تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

مقـرر الوحـــــــدة الرابعـــــــة
الحدوديـــــــات

تعريف:

الصورة العامة للحدودية في المتغير (س) من الدرجة ن هي:

حـ = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-1}$ $س^{ن-1}$ + ... $أ_1$ $س^1$ + أ

ملاحظات:

1) درجة الحدودية هي أعلى أُس فيها:

مثال: $7س^5$ + $3س^4$ ⇐ هُنا أعلى أُس (5) ∴ الدرجة الخامسة.

2) $أ_ن$ ، $أ_{ن-1}$،..... $أ_1$ ، $أ_0$ ثوابت (تدعى معاملات).

3) $أ_ن$ يدعى المعامل الرئيسي.

مثال: $7س^5$ + $3س^4$ ⇐ من الدرجة الخامسة ∴ المعامل الرئيسي $أ_ن$ = 7

4) $أ_0$ يُدعى الحد المطلق يخلو من س.

مثال: $س^2$ + س+1 ⇐ هُنا الحد المطلق الخالي من س ($أ_0$ = 1).

5) نرمز للحدودية بالرمز جـ:

مثال: كوِّن حدودية معاملاتها:

$أ_4$ = 5 ، $أ_3$ = 2 ، $أ_2$ = أ= 0 ، $أ_0$= 7

الحل: المعامل الرئيسي ($أ_4$= 5) يدلك على أن الحدودية من الدرجة (الرابعة)

∵ حـ = $أ_4$ = $س^4$ + $أ_3$ $س^3$ + $أ_2$ $س^2$+ $أ_1$ س + $أ_0$

= $5س^4$+$2س^3$ + 0 + 0 + 7

= $5س^4$ + $2س^3$ + 7

تمارين ومسائـل (1/4)

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

[1] بيّن درجة وعدد حدود كل حدودية مما يأتي:

(أ) $س^6 - س^5 + 2س^3 - 5$

(ب) $\frac{1}{2} س^3 + \frac{3}{5} س^6 + 7س + 3س^7 + 9$

(جـ) $- س^1 + 5$

(د) 9

الحل:

(أ) معك $س^6$

∴ أعلى أُس (6). ∴ الدرجة (6) وعدد الحدود (4)

(ب) بِهَا ($3س^7$) افهم أن الدرجة (7) عدد الحدود (5)

(جـ) أعلى أُس (7)

∴ الدرجة الأولى وعدد الحدود (2)

(د) ما بها (س)

∴ الدرجة (صفر) وعدد الحدود (1)

---

[2] اكتب الحدوديات التالية وفق المعطيات:

(أ) $أ_4 = 7$ ، $أ_3 = 4$ ، $أ_2 = 1$ ، $أ_1$ = صفر ، $أ_0 = -2$

الحل: الحدودية من الدرجة الرابعة (لأنه معك $أ_4$) ∴ الحدودية على الصورة.

∴ حـ $= أ_4 س^4 + أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س^1 + أ_0$

$= 7س^4 + 4س^3 + 1 \times س^2 + 0 \times س - 2$

(ب) $أ_0 = 3$ ، $أ_6 = 2$ ، $أ_1 = -4$ ، $أ_5 = أ_3 = أ_4$ = صفر ، $أ_2 = \frac{1}{2}$

الحل: معك $أ_6$

∴ الحدودية من الدرجة السادسة.

∴ حـ $= أ_6 س^6 + أ_5 س^5 + أ_4 س^4 + أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س^1 + أ$

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

$= 2س^6 + 0 + 0 + 0 - س^2 - 4س + 3$

(جـ) $أ_1 = أ_2 = أ_4 = 0$ ، $أ_7 = 2$ ، $أ_6 = -1$ ، $أ_5 = أ_0 = 1$ ، $أ_3 = \frac{1}{4}$

الحل: الحدودية من الدرجة السابعة لأن المعامل الرئيسي $أ_7$

∴ حـ $= أ_7 س^7 + أ_6 س^6 + أ_5 س^5 + أ_4 س^4 + أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س^1 + أ_0$

$= 2س^7 - س^6 + س^5 + \frac{1}{4} س^3 + 1$

(د) $أ_3 = 2$ ، $أ_2 = أ_1 =$ صفر ، $أ_0 = 1$

الحل: الحدودية من الدرجة الثالثة لوجود $أ_3$

∴ جـ $= أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س^1 + أ_0$

$= 2س^3 + 0 + 0 + 1 = 2س^3 + 1$

---

[3] أوجد درجة كل حدودية مما يأتي والمعامل الرئيسي والحد المطلق فيها:

(أ) $س^4 - 5س^2 + 5$:

الحل: المعادلة من الشكل: $أ_4 س^4 + أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س^1 + أ_0$

∴ الدرجة الرابعة.

