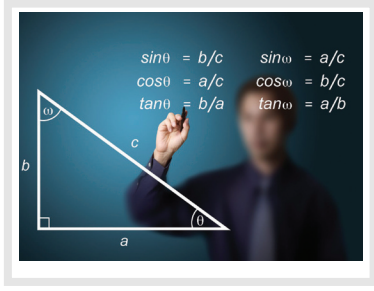


9.4.4 Dik Üçgen ve Trigonometri



Türk - İslam Dünyasında Trigonometri

İçinde bulunduğumuz yüzyılda yapılan bilimsel araştırmalar. göstermiştir ki; trigonometriye ait temel bilgiler, 8. ile 16. yüzyıl Türk İslam Dünyası matematikçileri tarafından ortaya konulmuş ve belli bir noktaya kadar da geliştirilmiştir. Bunun nedenini, şu şekilde açıklamak mümkündür.

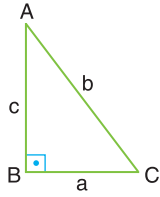
Bilindiği gibi, 8. ile 16. yüzyılda Türk - İslam Dünyası'nın hemen her yöresinde astronomi (gökbilim) çalışmaları ve bunun sonucu olarak da, yoğun bir rasathane (gözlemevi) kurma çalışmaları vardı. Bu rasathanelerdeki bilimsel çalışmalarda, astronomiye yardımcı olarak, trigonometri kullanılmaktaydı.

Astronominin temelini teşkil eden küresel astronomi, doğrudan doğruya, küresel trigonometrinin astronomiye uygulanmasından doğmuştur. Gezegen ve uydu ile yıldızların gökküresindeki yerleri (koordinatları) ve hareketleri ile ilgili hesaplamalar; küresel üçgenin, küresel trigonometriye uygulanmasıyla elde edilebilmektedir. Dolayısıyla, o devir Türk-İslam Dünyası'nda, Trigonometri müstakil bir bilim haline gelmiş ve oldukça gelişmiştir.

Kaynakça: www.yunus.hacettepe.edu.tr.

Dik Üçgende Pisagor Teoremi

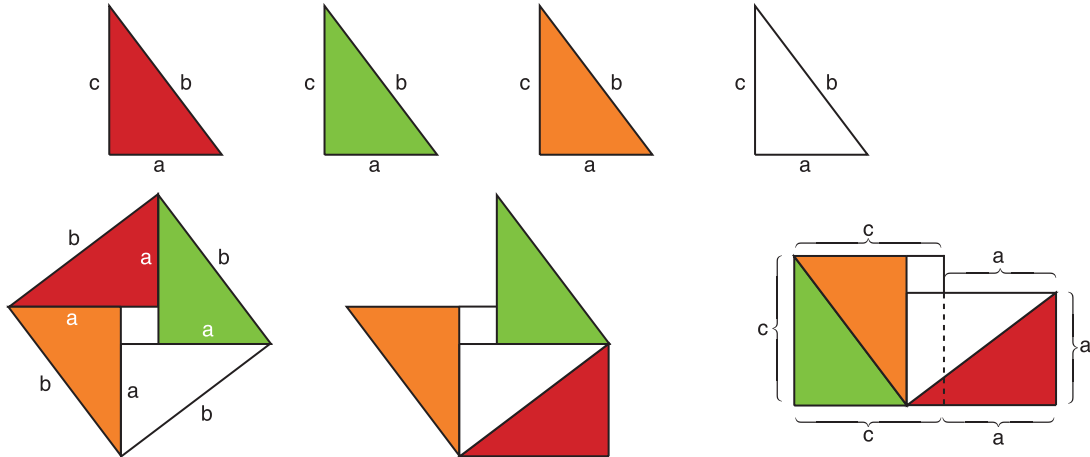
Pisagor teoremini ispatlayalım.



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $|BC| = a$ br

$|AC| = b$ br, $|AB| = c$ br dir.

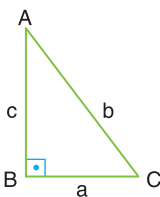
ABC dik üçgeninden 4 tane oluşturalım.



Bir kenar uzunluğu c br olan karesel bölgenin alanı $b^2 + c^2$ dir.

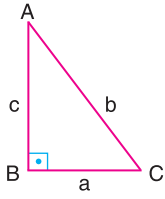
Kırmızı bölgeyi taşıdık.

Yeşil bölgeyi taşıdık. Bir kenar uzunluğu c br ve a br olan karesel bölgeler oluşturduk. Alan = $c^2 + a^2$ dir.



üçgeninde

$b^2 = c^2 + a^2$ dir.



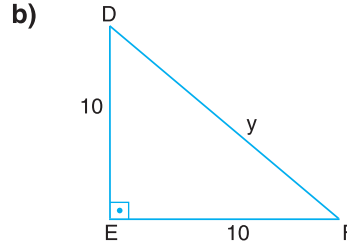
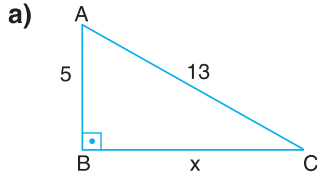
Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olması için gerek ve yeter şart $b^2 = c^2 + a^2$ olmasıdır. Yani

$$b^2 = c^2 + a^2 \quad \text{ise} \quad m(\widehat{B}) = 90^\circ$$

$$m(\widehat{B}) = 90^\circ \quad \text{ise} \quad b^2 = c^2 + a^2 \quad \text{dir.}$$

Örnek

Aşağıda verilen dik üçgenlerde verilmeyen uzunluğu bulalım.



Pisagor teoremine göre;

a) $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olduğundan,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$13^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144 \quad \text{ise} \quad x = \sqrt{144} = 12 \quad \text{olur.}$$

Çözümü kontrol edersek;

$|AB| = 5$ ve $|BC| = 12$ değerlerini kullanarak

$$5^2 + 12^2 = |AC|^2 \Rightarrow 25 + 144 = |AC|^2$$

$$169 = |AC|^2 \quad \text{ise} \quad |AC| = 13 \quad \text{olarak bulunur.}$$

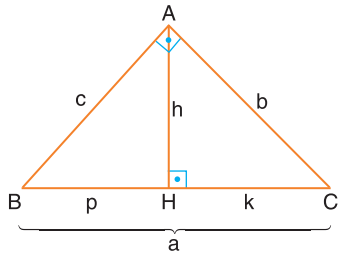
b) DEF üçgeni ikizkenar dik üçgendir ve $m(\widehat{E}) = 90^\circ$ dir.

$$|DF|^2 = |DE|^2 + |EF|^2$$

$$y^2 = 10^2 + 10^2$$

$$y^2 = 200 \quad \text{ise} \quad y = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \quad \text{dir.}$$

Öklid Teoremleri



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$ dir.

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|AH| = h$, $|BH| = p$ ve

$|HC| = k$ olmak üzere;

$$\widehat{HBA} \sim \widehat{HAC} \rightarrow \frac{|HB|}{|HA|} = \frac{|HA|}{|HC|} \rightarrow \frac{p}{h} = \frac{h}{k} \quad \text{den} \quad \boxed{h^2 = p \cdot k}$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{HAC} \rightarrow \frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \rightarrow \frac{b}{k} = \frac{a}{b} \quad \text{den} \quad \boxed{b^2 = k \cdot a}$$

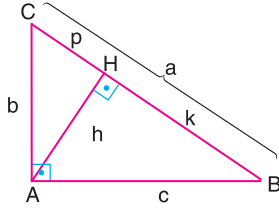
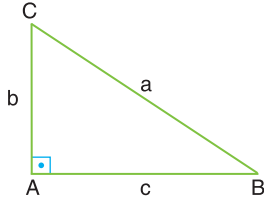
$$\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA} \rightarrow \frac{|AB|}{|HB|} = \frac{|BC|}{|BA|} \rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{c} \quad \text{dan} \quad \boxed{c^2 = p \cdot a}$$

$$a = a \rightarrow a = p + k \rightarrow \frac{a}{p \cdot k \cdot a} = \frac{p}{p \cdot k \cdot a} + \frac{k}{p \cdot k \cdot a}$$

$$\frac{1}{p \cdot k} = \frac{1}{k \cdot a} + \frac{1}{p \cdot a} \quad \text{dan} \quad \boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{olur.}$$

