Matematik A, STX

06-12-2013

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Vi bestemmer forskriften (lineær; $f(x) = ax + b$), når punkterne er $(-3; 1)$ og $(5; 17)$. Vi anvender to-punktsformlerne, så først bestemmes a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 1}{5 - (-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

Tallet b:

$$b = y_1 - ax_1 = 1 - 2 \cdot (-3) = 1 + 6 = 7$$

Forskriften er så:

$$f(x) = 2x + 7$$

Opgave 2:

a) Arealet af parallelogrammet bestemmes vha. determinantformlen.

$$\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

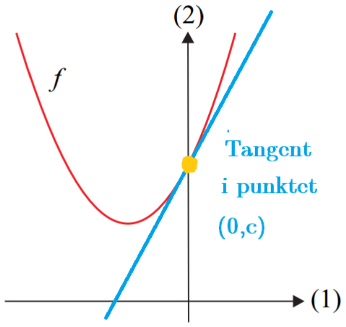
Så med vektorerne indsat er

$$\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right| = |5 \cdot (-4) - 2 \cdot 1| = |-20 - 2| = 20 + 2 = 22$$

Arealet af parallelogrammet er 22.

Opgave 3:

a) Grafen for f viser en parabel, hvis a-værdi er positiv, idet grenene vender opad og grafen er konveks. b-værdien er positiv, da grafen har en positiv tangent ved skæring ved y-aksen, (dvs. hældningskoefficienten for tangenten er positiv! [se tegning]). c-værdien er positiv, da den skærer y-aksen over x-aksen. Endelige er d negativ, idet grafen f ikke skærer x-aksen, og dermed ingen reelle løsninger.



Så kort sagt: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ og $d < 0$.

Opgave 4:

a) Stamfunktionen bestemmes.

$$F(x) = \int (4 - 3x^2)\, dx = 4x - x^3 + k$$

For at finde k, anvendes punktet $P(2;5)$.

$$5 = 4 \cdot 2 - 2^3 + k \Leftrightarrow 5 = 0 + k \Leftrightarrow k = 5$$

Dermed er den endelige stamfunktion til f, som gennemløber P:

$$F(x) = 4x - x^3 + 5$$

Opgave 5:

a) Monotoniforholdene for f bestemmes. Først findes f'.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$, så

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$$

Så rødderne til $f'(x) = 0$ er

$$x = -3 \lor x = 1$$

(Bestem selv vha. diskriminantformlen). Der foretages nu fortegnsvariation.

Man vælger -4, 0 og 2, så

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 9 = 15$$
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 9 = -9$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 15$$

Der er et "Plus-Minus-Plus" tilfælde. Monotoniskemaet laves.

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Dermed kan man slutte, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty;-3]$ og $[1;\infty[$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3;1]$

En anden vej vil være at finde den anden afledede.

$$f''(x) = 6x + 6$$

Indsæt rødderne fra $f'(x) = 0$, så

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 6 = -12, \qquad -12 < 0 \quad \text{dvs. lokalt maks}$$
$$f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12, \qquad 12 > 0 \quad \text{dvs. lokalt min}$$

Så kan man foretage samme konklusion som før.

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty;-3]$ og $[1;\infty[$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3;1]$

Opgave 6:

a) Arealet af en retvinklet trekant er

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Her er grundlinjen x og højden er linjen $y = 4 - x$, mere specifikt: $g = x$, $h = y = 4 - x$, så arealet af trekanten er

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x)$$

Hvis arealet skal være størst muligt, bestemmes og løses $T'(x) = 0$.

$$T'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x)\right)' = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 2 - x$$

Så ligningen $2 - x = 0$ løses. Det er ret nemt at se, at $x = 2$. Ved fortegnsvariation kan man undersøge, om dette er den værdi der giver det største areal. Indsæt 1 og 3, så $T'(1) = 2 - 1 = 1$ og $T'(3) = 2 - 3 = -1$, så det er vist, at $x = 2$ giver det største areal.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Husk, at 2004 svarer til $t = 0$.