∴ المعامل الرئيسي $(أ_4 = 1)$

∴ الحد المطلق $(أ_0 = 5)$

(ب) $س^3 + 3س^7 - 2س^4$:

الحل: الدرجة (السابعة) المعامل الرئيسي $(أ_7 = 3)$ الحد المطلق $(أ_0 = 0)$

(جـ) $س^2 - 7س + 9$:

الحل: الدرجة (الثانية) المعامل الرئيسي $(أ_2 = 1)$ الحد المطلق $(أ_0 = 9)$

(د) $س + 2$:

الحل: الدرجة (الأولى) المعامل الرئيسي $(أ_1 = 1)$ الحد المطلق $(أ_0 = 2)$

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

[4] أوجد القيمة العددية للحدوديات التالية:

(أ) جـ = $3س^2 + 2س + 3$ عند س = $\frac{1}{2}$

الحل: القيمة العددية (ضع س = $\frac{1}{2}$) = $3(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) + 3$

= $3 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 + 3 = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4}$ #

(ب) جـ = $2ص^3 - ص^2 + 3$ عندما ص = 0

الحل: القيمة العددية = $0 - 0 + 3 = 3$ #

(جـ) $3أ^2 + 7$ عندما أ = -3

الحل: القيمة العددية = $3(-3)^2 + 7 = 3 \times 9 + 7 = 27 + 7 = 34$

(د) $6ع^4 - ع^3 + 3$ عندما ع = -1

الحل: القيمة العددية = $6(-1)^4 - (-1)^3 + 3 = 6 + 1 + 3 = 10$#

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

العمليـــــــــات الأربـــــــــع على الحدوديـــــــات

{1} عند جمع أو طرح حدوديتين نجمع الحدود المتشابهة، وتكون درجة الحدودية الناتجة أصغر أو تساوي أكبر درجة للحدوديتين.

مثال: $ح_1 = س^3 + س^2 + س + 1$ ، $ح_2 = 2س^3 + 1$

$ح_3 = س^3 + س^2 + س + 2س^3 + 1 = 2س^3 + س^2 + س + 2$

لاحظ درجة $(ح_1) = 3$ ، درجة $(ح_2) = 3$ ، درجة $(ح_3) = 3$

مثال: $ح_1 = س^3 + س^2$ ، $ح_2 = - س^3 + س + 1$

$\therefore ح_3 = س^3 + س^2 - 3 + س + 1 = س^2 + س + 1$

لاحظ: درجة $(ح_1) = 3$

درجة $(ح_2) = 3$

لكن: درجة $(ح_3) =$ ؟ أقل منهم.

{2} عند ضرب حدودية بعدد (ك) يضرب ك في المعاملات فقط ولا يؤثر على الدرجة.

مثال: $ح_1 = 2س^3 + 2س + 7$ لاحظ درجة $(ح_1) = 3$

فإن $5 \times ح_1 = 5 (2س^3 + 2س + 7)$

$= 10س^3 + 10س + 35$

$\therefore$ ضربت 5 في المعاملات وبقية درجة $(ح_1) = 3$

{3} ضرب حدوديتين يُعطي حدودية ثالثة درجتها تساوي مجموع درجتي الحدوديتين.