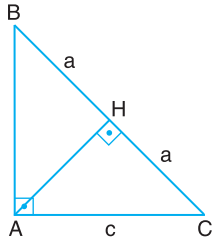
Örnek

Dik üçgende pisagor teoremini öklid teoremlerinden yararlanarak ispatlayalım.



$$\begin{array}{r} b^2 = p \cdot a \\ + \quad c^2 = k \cdot a \\ \hline b^2 + c^2 = p \cdot a + k \cdot a \\ b^2 + c^2 = a \underbrace{(p + k)}_a \quad \text{ise } b^2 + c^2 = a^2 \text{ olur.} \end{array}$$

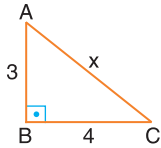
Örnek



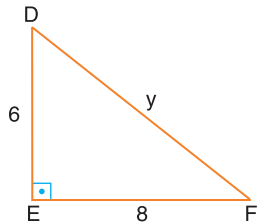
ABC dik üçgeninde $[BA] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$ dir.
 $|BH| = |HC| = a$ br ise $|AH|$ nu bulalım.

Öklid teoremine göre $|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$
 $|AH|^2 = a \cdot a = a^2$ ise $|AH| = a$ br olur.

Örnek



$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 \text{ br} \end{aligned}$$

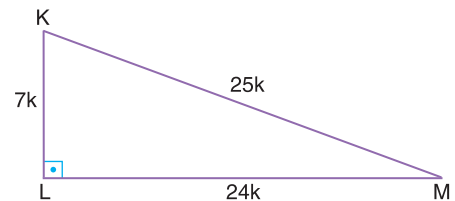
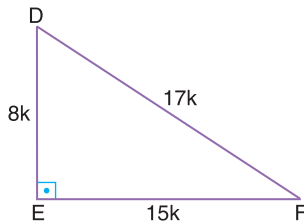
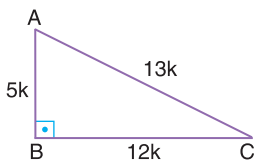


$$\begin{aligned} y^2 &= 6^2 + 8^2 \\ y^2 &= 100 \\ y &= 10 \text{ br} \end{aligned}$$

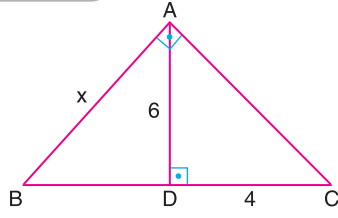
Yanda verilen dik üçgenlerde x ve y uzunluklarını bulalım.

3 – 4 – 5 özel üçgeni mevcuttur.
 3 – 4 – 5 özel üçgeninin katları da $3k - 4k - 5k$,
 $(k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$ pisagor bağıntısını gerçekler.
 $k = 2$ için 6 – 8 – 10 gibi

Bazı özel üçgenler ($k \in \mathbb{R}$ ve $k \neq 0$ olmak üzere)



Örnek



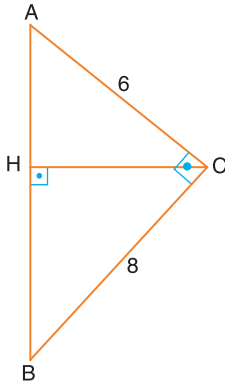
$$6^2 = |BD| \cdot 4 \text{ den } |BD| = 9 \text{ cm}$$

$$x^2 = 9 \cdot 13 \text{ ise } x^2 = 117 \text{ dan } x = 3\sqrt{13} \text{ cm dir.}$$

ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ ve $[AD] \perp [BC]$ dir.

$|AD| = 6 \text{ cm}, |DC| = 4 \text{ cm}$ ise $|AB| = x$ uzunluğunu bulalım.

Örnek



ABC dik üçgeninde $[AC] \perp [CB]$ ve $[HC] \perp [AB]$ dir.

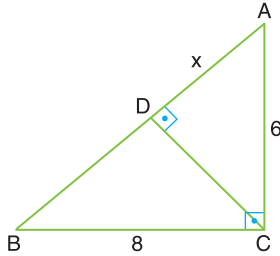
$|AC| = 6 \text{ cm}, |CB| = 8 \text{ cm}$ ise $|HC|$ nu bulalım.

$$\frac{1}{|HC|^2} = \frac{1}{|AC|^2} + \frac{1}{|BC|^2}$$

$$\frac{1}{|HC|^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{64} = \frac{100}{36 \cdot 64}$$

$$|HC|^2 = \frac{36 \cdot 64}{100} \text{ ise } |HC| = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 \text{ cm olur.}$$

Örnek



ABC dik üçgeninde $[AC] \perp [BC]$ ve $[AB] \perp [DC]$ dir.

$|AC| = 6 \text{ cm}, |BC| = 8 \text{ cm}$ ise $|AD| = x$ uzunluğunu bulalım.

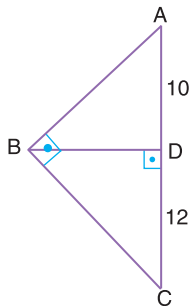
Pisagor bağıntısındaki $3k - 4k - 5k$ özel üçgenindeki $k = 2$ için

$$(6 - 8 - 10) \quad |AB| = 10 \text{ cm dir.}$$

$$6^2 = x \cdot 10$$

$$x = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ cm dir.}$$

Örnek



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $[BD] \perp [AC]$ dir.

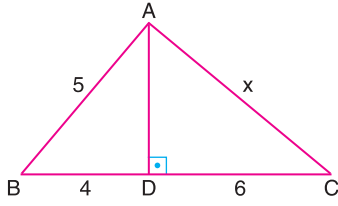
$|AD| = 10 \text{ cm}, |DC| = 12 \text{ cm}$ ise $|BD|$ nu bulalım.

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC|$$

$$|BD|^2 = 10 \cdot 12$$

$$|BD| = \sqrt{120} = 2\sqrt{30} \text{ cm dir.}$$

Örnek



ABC üçgeninde $[BC] \perp [AD]$ dir.

$|AB| = 5 \text{ cm}, |BD| = 4 \text{ cm}, |DC| = 6 \text{ cm}$ olduğuna göre

$|AC| = x$ uzunluğunu bulalım.

$m(\widehat{A}) \neq 90^\circ$ olduğundan öklid teoremlerini kullanamayız.

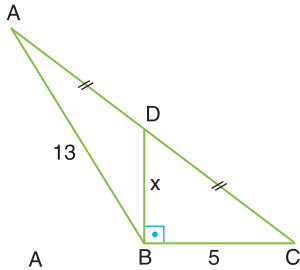
ABD dik üçgeninde 3 – 4 – 5 özel üçgeninden $|AD| = 3 \text{ cm}$ dir.

ADC dik üçgeninde $x^2 = 6^2 + 3^2$

$$x^2 = 36 + 9$$

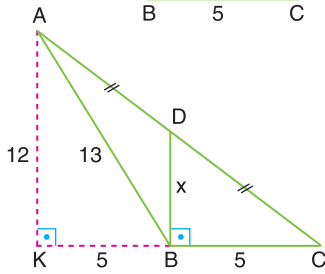
$$x^2 = 45 \quad \text{ise} \quad x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ dir.}$$

Örnek



ABC üçgeninde $[DB] \perp [BC]$ ve $|AD| = |DC|$ dir.

$|AB| = 13 \text{ cm}, |BC| = 5 \text{ cm}$ ise $|DB| = x$ uzunluğunu bulalım.



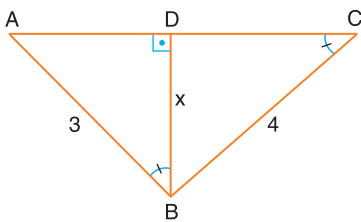
$[DB] \perp [BC]$ ve $[AK] \perp [KB]$ ise $[AK] \parallel [DB]$ dir.

$|AD| = |DC|$ ise $|KB| = |BC| = 5 \text{ cm}$ olmalıdır.