I Maple laves eksponentiel regression.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] :
E2 := [10, 13, 24, 13, 83, 122, 333, 448, 668] :
N(t) := ExpReg(E1, E2, t) :
evalf[5](N(t))
                              6.8324 1.7898^t
```

Dermed blev en passende forskrift for $N(t)$ fundet.

b) Tallet a er fremskrivningsfaktoren. Denne værdi omregnes til vækstraten.

$$r = a - 1 = 1.7898 - 1 = 0.7898 = 78.98\%$$

Så for hvert år der går, fra år 2004 bliver der dræbt 78.98% af næsehorn i Sydafrika.

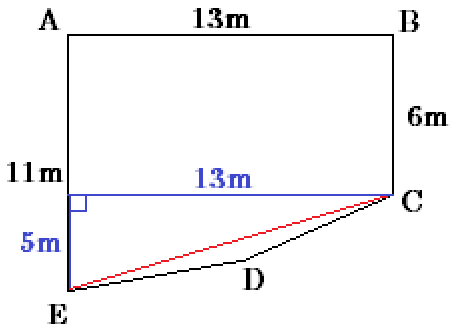
c) År 2013 svarer til en t værdi på 9.

$$N(9) = 6.8324 \cdot 1.7898^9 = 1287.697397$$

Så i år 2013 blev der dræbt ca. 1288 næsehorn i Sydafrika.

Opgave 8:

a) En skitse laves.



Ved anvendelse af Pythagoras kan længden $|CE|$ findes.

$$|CE| = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} = 13.928$$

Dermed er længden $|CE|$ ca. 13.9m lang.

b) Arealet bestemmes. Man har længden $|CE|$ samt to vinkler, så det viser sig at være nyttigt at finde $|DE|$, så man kan anvende arealformlen.

$$\frac{\sin(D)}{|CE|} = \frac{\sin(C)}{|DE|} \Leftrightarrow \frac{\sin(D)}{|CE|} = \frac{\sin(180 - E - D)}{|DE|}$$

Man indsætter tallene og får

$$\frac{\sin(151)}{13.928} = \frac{\sin(180-151-13)}{|DE|} \Leftrightarrow \frac{\sin(151)}{13.928} = \frac{\sin(16)}{|DE|} \Leftrightarrow$$
$$\sin(151)\cdot|DE| = \sin(16)\cdot 13.928 \Leftrightarrow |DE| = \frac{\sin(16)\cdot 13.928}{\sin(151)}$$

Ved udregning får man længden $|DE| = 7.9187$

Arealet af området er

$$T = \frac{1}{2}\cdot 7.9187\cdot 13.928\cdot \sin(13) = 12.4$$

Så arealet af CDE er $12.4m^2$.

Opgave 9: [Via Maple]

a) Man opstiller to vektorer, nemlig $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-5\\5-3\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-5\\0-3\\6-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\3\end{pmatrix}$$

I Maple kunne det gøres hurtigt. Der fortages endvidere krydsprodukt i Maple.

```
restart
with(Gym) :
local D :
A := [5, 3, 3] :; B := [3, 5, 3] :; C := [0, 0, 6] :; D := [5, 0, 3] :;
    E := [0, 5, 3] :