مثال: $ح_1 = س^3 + س^2$ ، $ح_2 = س^2 + س + 1$

عندئذٍ: $ح_3 = ح_1 \times ح_2 = (س^3 + س^2)(س^2 + س + 1)$ وزِّع

$= س^3 (س^2 + س + 1) + س^2 (س^2 + س + 1)$

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

$= س^5 + س^4 + س^3 + س^4 + س^3 + س^2$

$= س^5 + 2س^4 + 2س^3 + س^2$

مقارنة الدرجات: درجة ($ح_1$) = 3 ، درجة ($ح_2$) = 2 ، درجة ($ح_3$) = 5

أي أن درجة ($ح_3$) = درجة ($ح_1$) + درجة ($ح_2$)

{4} إذا كانت $ح_1$ ، $ح_2$ حدوديتين وكانت $ح_2 \neq 0$ ودرجتها أقل من درجة $ح_1$ ، عندئذٍ نقول: $ح_1$ يقبل القسمة على $ح_2$ ، إذا وجدت حدودية ثالثة ($ح_3$) بحيث $ح_1 = ح_2 \times ح_3$ نُسمي كل من $ح_2$ ، $ح_3$ عوامل لـ: $ح_1$

مثال: $ح_1 = س^2 - 5س + 6$ يقبل القسمة على $ح_2 = س - 2$ لأنهُ توجد $ح_3 = س - 3$ بحيث:

$ح_1 = س^2 - 5س + 6 = (س - 2)(س - 3) = ح_2 \times ح_3$ #

مثال: إذا كانت $ح_1 = س^5 + 1$ وكانت $ح_2 = س + 1$ أوجد حدودية $ح_3$ بحيث يكون:

$ح_1 = ح_2 \times ح_3$

الحل:

أ) نجري القسمة:

$س^4 - س^3 + س^2 - س + 1$

$س^5 + 1$ $- س^5 \mp س^4$	$س + 1$
$- 0 - س^4 + 1$ $\pm س^4 \pm س^3$	
$0 س^3 + 1$ $س^3 \mp س^2$	
$0 - س^2 + 1$ $\pm س^2 \pm س$	$\therefore ح_3 = س^4 - س^3 + س^2 - س + 1$
$0 س + 1$	

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

+ س ∓ 1	
0	**0**

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

مثال: إذا كانت $ح_1 = س^2 + 1$ ، $ح_2 = س + 1$

هل توجد $ح_3$ بحيث $ح_1 = ح_2 \times ح_3$ ؟

الحل: نقوم بالقسمة المطولة:

$$\frac{ح_1}{ح_2} = \quad س - 1$$

$س^2 + 1$	$س + 1$
$- س^2 + س$	
$- س + 1$	
$\pm س \mp 1$	
2	

تمرين: **إذا كانت: $ح_1 = س^4 - 1$ وكانت $ح_2 = س - 1$ عاملاً من عواملها أوجد $ح_3$ بحيث $ح_1 = ح_2 \times ح_3$**

الحل: كنّا نتبع طريقة القسمة المطولة. الآن لنتعرف على طريقة جديدة تدُعى طريقة المعاملات.

$س^4 - 1 = 1 س^4 + 0س^3 + 0س^2 + 0س - 1$

مثال: $ح_1 = س^3 + س - 10$ ، $ح_2 = س - 2$

أوجد $ح_3$ بطريقة المعاملات:

الحل:

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

تمارين ومسائل (2/4)

[1] لتكن: $ح_1$ هي $2س^3 + 4س - 6$

$ح_2 = س^2 - س + 4$

$ح_3 = 4س^3 - س^2 + س$

أوجد مَا يلي:

(أ) $ح_1 + ح_2$

الحل: $ح_1 + ح_2 = 2س^3 + 4س - 6 + س^2 - س + 4$

نجمع الحدود المتشابهة

$= 2س^3 + س^2 + 3س - 2$

(ب) $-(ح_1 + ح_3)$

الحل: $-5(ح_1 + ح_3) = -5(2س^3 + 4س - 6 + 4س^3 - س^2 + س)$

$= -5(6س^3 - س^2 + 5س - 6)$

$= -30س^3 + 5س^2 - 25س + 30$

(جـ) $ح_1 - ح_3$

الحل: $ح_1 - ح_3 = 2س^3 + 4س - 6 - (4س^3 - س^2 + س)$

$= 2س^3 + 4س - 6 - 4س^3 + س^2 - س$

$= -2س^3 + س^2 + 3س - 6$

(د) $ح_3 \cdot ح_2$:

الحل: $ح_3 \cdot ح_2 = (4س^3 - س^2 + س)(س^2 - س +)$ وزع:

$= 4س^3(س^2 - س + 4) - س^2(س^2 - س + 4) + س(س^2 - س + 4)$

$= 4س^5 - 4س^4 + 16س^3 - س^4 + س^3 - 4س^2 + س^3 - س^2 + 4س$

$= 4س^5 - 5س^4 + 18س^3 - 5س^2 + 4س$

(هـ) $ح_1(ح_2 + ح_2)$:

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

الحل: $ح_1(ح_1 + ح_3) = (2س^3 + 4س - 6)(س^{-2} - س + 4 + 4س^{-3} - س^2 + س)$

$= (2س^3 + 4س - 6)(4س^3 + 4)$

$= 2س^3(4س^3 + 4) + 4س(4س^3 + 4) - 6(4س^3 + 4)$

$= 8س^6 + 8س^3 + 16س^4 + 16س - 24س^3 - 24$

$= 8س^6 + 16س^4 - 16س^3 + 16س - 24$ #

(و) $\frac{1}{2}ح_1 + 2ح_2 + ح_3$

الحل: $\frac{1}{2}(2س^3 + 4س - 6) + 2(س^{-2} - س + 4) + 4س^3 - س^2 + س$

$= س^3 + 2س - 3 + 2س^2 - 2س + 8 + 4س^3 - س^2 + س$

$= 5س^3 + س^2 + س + 5$

---

[2] إذا كانت $ح_1$ ، $ح_2$ حدوديتين فأوجد $ح_1$ ، $ح_2$ في كل مما يأتي وقارن درجتهُ الناتجة مع درجة $ح_1$ ، $ح_2$:

(أ) $ح_1 = 3س^3$ ، $ح_2 = 2س + 3$

الحل: $ح_3 = ح_1 \times ح_2 = 3س^3(2س + 3) = 6س^4 + 9س^3$ درجة $ح_3$ (4)

مجموع درجتي $(ح_1 ، ح_2) = 3 + 1 = 4$

∴ درجة $ح_3$ = مجموع درجتي $ح_1$ ، $ح_2$ #

(ب) $ح_1 = س + 2$ ، $ح_2 = س^2 + 2س + 4$

الحل: $ح_1 \times ح_2 = (س + 2)(س^2 + 2س + 4) = س(س^2 + س^2 + 4) + 2(س^2 + 2س + 4)$

$= س^3 + 4س^2 + 8س + 8$ #

∴ درجة $ح_3$ (3) ودرجة $(ح_1)$ + درجة $(ح_2) = 1 + 2 = 3$

∴ متساويين.

(جـ) $ح_1 = 2س^3 + 1$ ، $ح_2 = -س^3 + \frac{1}{2}س - 1$

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

الحل: $ح_3 = ح_1 \times ح_2 = (2س^3+1)(-س^3+\frac{1}{2}س-1)$

$= -2س^6+س^4-2س^3-س^3+\frac{1}{2}س-1$

$= -2س^6+س^4-3س^3+\frac{1}{2}س-1$

∴ درجة $ح_3(6)$ ، درجة $(ح_1)$ + درجة $(ح_3) = 3 + 3 = 6$

∴ درجة $ح_3$ = درجة $(ح_1)$ + درجة $(ح_2)$

(د) $ح_1 = 3س^4$ ، $ح_2 = 3س^3 + 27س + 3 \times 15$

$ح_3 = ح_1 \times ح_2 = 3س^4(3س^3 + 27س + 3 \times 15)$

$= 3س^7 + 81س^5 + 3 \times 45س^4$

$= 3س^7 + 9س^5 + 3 \times 5 \times 9س^4 = 3س^7 + 9س^5 + 45س^4$

∴ درجة $ح_3 = (7)$ ، درجة $(ح_1)$ + درجة $(ح_2) = 4 + 3 = 7$

∴ متساويين.

(هـ) $ح_1 = 2س-1$ ، $ح_2 = 2س(2س^2-1)$

الحل: $ح_2 = 4س^3 - 2س$

$ح_3 = ح_1 \times ح_2 = (2س-1)(4س^3 - 2س)$

$= 2س(4س^3 - 2س) - 1(4س^3 - 2س)$

$= 8س^4 - 4س^2 - 4س^3 + 2س$

$= 8س^4 - 4س^3 - 4س^2 + 2س$

∴ درجة $ح_3$ (4) ، درجة $ح_1$ + درجة $ح_2 = 1+3 = 4$ ∴ متساويين.