5 – 12 – 13 özel üçgeninden $|AK| = 12 \text{ cm}$

$\widehat{AKC} \sim \widehat{DBC}$ den $x = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$ dir.

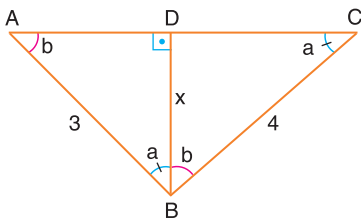
Örnek



ABC üçgeninde $[AC] \perp [DB]$ ve

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{ABD})$ dir.

$|AB| = 3 \text{ cm}, |BC| = 4 \text{ cm}$ ise $|DB| = x$ uzunluğunu bulalım.



DCB üçgeninde $m(\widehat{C}) = a, m(\widehat{DBC}) = b$ ise $a + b = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{A}) = b$ dir.

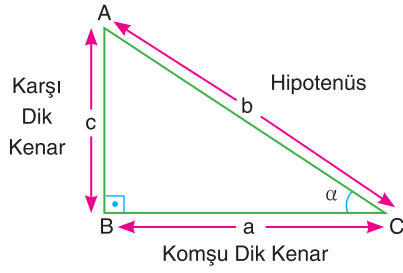
$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ öklid teoreminden

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{25}{3^2 \cdot 4^2} \quad \text{ise} \quad x^2 = \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2}$$

$$x = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} \text{ cm dir.}$$

Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$
ve $m(\widehat{BCA}) = \alpha$ olmak üzere

Dik üçgende bir dar açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranı o dar açının sinüsünü verir. Bir α açısının sinüsü $\sin \alpha$ ile gösterilir.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

Dik üçgende bir dar açının komşusundaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranı o dar açının kosinüsünü verir. Bir α açısının kosinüsü $\cos \alpha$ ile gösterilir.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

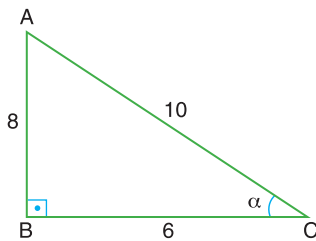
Dik üçgende bir dar açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun komşusundaki dik kenar uzunluğuna oranı o dar açının tanjantını verir. Bir α açısının tanjantı $\tan \alpha$ ile gösterilir.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

Dik üçgende bir dar açının komşusundaki dik kenar uzunluğunun karşısındaki dik kenar uzunluğuna oranı o dar açının kotanjantını verir. Bir α açısının kotanjantı $\cot \alpha$ ile gösterilir.

$$\cot \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{c} \text{ dir.}$$

Örnek



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ dir.
 $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|BC| = 6 \text{ cm}$ ve $|AC| = 10 \text{ cm}$ ise
 α açısına ait trigonometrik oranları yazalım.

Sinüs bağıntısından $\sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Kosinüs bağıntısından $\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

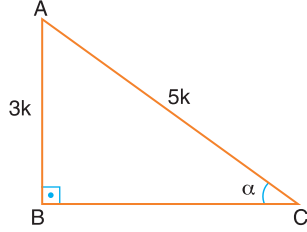
Tanjant bağıntısından $\tan \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Kotanjant bağıntısından $\cot \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ olur.

Örnek

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ olmak üzere $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ise $\tan \alpha$ değerini bulalım.

Soruyu dik üçgen oluşturarak çözelim.



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{ise} \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5}, |AB| = 3k, |AC| = 5k$$

$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ dir.

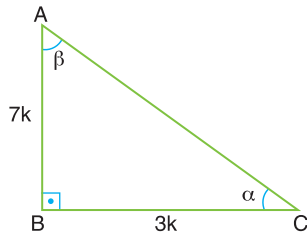
$$\text{Pisagor bağıntısından} \quad |BC|^2 = (5k)^2 - (3k)^2 = 25k^2 - 9k^2 = 16k^2$$

$$|BC| = 4k \quad \text{ise} \quad \tan \alpha = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4} \quad \text{olur.}$$

Örnek

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ olmak üzere $\alpha + \beta = 90^\circ$ dir. $\cot \alpha = \frac{3}{7}$ ise $\sin \beta$ değerini bulalım.

Soruyu dik üçgen oluşturarak çözelim.



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$

$$\cot \alpha = \frac{3}{7} \quad \text{ise} \quad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{3}{7}, \quad |BC| = 3k, |AB| = 7k$$

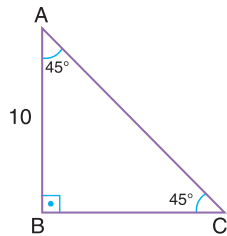
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ dir.

Pisagor bağıntısından

$$|AC|^2 = (7k)^2 + (3k)^2 = 49k^2 + 9k^2 = 58k^2$$

$$|AC| = \sqrt{58}k \quad \text{ise} \quad \sin \beta = \frac{3k}{\sqrt{58}k} = \frac{3\sqrt{58}}{58} \quad \text{olur.}$$

Örnek



ABC ikizkenar dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ dir.

$m(\widehat{A}) = 45^\circ$, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$, $|AB| = 10$ cm ise 45° nin trigonometrik oranlarını bulalım.

$m(\widehat{A}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ise $|BC| = 10$ cm dir.

Pisagor bağıntısından

$$|AC|^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

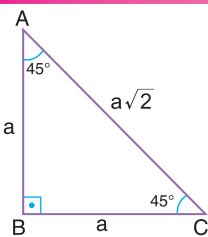
$$|AC| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{10}{10} = 1$$

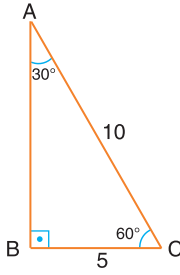
$$\cos 45^\circ = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{olur.}$$



İkizkenar dik üçgende hipotenüs uzunluğu dik kenar uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.

Örnek



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$, $m(\hat{A}) = 30^\circ$ ve $m(\hat{C}) = 60^\circ$ dir.
 $|AC| = 10$ cm, $|BC| = 5$ cm ise 30° ve 60° nin trigonometrik oranlarını yazalım.

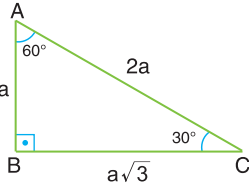
Pisagor teoreminden

$$|AB|^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75, |AB| = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \sin 60^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

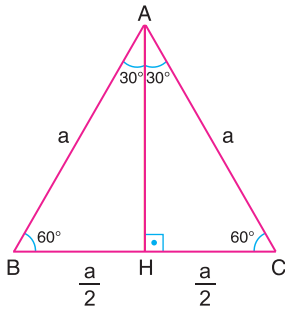
$$\tan 60^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \quad \text{ve} \quad \cot 60^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$



$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ye sahip bir dik üçgende 30° nin karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün kenar uzunluğunun yarısına, 60° nin karşısındaki kenar uzunluğu 30° nin karşısındaki kenar uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir.

Örnek

Eşkenar üçgenin yüksekliğinin uzunluğu ile kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi belirleyelim.



ABC eşkenar üçgen ve $|AC| = |BC| = |AB| = a$ cm olsun.

$[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AH]$ oluşturduk.

ABC eşkenar üçgen olduğundan $|BH| = |HC| = \frac{a}{2}$ cm olur.

Pisagor bağıntısından

$$|AH|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|AH| = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ cm olur.}$$

Bir kenar uzunluğu a br olan eşkenar üçgenin yüksekliği $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ br dir.

Örnek

Bir kenar uzunluğu 8 cm olan eşkenar üçgenin yüksekliğini hesaplayalım.

Bir kenar uzunluğuna a , yüksekliğe h diyelim.

$$h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ olduğundan } h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm bulunur.}$$

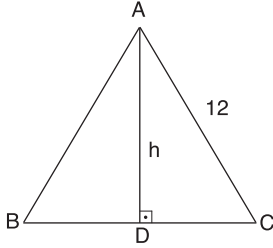
Örnek

Yüksekliği 4 cm olan eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğunu hesaplayalım.