AB := ⟨B − A⟩
                    AB := [−2, 2, 0]                          (1)
AC := ⟨C − A⟩
                    AC := [−5, −3, 3]                         (2)
AB × AC
                    [6, 6, 16]                                (3)
```

Så kan man vælge A som fast punkt, og planen α's ligning er så:

$$6(x-5)+6(y-3)+16(z-3)=0 \Leftrightarrow 6x+6y+16z=96$$

b) Den stumpe vinkel mellem planerne bestemmes vha. vinklerne mellem deres normalvektorer.

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Da er

$$w = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}\right) = \arccos\left(\frac{6 \cdot 9 + 6 \cdot 0 + 16 \cdot 15}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 16^2} \cdot \sqrt{9^2 + 0^2 + 15^2}}\right) = 21.874^o$$

Dette er en spids vinkel, den stumpe er

$$v = 180^o - w = 180^o - 21.874^o = 158.126^o$$

I Maple:

$$\overrightarrow{n}_\alpha := \langle 6, 6, 16 \rangle$$

$$\overrightarrow{n}_\alpha := \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}_\beta := \langle 9, 0, 15 \rangle$$

$$\overrightarrow{n}_\beta := \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$v = 180 - vinkel(\overrightarrow{n}_\alpha, \overrightarrow{n}_\beta)$$

$$v = 158.1257322$$

c) Arealet af glasfladen ADC og arealet af glasfladen BCE er begge ens. Arealet af glasfladen ABC er forskelligt fra de to andre glasflader. (Hvorfor mon?)

$$T_{ADC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{n_\beta}| = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 0^2 + 15^2} = \frac{3}{2}\sqrt{34} = 8.7465$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{n_\alpha}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2 + 16^2} = \sqrt{82} = 9.0554$$

$$T_{BCE} = T_{ADC} = 8.7465$$

Så det totale areal er:

$$T = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8.7465 + 9.0554 = 44.5484$$

Dvs. arealet af alt glasområdet er $44.54 m^2$.

Opgave 10: [Via Maple]

a) Funktionen $P(t)$ findes.

Den fuldstændige løsning, hvor $a = 0.0015$, og $M = 150$ er:

$$P(t) = \frac{150}{1 + ce^{-0.0015 \cdot 150 \cdot t}} = \frac{150}{1 + ce^{-0.225 \cdot t}}$$

Man kan finde c, når man $P(0) = 12$, så

$$12 = \frac{150}{1 + ce^{-0.225 \cdot 0}} \Leftrightarrow 12 = \frac{150}{1 + c} \Leftrightarrow 12 + 12c = 150 \Leftrightarrow 12c = 138 \Leftrightarrow$$
$$c = \frac{138}{12} = 11.5$$

Så den partikulære løsning er

$$P(t) = \frac{150}{1 + 11.5\mathrm{e}^{-0.225 \cdot t}}$$

Dernæst løses ligningen $P(t) = 80$, så

$$\frac{150}{1 + 11.5\mathrm{e}^{-0.225 \cdot t}} = 80 \Leftrightarrow 150 = 80(1 + 11.5\mathrm{e}^{-0.225 \cdot t}) \Leftrightarrow$$
$$\frac{150}{80} = 1 + 11.5\mathrm{e}^{-0.225 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{150}{80} - 1 = 11.5\mathrm{e}^{-0.225 \cdot t} \Leftrightarrow$$
$$\frac{7}{92} = \mathrm{e}^{-0.225 \cdot t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{92}\right) = (-0.225t)\ln(e) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{92}\right) = -0.225t \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{7}{92}\right)}{-0.225} = 11.448$$

Der vil gå ca. 11.5 uger, før akvariet indeholder 80 guppyer

I Maple vil man kunne lave dsolve.:

```
restart
with(Gym) :
dsolve({P'(t) = 0.0015 · P(t) · (150 − P(t)), P(0) = 12}, P(t))
```

$$P(t) = \frac{300}{2 + 23\,\mathrm{e}^{-\frac{9t}{40}}} \tag{1}$$

Og løse ligningen $P(t) = 80$.

$$\frac{300}{2 + 23\,\mathrm{e}^{-\frac{9t}{40}}} = 80 \xrightarrow{\text{solve}} 11.44834857$$

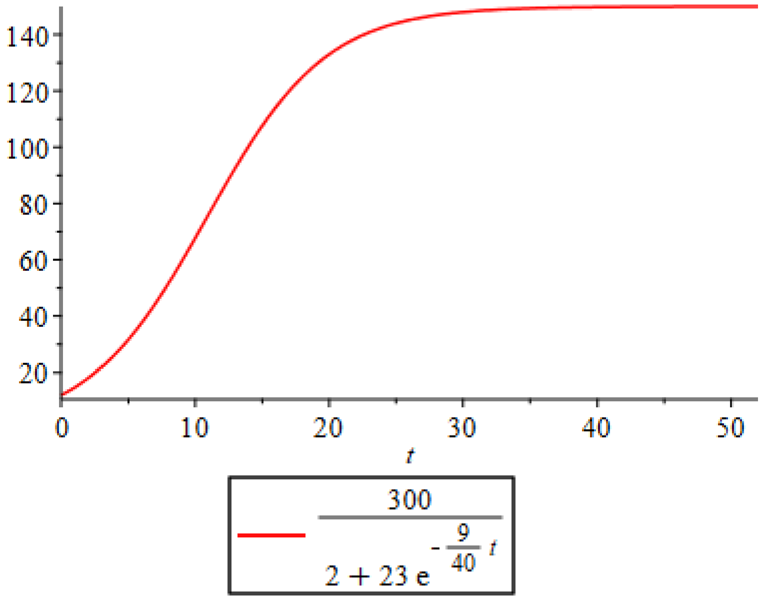
b) I Maple tegnes grafen for $P(t)$. Intervallet går fra $t = 0$ til $t = 52$, da negative tider ikke medtages.

restart
with(*Gym*) :

$P(t) := \dfrac{300}{2 + 23\,\mathrm{e}^{-\frac{9\,t}{40}}}$

$$P := t \mapsto \frac{300}{2 + 23\,\mathrm{e}^{-\frac{9\,t}{40}}}$$

plot($P(t)$, $t = 0\,..52$, *legend* = $P(t)$, *color* = "Red")



Den øvre grænse kan man aflæse til at være 150, så $P(t)$ er asymptote med $y = 150$.

c) Der hvor væksthastigheden er størst, findes vha. formlen:

$$t = \frac{\ln(c)}{a \cdot M} = \frac{\ln(11.5)}{0.0015 \cdot 150} = 10.855$$

Så efter 10.8 uger er væksthastigheden af guppyer størst.

Man kan også løse ligningen $P''(t) = 0$.

Opgave 11:

a) Længden af tape på rullen med 75 viklinger er

$$L(75) = \pi \cdot 0.1 \cdot 75^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 75 = 13548.11832$$

Så længden er $13548mm = 1354.81cm$

b) Ligningen $L(n) = 50000$ løses.

$$\begin{aligned} 50000 &= \pi \cdot 0.1 \cdot n^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot n \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{1}{10}\pi n^2 + 50\pi n - 50000 \Leftrightarrow \\ 0 &= \pi n^2 + 500\pi n - 500000 \end{aligned}$$

Lad $a = \pi$, $b = 500\pi$ og $c = -500000$, man løser en andengradsligning.

$$\begin{aligned} n &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-500\pi + \sqrt{(500\pi)^2 - 4\pi(-500000)}}{2 \cdot \pi} \\ &= \frac{-500\pi + 500\sqrt{\pi^2 + 8\pi}}{2\pi} = 220.81 \end{aligned}$$

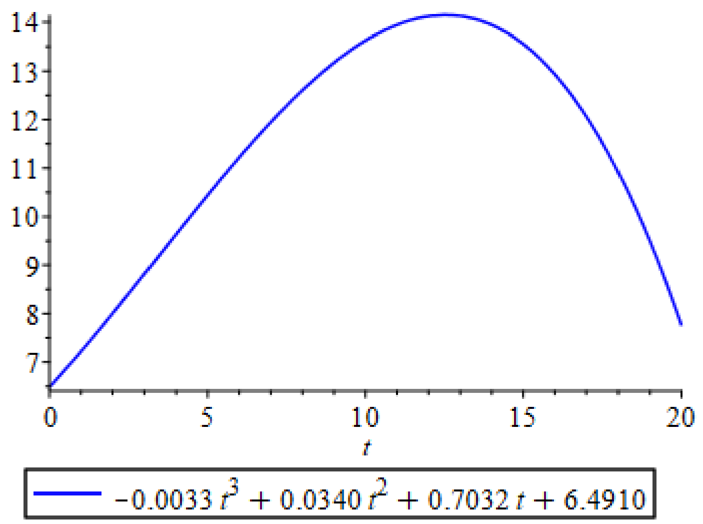
Så en længde på $50000mm$ giver 220.8 viklinger.

NB: Vi anvendte kun den positive løsning, idet negative vinkler ikke vil give mening.

Opgave 12: [Via Maple]

a) I Maple laves grafen, og ligningen $f(t) = 12$ løses for $0 \leq t \leq 20$.

