ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Σχ. Βιβλίο σελ.143

β) Σχ. Βιβλίο σελ.185

Α2. Σχ. Βιβλίο σελ.111

Α3. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Ισχύει ότι:

- $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$
- $f'(x) < 0 \leftrightarrow x \in [0,1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1].
- $f'(x) > 0 \leftrightarrow x \in (1,3) \cup (3.5]$ όπου, επειδή η f' διατηρεί το πρόσημό της, το $f(3)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,5] .

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα άκρα που πεδίου ορισμού της, στις θέσεις $x = 0$ και $x = 5$ ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$.

Β.2 Από τη γραφική παράσταση της f' συμπεραίνουμε ότι:

- η f' $(\uparrow)$ γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0,2]$
- η f' $(\downarrow)$ γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[2,3]$
- η f' $(\uparrow)$ γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[3,5]$

Οπότε, η f παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις $x = 2$ και $x = 3$, τα σημεία $A(2, f(2))$ και $B(3, f(3))$ αντίστοιχα.

B.3 Θέλουμε την ευθεία:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x-2) \rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 1 = x - 2 \rightarrow y = x - 1$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο καμπής, διαπερνά τη γραφική παράσταση και ισχύει ότι

$$f(x) \geq y = x - 1 \text{ για κάθε } x \in [0,2]$$

Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$ (στο σημείο καμπής) άμεσα προκύπτει ότι

$$f(x) > x - 1 \text{ για κάθε χ} \in (0,2)$$

B.4 $N = \int_1^2 f'(x)dx - \int_2^1 x \cdot f''(x)dx = \int_1^2 f'(x)dx + \int_1^2 x \cdot f''(x)dx =$

$$= \int_1^2 [f'(x) + x \cdot f''(x)]\, dx = \int_1^2 \left(x \cdot f'(x)\right)' dx =$$

$$= [x \cdot f'(x)]_1^2 = 2 \cdot f'(2) - 1 \cdot f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Ισχύει: $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$.

β) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$x \cdot f'(x) - f(x) = \frac{x^2 \cdot (e^x - 1)}{e^x - x} \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{(e^x - 1)}{e^x - x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln(e^x - x))'$$

Άρα: $\dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} \ln(e^x - x) + c_1, x < 0 \\ \ln(e^x - x) + c_2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(e^x - x) + c_1, x < 0 \\ x \cdot \ln(e^x - x) + c_2, x > 0 \end{cases}$

Είναι: $f(1) = \ln(e-1) \Leftrightarrow c_2 = 0$ και $f(-1) = 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow c_1 = 0$. Επιπλέον η f είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη οπότε έχουμε: $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln(e^x - x)) = 0$ Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(e^x - x), x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x \cdot \ln(e^x - x), x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x \cdot \ln(e^x - x), x \in \Re.$$

Γ2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και το $x_0 = 0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο ,αυτό σημαίνει ότι $f'(0) = 0$ χωρίς να υπάρχει άλλο σημείο που η f' να μηδενίζεται. Τότε:

$f'(x) = \ln(e^x - x) + x \cdot \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \Re$. Για $x > 0$ ισχύει: $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$ και $e^x - x > 0$ και $\ln(e^x - x) > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, οπότε $f \uparrow [0, +\infty)$. Ομοίως για $x < 0$ ισχύει $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$ και $e^x - x > 0$ και $\ln(e^x - x) > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f \uparrow (-\infty, 0]$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Γ3. α) Ισχύει: $g'(x) = e^x - x - e$ και $g''(x) = e^x - 1 > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα $g' \uparrow [0, +\infty)$ και αφού η g' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το $g'([0, +\infty)) = [g'(0), \lim\limits_{x \to +\infty} g'(x)) = [1 - e, +\infty)$ γιατί:

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - x - e) = \lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{e}{e^x}\right) = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e}{e^x} = 0$. Επειδή $0 \in g'([0, +\infty))$ και $g' \uparrow$ θα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$ ώστε $g'(\xi) = 0$ και επομένως για $x > \xi \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ άρα $g \uparrow [\xi, +\infty)$ και για $0 \le x < g'(\xi) \uparrow \overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(x) < g'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ άρα $g \downarrow [0, \xi]$.

β) Για $x > 0$ ισχύει και $f(x) = x \cdot \ln(e^x - x) > 0$ οπότε για να είναι το ορθογώνιο ΟΑΜΒ τετράγωνο θα πρέπει $(\text{ΟΑ}) = (\text{ΟΒ}) \Leftrightarrow x = f(x) \Leftrightarrow x \cdot \ln(e^x - x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x - x) = 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - x) = \ln e \Leftrightarrow$ $e^x - x = e \Leftrightarrow e^x - x - e = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$ που από το προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει η σχέση αυτή.

Γ4. α) Προφανώς η ισότητα ισχύει για $x = 0$. Έστω $x > 0$ τότε:

$0 < F(x) < x \cdot f(x) \Leftrightarrow 0 < \dfrac{F(x)}{x} < f(x) \Leftrightarrow 0 < \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} < f(x) (1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση F για την οποία ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $F'(x) = f(x), x > 0$. Τότε θα υπάρχει $x_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$F'(x_1) = f(x_1) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$ οπότε από την (1) έχω:

$0 < F'(x_1) < f(x) \Leftrightarrow 0 < f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow f(0) < f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow 0 < x_1 < x$ που ισχύει αφού η $f \uparrow [0,+\infty)$.