Bir kenar uzunluğuna a , yüksekliğe h diyelim.

$$h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ olduğundan } 4 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

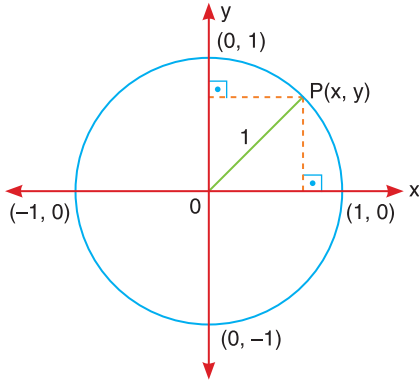


ABC eşkenar üçgen ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre h uzunluğunu bulalım.

Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu 12 cm olduğuna göre

$$h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ den } h = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm olur.}$$

Birim Çember ve Trigonometrik Oranlar

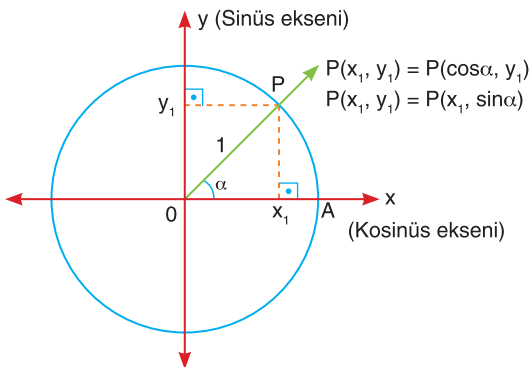


Analistik düzlemde, merkezi başlangıç noktasında ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere "birim (trigonometrik) çember" denir.

Birim çember üzerindeki her $P(x, y)$ noktası için; $x^2 + y^2 = 1$ bağıntısı sağlanır.

Birim çember üzerinde $P(x_1, y_1)$ noktası ile eşlenen açı

$$m(\widehat{AOP}) = \alpha \text{ olsun.}$$



Birim çember üzerindeki P noktasının apsisine α açısının kosinüsü denir.

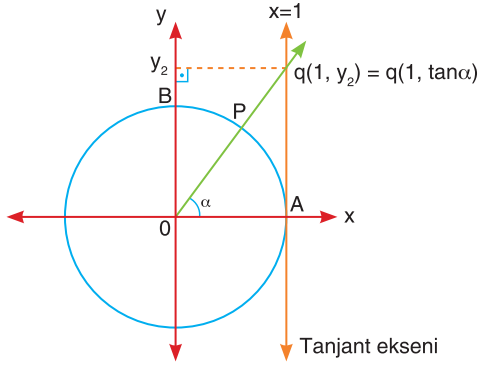
$x_1 = \cos \alpha$ dır. Birim çemberden de görüldüğü gibi $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ dir.

α açısının kosinüsü, $P(x_1, y_1)$ noktasının apsisine eşittir. Buna göre, x eksenine kosinüs eksenini diyebiliriz.

Birim çember üzerindeki P noktasının ordinatına α açısının sinüsü denir. $y_1 = \sin \alpha$ dır. Birim çemberde görüldüğü gibi

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \text{ dir.}$$

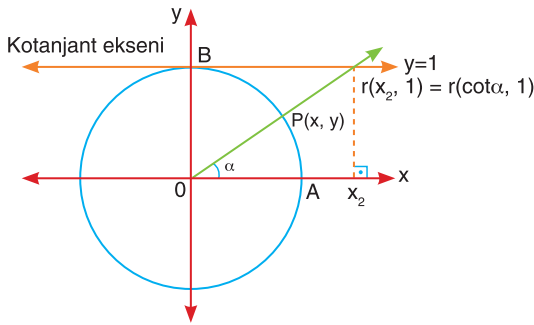
α açısının sinüsü, $P(x_1, y_1)$ noktasının ordinatına eşittir. Buna göre y eksenine sinüs eksenini diyebiliriz.



Birim çember üzerinde $P(x, y)$ noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun.

[OP'nin $x = 1$ doğrusunu kestiği q noktasının ordinatına α açısının tanjantı denir.

α açısının tanjantı $q(1, y_2)$ noktasının ordinatına eşittir. Bu durumda, $x = 1$ doğrusuna tanjant eksenini diyebiliriz.



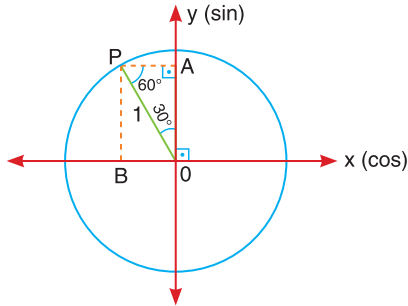
Birim çember üzerinde $P(x, y)$ noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun.

[OP'nin $y = 1$ doğrusunu kestiği r noktasının apsisine α açısının kotanjantı denir.

α açısının kotanjantı, $r(x_2, 1)$ noktasının apsisine eşittir. Bu durumda $y = 1$ doğrusuna kotanjant eksenini diyebiliriz.

Örnek

$\sin 120^\circ$ ve $\cos 120^\circ$ değerlerini bulalım.



$120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$ olduğundan $m(\widehat{POA}) = 30^\circ$

ve $m(\widehat{OPA}) = 60^\circ$ dir.

A noktasının ordinatı açının sinüsünü, B noktasının apsisi açının kosinüsünü verir.

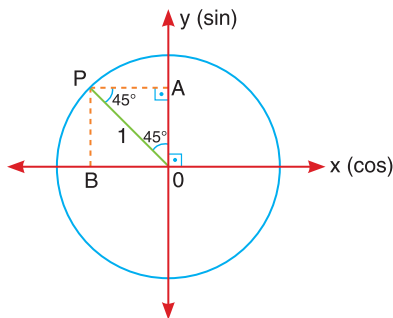
$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninden

$$|OA| = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ$$

$$|OB| = \frac{1}{2} \text{ ve } B = \frac{-1}{2} = \cos 120^\circ \text{ olur.}$$

Örnek

$\sin 135^\circ$ ve $\cos 135^\circ$ değerlerini bulalım.



$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ olduğundan $m(\widehat{POA}) = 45^\circ$

ve $m(\widehat{OPA}) = 45^\circ$ dir.

A noktasının ordinatı açının sinüsünü, B noktasının apsisi açının kosinüsünü verir.

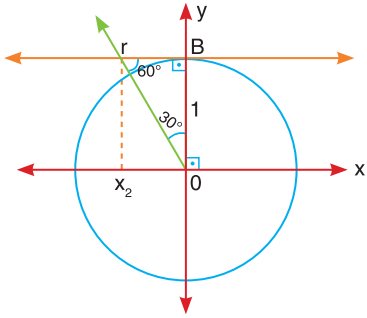
$45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninden

$$|OA| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 135^\circ$$

$$|OB| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ise } B = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos 135^\circ \text{ olur.}$$

Örnek

$\tan 120^\circ$ ve $\cot 120^\circ$ değerlerini bulalım.

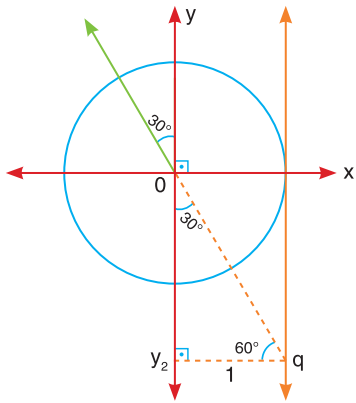


$120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BOr}) = 30^\circ$

$m(\widehat{BrO}) = 60^\circ$ dir.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninden

$$|r_B| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ise} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \cot 120^\circ$$

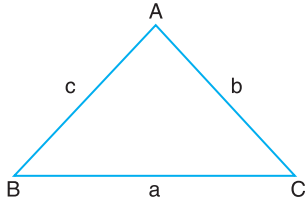


Oq_y_2 dik üçgenindeki y_2 noktası $\tan 120^\circ$ değerini verir.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninden

$$|Oy_2| = \sqrt{3}, \quad y_2 = -\sqrt{3} = \tan 120^\circ \text{ olur.}$$

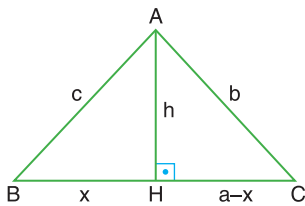
Üçgenlerde Kosinüs Teoremi



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \text{ dir. İspatlayalım.}$$



ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ dir.