```
restart
with(Gym) :
f(t) := -0.0033·t^3 + 0.0340·t^2 + 0.7032·t + 6.4910 :
plot(f(t), t = 0 ..20, color = "Blue", legend = f(t))
```




```
evalf[5](solve(f(t) = 12))
                7.0759, 17.058, −13.831                (1)
```

Så 7.0759 og 17.058 sekunder efter affyring vil spændingsfaldet være $12V$.

b) I Maple:

$f(15)$

-0.5043

Så 15 sekunder efter affyring, falder spændingsfaldet med $0.5043\,\frac{V}{s}$

Opgave 13: [Via Maple]

a) Først opstilles en nulhypotese.

H: Aldersfordelingen af de adspurgte er samme som resten af befolkningen.

Der er foretaget en stikprøve af 165 tilfældige 20-70-årige personer. De forventede værdier beregnes ved formlen

$$n \cdot \frac{p}{100}$$

Hvor n er summen af antal personer og p er den procentdel i den enkelte kategori. Der gælder:

$$f_{20-30\text{årige}} = 165 \cdot \frac{18.1}{100} = 29.865$$
$$f_{30-40\text{årige}} = 165 \cdot \frac{20.3}{100} = 33.495$$
$$f_{40-50\text{årige}} = 165 \cdot \frac{22.6}{100} = 37.29$$
$$f_{50-60\text{årige}} = 165 \cdot \frac{20}{100} = 33$$
$$f_{60-70\text{årige}} = 165 \cdot \frac{19}{100} = 31.35$$

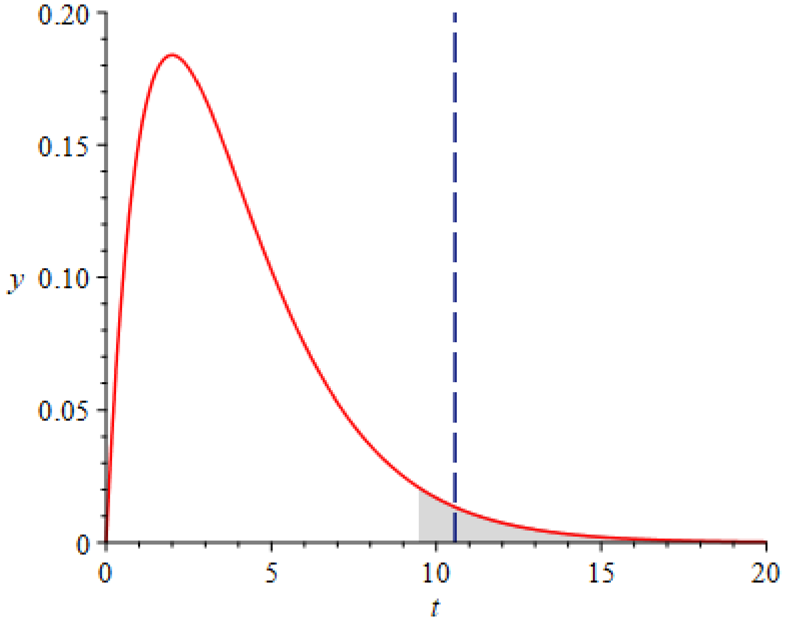
Der laves et skema over alle oplysningerne, dvs. observerende, forventede mv.

Alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Observerende	21	39	51	30	24
Forventede	29.865	33.495	37.29	33	31.35

I Maple laves testen. Dette ses på næste side.

