left(\frac{82}{4}\right) = 56.432cm^2$$

Opgave 15: [Via Maple]

a) Funktionerne tegnes i Maple.

$restart$
$with(Gym):$
$f(x) := -0.15 \cdot x^2 + 2.205 \cdot x - 0.858:$
$g(x) := -0.12 \cdot x^2 + 1.3 \cdot x + 4.2:$
$plot([f(x), g(x)], x = 0..8, y = 0..8, legend = [f(x), g(x)])$



Højden kan man finde via solve, hvor man løser $f(x) = g(x)$.

$solve(f(x) = g(x))$

$$7.408247377, 22.75841929 \qquad (1)$$

Den passende højde er $7.408cm$ for skålen.

b) Først bestemmes volumen af $g(x)$. Dernæst løses ligningen $f(x) = 0$, hvor man så finder volumen af $f(x)$. Dette sker i Maple.

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := -0.15 \cdot x^2 + 2.205 \cdot x - 0.858 :$
$g(x) := -0.12 \cdot x^2 + 1.3 \cdot x + 4.2 :$

$$V_g := \mathrm{Pi} \cdot \int_0^{7.408247377} g(x)^2 \, dx$$

$$V_g := 1106.128839 \qquad (1)$$

solve($f(x) = 0$)

$$0.4000000000, 14.30000000 \qquad (2)$$

$$V_f := \mathrm{Pi} \cdot \int_{0.4}^{7.408247377} f(x)^2 \, dx$$

$$V_f := 620.9067195 \qquad (3)$$

$$V_{skål} = V_g - V_f$$

$$V_{skål} = 485.2221195 \qquad (4)$$

Dvs. træet udgør $485.222 cm^3$ af skålen.