$|BH| = x$ alınırsa $|HC| = a - x$ olur.

ABH dik üçgeninde

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2$$

$$c^2 = x^2 + h^2 \text{ ise } h^2 = c^2 - x^2 \dots (1)$$

AHC dik üçgeninde $|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 \text{ ise } h^2 = b^2 - (a - x)^2 \dots (2)$$

(1) ve (2) den

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \dots (3)$$

ABH dik üçgeninde $\cos \widehat{B} = \frac{x}{c}$ ise $x = c \cdot \cos \widehat{B}$ dir. Bu ifadeyi (3) de yerine yazarsak

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$ elde edilir.

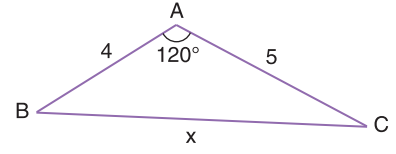
Benzer şekilde

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \text{ olur.}$$

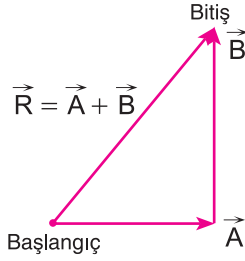
Örnek

Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm
ve $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ dir. $|BC| = x$ uzunluğunu bulalım.
Kosinüs teoremine göre $x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$
 $x^2 = 16 + 25 - 40 \cdot (-0,5)$
 $x^2 = 41 + 20 = 61$ den $x = \sqrt{61}$ cm olur.



Örnek

Fizikte vektörler konusunda da kosinüs teoremi kullanılır.



Örneğin 6 metre doğuya doğru daha sonra 8 metre kuzeye doğru yürüdüğümüzü düşünelim. Son konumumuzu başlangıç noktasına göre belirleyen vektörü ve uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= 6 \text{ m} \\ |\vec{B}| &= 8 \text{ m} \\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \end{aligned}$$

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_0$$

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$$

$$|\vec{R}|^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$|\vec{R}| = 10 \text{ m olur.}$$

Örnek

Yandaki ABC üçgeninde

$|AE| = 6$ cm, $|EC| = 5$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|DB| = 6$ cm ve
 $|DE| = 4$ cm dir.

$|AB| = x$ uzunluğunu bulalım.

EDC üçgenindeki kosinüs teoreminden

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

$$16 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

$$60 \cdot \cos(\widehat{ECD}) = 45$$

$$\cos(\widehat{ECD}) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

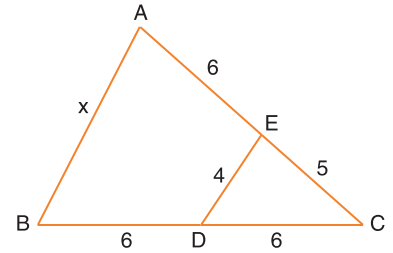
ABC üçgenindeki kosinüs teoreminden

$$x^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

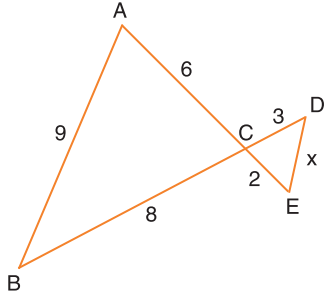
$$x^2 = 121 + 144 - 22 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x^2 = 265 - 198$$

$$x^2 = 67 \text{ den } x = \sqrt{67} \text{ cm olur.}$$



Örnek



Yandaki şekilde $|AC| = 6$ cm, $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 8$ cm
 $|CD| = 3$ cm ve $|CE| = 2$ cm dir. $|DE| = x$ uzunluğunu bulalım.

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE}) = \alpha$ alalım. ABC üçgenindeki kosinüs teoreminden

$$9^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

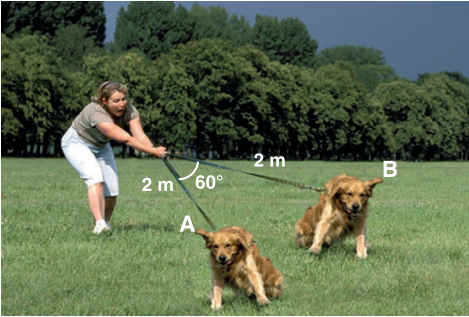
$$81 = 36 + 64 - 96 \cdot \cos \alpha$$

$$96 \cdot \cos \alpha = 19 \text{ ise } \cos \alpha = \frac{19}{96}$$

DCE üçgenindeki kosinüs teoreminden $x^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{19}{96}$

$$x^2 = 13 - \frac{19}{8}, x^2 = \frac{85}{8} \text{ ise } x = \sqrt{\frac{85}{8}} \text{ cm dir.}$$

Örnek



Yandaki model iki köpeği gözdiren bir kişinin konumunu göstermektedir.

Köpeklerin aralarındaki mesafeyi bulalım.

Kosinüs teoremine göre A ve B noktalarında bulunan iki köpeğin arasındaki uzaklık

$$|AB|^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 4 + 4 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

ise $|AB| = 2$ m olur.

Örnek



Bir dağın eteklerindeki en uzak noktalar B ve C dir.

$|BC|$ nu bulmak için $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ olacak şekilde A noktası tespit ediliyor. $|AB| = 20$ km ve $|AC| = 30$ km ise $|BC|$ nu yaklaşık olarak bulalım.

ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım.

$$|BC|^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cos 60^\circ = 400 + 900 - 1200 \cdot \frac{1}{2} = 700$$

$$|BC|^2 = 700$$

$|BC| = \sqrt{700}$ BC uzunluğu yaklaşık olarak 26 km dir.

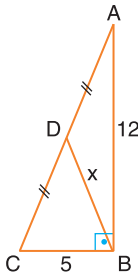
ALİŞTIRMALAR



1. Aşağıdaki ifadelerin doğru olanlarını "✓", yanlış olanlarını "X" işaretiyle belirtiniz.

- a) (...) Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.
- b) (...) $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninde hipotenüs uzunluğu dik kenar uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.
- c) (...) Bir dik üçgende karşı dik kenar uzunluğunun komşu dik kenar uzunluğuna oranı sinüs değerini verir.
- ç) (...) Bir dik üçgende komşu dik kenar uzunluğunun, karşı dik kenar uzunluğuna oranı kotanjant değerini verir.
- d) (...) Birim çemberin çap uzunluğu 1 birimdir.

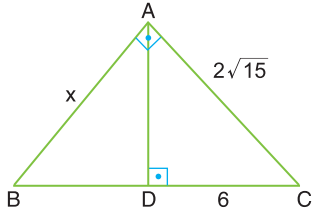
2.



ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $|AD| = |DC|$ dir.

$|AB| = 12 \text{ cm}, |CB| = 5 \text{ cm}$ ise $|BD| = x$ kaç cm tir?

3.



ABC üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ ve $[AD] \perp [BC]$ dir.

$|AC| = 2\sqrt{15} \text{ cm}, |DC| = 6 \text{ cm}$ ise $|AB| = x$ kaçtır?

A) 2

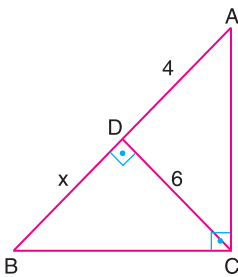
B) $\sqrt{10}$

C) $2\sqrt{10}$

D) $4\sqrt{10}$

E) $6\sqrt{10}$

4.



ABC üçgeninde $[AC] \perp [BC]$ ve $[DC] \perp [AB]$ dir.

$|AD| = 4 \text{ cm}, |DC| = 6 \text{ cm}$ ise $|BD| = x$ kaçtır?

A) 3

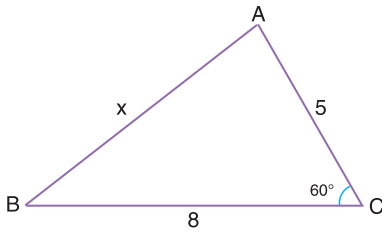
B) 4

C) 5

D) 6

E) 9

5.