β) Το ζητούμενο εμβαδό θα δίνεται:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 |F(x)| dx = \int_0^1 F(x)dx < \int_0^1 x\cdot f(x)dx = \int_0^1 x\cdot F'(x)dx = [x\cdot F(x)]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot F(x)dx =$$

$$F(1) - \int_0^1 x'\cdot F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \mathrm{E}$$,άρα $2\mathrm{E} < F(1)$,γιατί $0 \le F(x) \le x\cdot f(x), x \in [0,+\infty)$

και δεν είναι η F πάντα ίση με 0 και με $x\cdot f(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{x} \overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(xf'(x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)+xf''(x)}{1} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Δ2. α) Η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επιπλέον η f' ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty) = D_{f'}$.

Άρα $f'(D_{f'}) = \left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x), -1\right)$.

Επομένως για κάθε $x \in D_{f'} = (0,+\infty)$ ισχύει $f'(x) < -1 \overset{-1<0}{\Rightarrow} f'(x) < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$

είναι $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$

Η f είναι κυρτή άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένως για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f'(1)x + f(1) - f'(1) \Leftrightarrow f(x) - f'(1)x \geq f(1) - f'(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x - f'(1)x \geq x + f(1) - f'(1) \Leftrightarrow f(x) + (1 - f'(1))x \geq x + f(1) - f'(1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + f(1) - f'(1)) = +\infty$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + (1 - f'(1))x\right] = +\infty$.

Δ3. Βρίσκουμε το $f(1)$

Έστω $\varphi(x) = \dfrac{(x^2 + x - 2)f(x)}{\ln x}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty) = B$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x) = 0$ και για κάθε $x \in B$ είναι $(x^2 + x - 2)f(x) = \varphi(x)\ln x \overset{x^2+x-2\neq0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\varphi(x)\ln x}{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\varphi(x)\ln x}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\varphi(x)}{x+2} \cdot \frac{\ln x}{x-1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)}{x+2} = \dfrac{0}{1+2} = 0$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x) = 0 \cdot 1 = 0$

Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής, άρα $f(1) = \lim\limits_{x\to1}f(x) \Leftrightarrow f(1) = 0$

Η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

Είναι $E = \int_\alpha^\beta |g(x)|dx$

Είναι $\alpha > 1$ οπότε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $x > 1 \overset{f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x) < 0$$

Άρα $E = \int_\alpha^\beta (-g(x))dx$

Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι: $\alpha \leq x \leq \beta \overset{f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(\alpha) \geq f(x) \geq f(\beta) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(\beta)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{x} \geq g(x) \geq \frac{f(\beta)}{x} \Leftrightarrow -\frac{f(\alpha)}{x} \leq -g(x) \leq -\frac{f(\beta)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{f(\alpha)}{x} \leq -g(x) & (1) \\ -g(x) \leq -\dfrac{f(\beta)}{x} & (2) \end{cases}$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

Η ισότητα στην (2) ισχύει μόνο για $x=\beta$.

Άρα $\begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(-\frac{f(\alpha)}{x}\right)dx < \int_\alpha^\beta (-g(x))\,dx \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta (-g(x))\,dx < \int_\alpha^\beta \left(-\frac{f(\beta)}{x}\right)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle -f(\alpha)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx < E \\ \displaystyle E < -f(\beta)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -f(\alpha)\big[\ln|x|\big]_\alpha^\beta < E < -f(\beta)\big[\ln|x|\big]_\alpha^\beta \Leftrightarrow -f(\alpha)(\ln\beta-\ln\alpha) < E < -f(\beta)(\ln\beta-\ln\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(\alpha)\ln\frac{\beta}{\alpha} < E < -f(\beta)\ln\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-f(\alpha)} < E < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-f(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{f(\alpha)} < E < \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{f(\beta)}$$

Δ4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει ρίζα στο (α,β) η εξίσωση $\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (g(\beta)-g(\alpha))f'(x) = (f(\beta)-f(\alpha))g'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (g(\beta)-g(\alpha))f'(x) - (f(\beta)-f(\alpha))g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((g(\beta)-g(\alpha))f(x) - (f(\beta)-f(\alpha))g(x)\big)' = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = (g(\beta)-g(\alpha))f(x) - (f(\beta)-f(\alpha))g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται $h'(x)=0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \subseteq (0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

Είναι:

$$h(\alpha)=\big(g(\beta)-g(\alpha)\big)f(\alpha)-\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)g(\alpha)=$$

$$=f(\alpha)g(\beta)-\cancel{f(\alpha)g(\alpha)}-f(\beta)g(\alpha)+\cancel{f(\alpha)g(\alpha)}=$$

$$=f(\alpha)g(\beta)-f(\beta)g(\alpha)$$

$$h(\beta)=\big(g(\beta)-g(\alpha)\big)f(\beta)-\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)g(\beta)=$$

$$=\cancel{f(\beta)g(\beta)}-f(\beta)g(\alpha)-\cancel{f(\beta)g(\beta)}+f(\alpha)g(\beta)=$$

$$=f(\alpha)g(\beta)-f(\beta)g(\alpha)$$

Ισχύει $h(\alpha)=h(\beta)$

Η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, άρα η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει ρίζα στο (α,β).

Επιμέλεια απαντήσεων: Αγοργιανίτης Ιωάννης, Βερέμης Δημήτριος, Δελενίκα Μαρία, Ιωσηφίδης Σταύρος, Κανελλόπουλος Γιώργος, Τσίμος Βασίλειος.