(و) $ح_1 = س^2 + 2س+1$ ، $ح_2 = (2س-2)(س^3 + س)$

الحل: $ح_2 = 2س^4 + 2س^2 - 2س^3 - 2س = 2س^4 - 2س^3 + 2س^2 - 2ص$

$ح_3 = ح_1 \times ح_2 = (س^2 + 2س + 1)(2س^4 - 2س^3 + 2س^2 2س)$

$= 2س^6 - 2س^5 + 2س^4 - 2س^3 + 4س^5 - 4س^4 + 4س^3 - 4س^2 + 2س^4 - 2س^3$

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

$+ 2س^{-2} - 2س$

$= 2س^{6} + 2س^{5} + 2س^{5} - 2س^{2} - 2س$

[3] إذا كانت $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ حدوديات فأذكر الخاصية التي تعتمد عليها التالية:

(أ) $(ح_1 + ح_2) + ح_3 = ح_1 + (ح_2 + ح_3)$ ⇐ الخاصية التجميعية.

(ب) $ح_1 + ح_2 = ح_2 + ح_1$..... ⇐ الخاصية التبديلية.

(جـ) $ح_1 \ 0 \ ح_3 = ح_3 \ 0 \ ح_1$..... ⇐ الخاصية الإبدالية.

(د) $(ح_1 \ 0 \ ح_2) \ ح_1 \ (ح_1 \ 0 \ ح_3)$..... ⇐ الخاصية التجميعية.

(هـ) $ح_1(ح_2 + ح_3) = ح_1 ح_2 + ح_1 ح_3$.... ⇐ الخاصية التوزيع.

---

[4] إذا كانت $ح_1$ حدودية من الدرجة الرابعة و: $ح_2$ حدودية من الدرجة الثانية.

فحدد درجة كل من الحدوديات التالية:

(أ) $ح_3 = ح_1 + ح_2$ الحل: درجة $(ح_3) \geq$ درجة $(ح_1)$ الكبرى

∴ درجة $ح_3 \geq 4$ لأن الجمع أو الطرح قد يذهب بأعلى درجة.

(ب) $ح_1 - ح_2$ ⇐ درجتها ≥ 4

(جـ) $ح_3 = ح_1$ ⇐ درجتها = درجة $ح_2 = (2)$ لأن الضرب بعدد لا يؤثر على الدرجة.

(د) $ح_3 = ح_1 \times ح_2$ ⇐ درجة $ح_3$ = درجة $ح_1$ + درجة $ح_2 = 4 + 2 =$

(هـ) $ح_1^2$ ⇐ درجتها = درجة $ح_1^2$ + درجة $(ح_2) = 8 + 2 = 10$

(و) $\frac{1}{2}$ $ح_1 \ 0 \ ح_2^2$ ⇐ درجتها = درجة $ح_1$ + درجة $ح_2$ + درجة $ح_2$

$= 4 + 2 + 2 = 8$

---

[5] إذا كانت $ح_2$ عاملاً من عوامل $ح_1$ في كل مما يأتي فأوجد العامل الآخر:

(أ) $ح_3 = ح_1 \div ح_2 = \frac{س^3 + 1}{س + 1} = \frac{(س + 1)(س^2 - س + 1)}{(س + 1)} = س^2 - س + 1$

(ب) $ح_1 = 3س^3 - 7س^2 - 11س + 15$

الحل: $ح_2 = \frac{ح_1}{ح_2} = 3س^2 - 4س - 15$

	$3س^2 - 4س - 15$
$س - 1$	$3س^3 - 7س^2 - 11س + 15$ $-3س^3 \pm 3س^2$
	$-4س^2 + 11س + 15$ $\pm 4س^2 \mp 4س$
	$-15 + س + 15$ $\pm 15س \mp 15$
	0 0

تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
https://ye-thirdsecondr.blogspot.com/

(جـ(حـ$_1$ = 2س^5 – 8س^3 + س^2 – 4

حـ$_2$ = س^2 – 4

الحل: حـ$_3$ = حـ$_1$ ÷ حـ$_2$ = 2س^3 + 1

(د) حـ$_1$ = 2س^4–3س^3 – 8

حـ$_2$ = 2س^3+ س^2 + 2س + 4

الحل: حـ$_3$= حـ$_1$ ÷ حـ$_2$ = س–2

(و) حـ$_1$