ABC üçgeninde $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ, |AC| = 5 \text{ cm}$

$|BC| = 8 \text{ cm}$ dir. $|AB| = x$ kaç cm dir?

A) 7

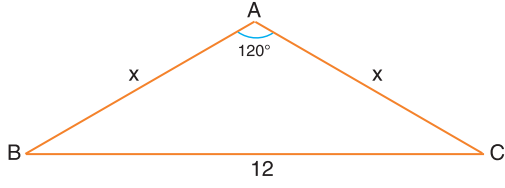
B) 6

C) 5

D) 4

E) 3

6.



ABC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ ve $|BC| = 12$ cm dir. $|AC| = |AB| = x$ uzunluğunu bulunuz.

7. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ olmak üzere $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ ise $\cot \alpha$ kaçtır?

A) $4\sqrt{3}$

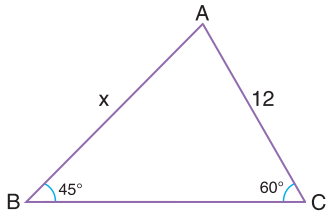
B) $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

C) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

D) $\frac{5\sqrt{11}}{11}$

E) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

8.



ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$, $m(\widehat{BCA}) = 60^\circ$ ve $|AC| = 12$ cm dir. $|AB| = x$ kaç santimetredir?

A) $12\sqrt{3}$

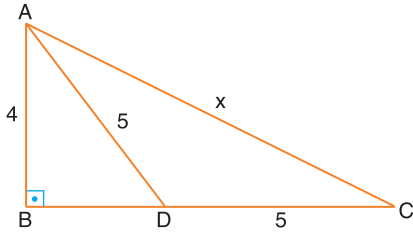
B) $4\sqrt{3}$

C) $4\sqrt{6}$

D) $6\sqrt{3}$

E) $6\sqrt{6}$

9.



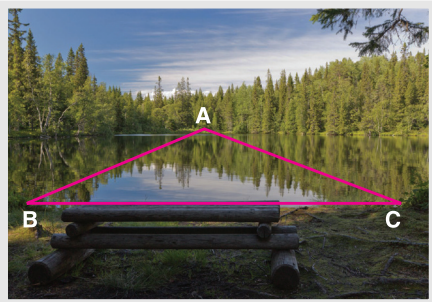
ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ dir.
 $|AB| = 4$ cm, $|AD| = |DC| = 5$ cm ise $|AC|$ nu bulunuz.

10.



Yanda görülen tahta ikizkenar üçgensel şeklin tepe açısı 120° dir. Eşit olan kenarlardan birinin uzunluğu 3 m olduğuna göre şeklin tabanının uzunluğunu bulunuz.

11.



Bir gölün en geniş bölümünün uzunluğunu ölçmek için $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ olacak şekilde yandaki model oluşturuluyor. $|AB| = 400$ m, $|AC| = 300$ m olduğuna göre BC uzunluğu yaklaşık kaç metredir?

9.4.5 Üçgenin Alanı

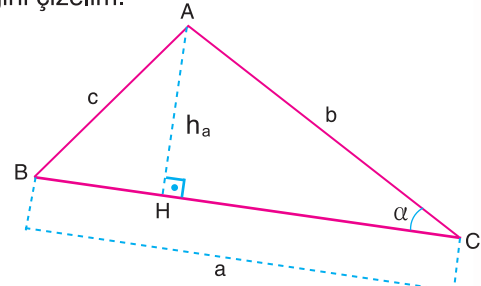
Kenar uzunlukları a , b ve c olan \widehat{ABC} ni ve $[AH]$ yüksekliğini çizelim.

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$ bağıntısını gösterelim. \widehat{AHC} de;

$$\sin \alpha = \frac{|AH|}{|AC|} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \sin \alpha$$

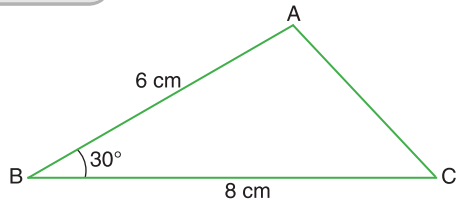
$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2}$ eşitliğinde $h_a = b \cdot \sin \alpha$ yi kullanırsak,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \text{ eşitliği elde edilir.}$$



İki kenarının uzunluğu a ve b , bu kenarlar arasındaki açısı α olan üçgenin alanı $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$ şeklindedir. Buna "trigonometrik alan bağıntısı" denir.

Örnek



Yukarıda verilen üçgenin alanını hesaplayalım.

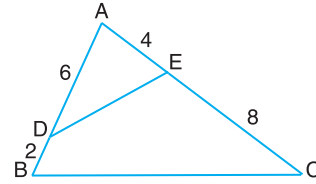
Trigonometrik alan bağıntısını kullanırsak

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ \quad \left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right)$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$A(\widehat{ABC}) = 12 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

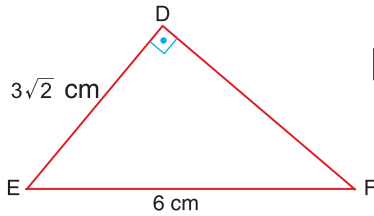
Örnek



Yukarıdaki verilere göre $\frac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{ABC})}$ nin sonucunu hesaplayalım.

$$\frac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin \widehat{A}}{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek



$|DE| = |DF|$, $m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olduğuna göre $A(\widehat{DEF})$ ni hesaplayalım.

$m(\widehat{D}) = 90^\circ$ ve $|DE| = |DF|$ olduğundan

$m(\widehat{E}) = m(\widehat{F}) = 45^\circ$ olmak zorundadır.

$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ \quad \left(\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A(\widehat{DEF}) = 9 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Başka bir yoldan;

$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin 90^\circ$$

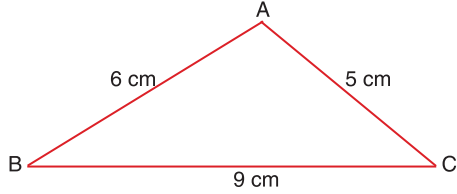
$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \quad (\sin 90^\circ = 1)$$

$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2$$

$$A(\widehat{DEF}) = 9 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Üç kenarının uzunluğu verilen üçgenlerin alanı $u = \frac{\text{Çevre}(\widehat{ABC})}{2}$ olmak üzere $A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$ şeklinde hesaplanır.

Örnek



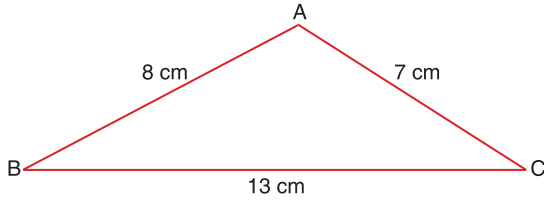
Yandaki verilere göre $A(\widehat{ABC})$ ni hesaplayalım.

$$u = \frac{5+6+9}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ dur.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)} = \sqrt{10 \cdot (10-9) \cdot (10-5) \cdot (10-6)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4} \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 10\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek



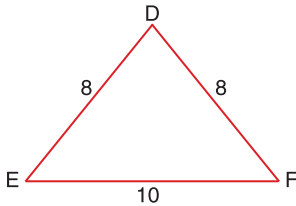
Yandaki verilere göre $A(\widehat{ABC})$ ni hesaplayalım.

$$u = \frac{8+7+13}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ tür.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)} = \sqrt{14 \cdot (14-13) \cdot (14-7) \cdot (14-8)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{14 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6} \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

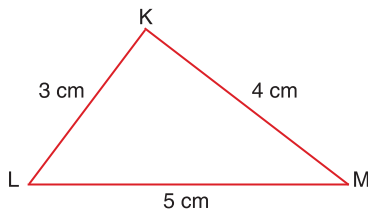


Yandaki verilere göre $A(\widehat{DEF})$ ni hesaplayalım.