```
restart
with(Gym) :
observerende := [21, 39, 51, 30, 24] :
forv := [29.865, 33.495, 37.29, 33, 31.35] :
ChiKvadratGOFtest(observerende, forv, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 10.573
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.031810



Da p-værdien er 3.181%, som så er mindre end 5%, så afvises nulhypotesen. Der er altså ingen sammenhæng mellem de adspurgte og så resten af befolkningen i den pågældende aldersgruppe.

<u>Opgave 14: [Via Maple]</u>

a) Begge funktioner indskrives i Maple og ligningerne $f(x) = 0$ og $g(x) = 0$ løses. Husk, at $x \geq 0$

```
restart
with(Gym) :
f(x) := -0.015625·x^2 + 1.25·x + 200 :
g(x) := 200 - 0.000032·x^4 :
solve(f(x) = 0)
                        -80., 160.                  (1)
fsolve(g(x) = 0)
                        -50., 50.                   (2)
```

Arealet af busskuret bestemmes næste side.

b) Bemærk, at $g(x)$ ligger under $f(x)$, så det betyder, at området ved g skal fratrækkes f. Derudover skal man anvende 0 og 50 for området g, samt 0 og 160 for f. (Hvorfor?). Så der gælder:

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := -0.015625 \cdot x^2 + 1.25 \cdot x + 200 :$
$g(x) := 200 - 0.000032 \cdot x^4 :$
$M = \int_0^{160} f(x)\,dx - \int_0^{50} g(x)\,dx$

$$M = 18666.66667 \qquad \textbf{(1)}$$

Opgave 15:

a) Tangentens ligning er

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Tangenterne t_1 og t_2 gennemløber origo, så her kan man anvende dette koordinatsæt for så at finde x_0. Først bestemmes $f'(x)$.

$$f'(x) = -2x + 3$$

Ligningen er:

$$\begin{aligned}
&0 = (-2x_0 + 3) \cdot (0 - x_0) + (-x_0^2 + 3x_0 - 2) \Leftrightarrow \\
&0 = 2x_0^2 - 3x_0 - x_0^2 + 3x_0 - 2 \Leftrightarrow \\
&0 = x_0^2 - 2 \Leftrightarrow \\
&x_0^2 = 2 \Leftrightarrow \\
&x_0 = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Dermed har man to forskellige x_0 værdier. Det er dem man indsætter i tangentens ligning for at finde t_1 og t_2, så for t_1 har man

t_1:

$$\begin{aligned}
y &= f'(\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) \\
&= (-2\sqrt{2} + 3) \cdot (x - \sqrt{2}) + \left(-(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 2\right) \\
&= (-2\sqrt{2} + 3) \cdot (x - \sqrt{2}) - 4 + 3\sqrt{2} \\
&\approx 0.1716x
\end{aligned}$$

t_2:

$$\begin{aligned}
y &= f'(-\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) \\
&= \left(-2(-\sqrt{2}) + 3\right) \cdot (x + \sqrt{2}) + \left(-(-\sqrt{2})^2 + 3(-\sqrt{2}) - 2\right) \\
&= (2\sqrt{2} + 3) \cdot (x + \sqrt{2}) - 4 - 3\sqrt{2} \\
&\approx 5.8284x
\end{aligned}$$

Som er de ønskede tangenter.