$$u = \frac{10+8+8}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ tür.}$$

$$A(\widehat{DEF}) = \sqrt{13 \cdot (13-10) \cdot (13-8) \cdot (13-8)} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} \Rightarrow A(\widehat{DEF}) = 5\sqrt{39} \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

Örnek

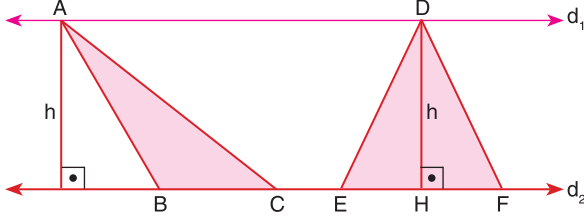


Yandaki verilere göre $A(\widehat{KLM})$ 'ni hesaplayalım.

$$u = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ dir.}$$

$$A(\widehat{KLM}) = \sqrt{6 \cdot (6-5) \cdot (6-4) \cdot (6-3)} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \Rightarrow A(\widehat{KLM}) = 6 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

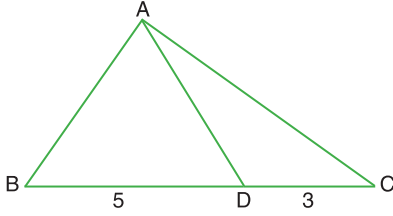
Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı, yüksekliklerin ait olduğu tabanların oranına eşittir. Benzer şekilde aynı tabana sahip üçgenlerin alanlarının oranı yüksekliklerinin oranına eşittir.



$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{|BC|}{|EF|} \text{ olur.}$$

Örnek

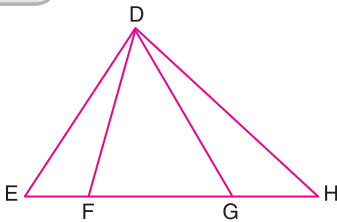


Yandaki verilere göre $\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ABC})}$ ni hesaplayalım.

\widehat{ABD} ve \widehat{ABC} aynı yüksekliğe sahiptir.

$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h} = \frac{5}{8} \text{ olur. Buradan } \frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{5}{8} \text{ olur.}$$

Örnek



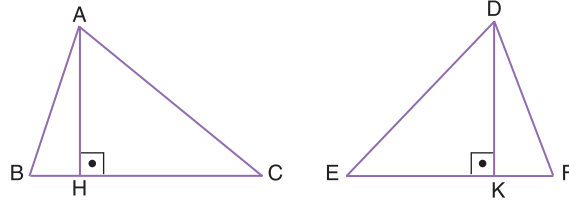
$|EF| = |GH| = \frac{|FG|}{3}$ veriliyor. Buna göre $\frac{A(\widehat{DFG})}{A(\widehat{DEH})}$ oranını hesaplayalım.

$|FG| = 3x$ olursa $|EF| = |GH| = x$ olur.

$$\frac{A(\widehat{DFG})}{A(\widehat{DEH})} = \frac{|FG|}{|EH|} \text{ olacağından}$$

$$\frac{A(\widehat{DFG})}{A(\widehat{DEH})} = \frac{3x}{5x} \Rightarrow \frac{A(\widehat{DFG})}{A(\widehat{DEH})} = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek

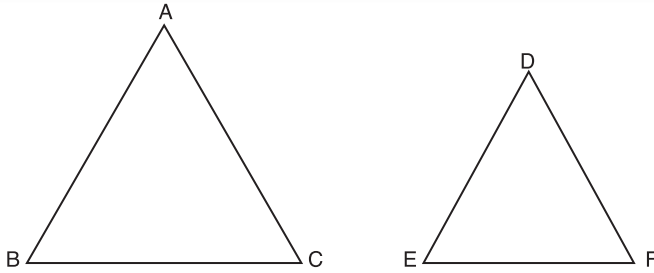


$$|BC| = |EF| = 8 \text{ cm}, |AH| = 6 \text{ cm},$$

$|DK| = 7 \text{ cm}$ ise $\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})}$ oranını hesaplayalım.

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6}{7} \text{ olur. } \frac{|AH|}{|DK|} = \frac{6}{7} \text{ olduğuna göre } \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{|AH|}{|DK|} \text{ oranı yazılabilir.}$$

Benzer iki üçgenin alanları oranı bu iki üçgenin benzerlik oranının karesine eşittir.



Benzer iki üçgenin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve bu iki üçgen arasındaki benzerlik oranı k ise,

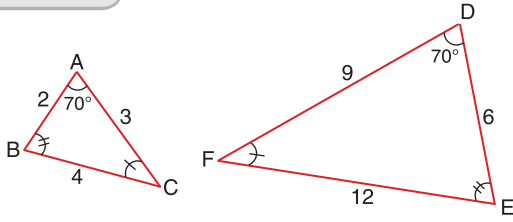
$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2 \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ise } \widehat{A} \cong \widehat{D}, \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \text{ dir. Buradan}$$

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{A}}{\frac{1}{2}|DE| \cdot |DF| \cdot \sin \widehat{D}} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|AC|}{|DF|} = k \cdot k = k^2 \text{ elde edilir.}$$

Örnek



Yandaki üçgenlerin benzerlik oranını bulalım ve alanlarının oranını karşılaştıralım.

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ dir. } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 70^\circ}{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin 70^\circ} = \frac{1}{9} \text{ olur.} \quad \text{Buradan } \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = k^2 \text{ olur.}$$

Örnek

Benzerlik oranı $\frac{3}{5}$ olan iki benzer üçgenin alanlarının oranını hesaplayalım.

Alanlar oranı = (Benzerlik Oranı)² olduğundan

$$\text{Alanlar oranı} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \text{Alanlar oranı} = \frac{9}{25} \text{ olur.}$$

Örnek

Benzer iki üçgenin benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olduğuna göre küçük üçgenin alanı 15 br^2 ise büyük üçgenin alanını hesaplayalım.

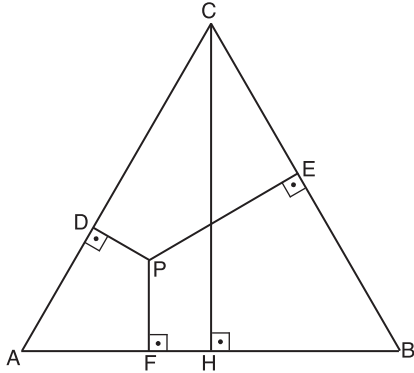
$$\frac{\text{Küçük üçgenin alanı}}{\text{Büyük üçgenin alanı}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \frac{15}{x} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 135 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$



Microsoft Mathematics uygulamasını açınız.

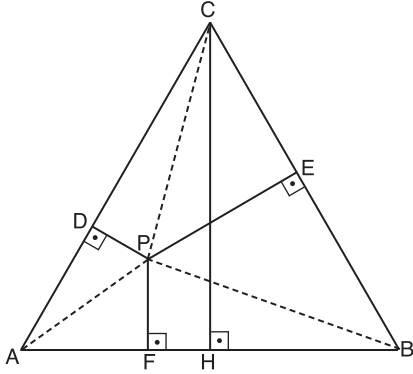
1. Üçgen çizme butonuna tıklayınız.
 2. Yeni açılan penceredeki kenarlar veya açılar bölümüne uygun verileri yazınız.
 3. Göster kısmındaki "v" sembolünü tıklayarak yükseklikler ve alanı seçiniz.
- Belirlediğiniz üçgenin alanını bulmuş oldunuz.

Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı yüksekliğin uzunluğuna eşittir.



ABC eşkenar üçgen, P noktası üçgenin iç bölgesinde bir nokta ve $[CH]$ AB kenarına ait yükseklik olmak üzere

$$|PD| + |PE| + |PF| = |CH| \text{ olduğunu gösterelim.}$$



$$|CH| = k \text{ ve } |AB| = |AC| = |BC| = a \text{ olsun.}$$

P noktasını A, B ve C noktaları ile birleştirdiğimizde ABC üçgeninin iç bölgesinde üç farklı üçgen oluşur.

$$A(\widehat{PAC}) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |PD|, A(\widehat{PCB}) = \frac{1}{2}|BC| \cdot |PE| \text{ ve } A(\widehat{PAB}) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |PF| \text{ dir.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{PAC}) + A(\widehat{PCB}) + A(\widehat{PAB}) \text{ için}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}|AC| \cdot |PD| + \frac{1}{2}|BC| \cdot |PE| + \frac{1}{2}|AB| \cdot |PF|$$

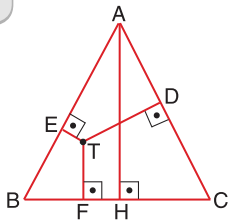
$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot |PD| + \frac{1}{2}a \cdot |PE| + \frac{1}{2}a \cdot |PF|$$

$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a(|PD| + |PE| + |PF|) \text{ Eşitliğin her iki tarafını } \frac{1}{2} \cdot a \text{ ya böldüğümüzde}$$

$$h = |PD| + |PE| + |PF|,$$

$$|CH| = |PD| + |PE| + |PF| \text{ olur.}$$

Örnek



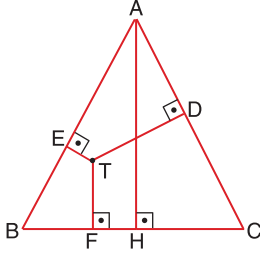
ABC eşkenar üçgen, $|TD| = 4br$, $|TF| = 3br$,

$|TE| = 2br$ ise $|AH|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$|AH| = |TD| + |TF| + |TE|$ olduğundan

$$|AH| = 4 + 3 + 2 \Rightarrow |AH| = 9br \text{ olur.}$$

Örnek



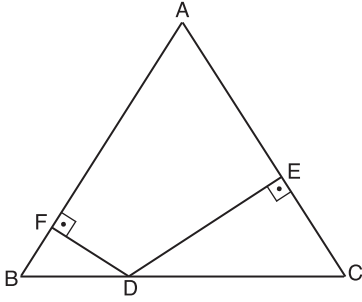
ABC eşkenar üçgen, $|TD| = 6$ br, $|TE| = 4$ br,
 $|TF| = 5$ br olduğuna göre $|AC|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|AH| = 4 + 5 + 6 \Rightarrow |AH| = 15 \text{ br olur.}$$

Eşkenar üçgende bir kenar uzunluğunun $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katı yüksekliğin uzunluğunu verir. Dolayısıyla

$$|AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \Rightarrow |AC| = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow |AC| = 10\sqrt{3} \text{ br olur.}$$

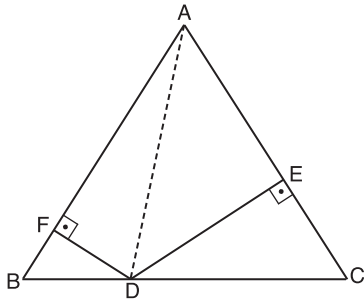
İkizkenar üçgenin tabanında alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin toplamı üçgenin eş olan kenarlarına ait yüksekliğin uzunluğuna eşittir.



Bir ikizkenar üçgende taban üzerinde alınan herhangi bir noktadan diğer kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı eş kenarlara ait yüksekliğin uzunluğuna eşittir.

Yanda ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve

$D \in [BC]$ olmak üzere $|DE| + |DF| = h_b = h_c$ olduğunu gösterelim.



$|AB| = |AC| = a$, AB kenarına ait yükseklik h_c AC kenarına ait yükseklik h_b dir.

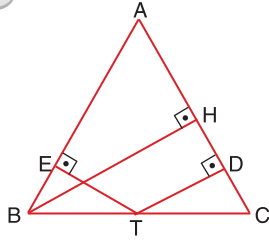
A ile D noktalarını birleştirerek ABD ve ADC üçgenlerini oluşturalım. ABD ve ADC üçgenlerinin alanlarının toplamı ABC üçgeninin alanına eşit olduğundan,

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{ADC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |DF| + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |DE|$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |DF| + |DE| \Rightarrow h_b = |DF| + |DE| \text{ elde edilir.}$$

Buradan $|DF| + |DE| = h_b = h_c$ dir.

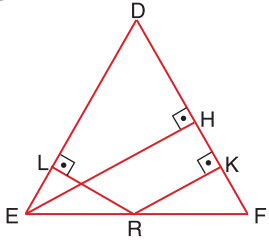
Örnek



$|AB| = |AC|$, $|TE| = 4$, $|BH| = 11$ ise $|TD|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|BH| = |TE| + |TD| \Rightarrow 11 = 4 + |TD| \Rightarrow |TD| = 7 \text{ dir.}$$

Örnek

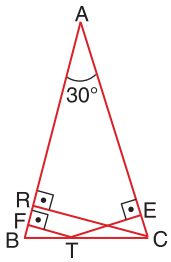


$|DE| = |DF|$, $|RK| = 2 \cdot |RL|$, $|EH| = 18$ olduğuna göre $|RL|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|RL| = x \text{ dersek } |RK| = 2x \text{ olur.}$$

$$|EH| = |RL| + |RK| \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = |RL| = 6 \text{ dir.}$$

Örnek



$|AB| = |AC|$, $|TF| = 2$, $|TE| = 5$ olduğuna göre $|AC|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|CR| = |TF| + |TE| \Rightarrow |CR| = 2 + 5 \Rightarrow |CR| = 7 \text{ dir.}$$

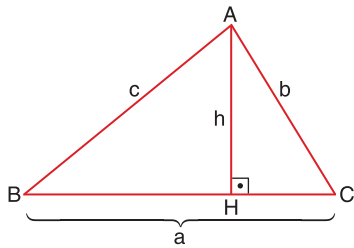
$|CR|$, 30° lik açının karşısında olduğundan hipotenüsün yani $|AC|$ nın yarısına eşittir.

$$\text{Dolayısıyla } \frac{|AC|}{2} = |CR| = 7 \Rightarrow |AC| = 2 \cdot 7 \Rightarrow |AC| = 14 \text{ olur.}$$

Sinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninde $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ dir. Buna üçgende sinüs teoremi denir.

İspatı üçgenin alan formülü yardımıyla yapalım.



AHB dik üçgeninde $\sin \hat{B} = \frac{h}{c}$ dir.

$$h = c \cdot \sin \hat{B} \text{ olur.}$$

ABC üçgeninin alanı,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h}{2} \text{ dir. } h \text{ yerine yukarıdaki karşılığını yazarsak,}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot c \cdot \sin \hat{B}}{2} \text{ olur.}$$

AHC dik üçgeninde $\sin \hat{C} = \frac{h}{b}$ dir.

$$h = b \cdot \sin \hat{C} \text{ olur.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2} \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde b veya c kenarına çizeceğimiz bir dikme ile alan,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{2} \text{ olur.}$$

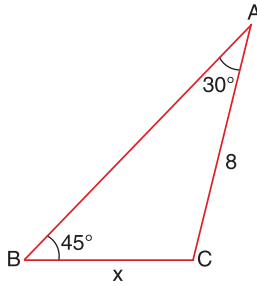
Bu durumda alan,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}}{2} \text{ olur.}$$

Yukarıdaki eşitlikleri 2 ile çarpıp, $a \cdot b \cdot c$ çarpımına böler ve ters çevirirsek,

$$\begin{aligned} \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}}{2} &\Rightarrow b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} = a \cdot c \cdot \sin \widehat{B} = a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} \\ &\Rightarrow \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}}{a \cdot b \cdot c} \\ &\Rightarrow \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} \\ &\Rightarrow \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \text{ sonucuna ulaşırız.} \end{aligned}$$

Örnek



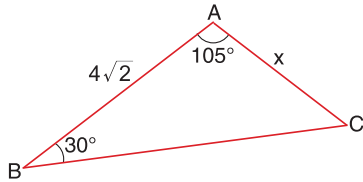
Şekildeki verilere göre x i bulalım.

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} \Rightarrow \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$x = 4\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

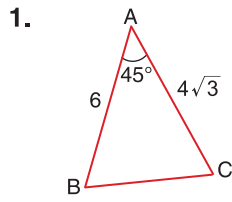


Yandaki verilere göre $|AC| = x$ uzunluğunu hesaplayalım.

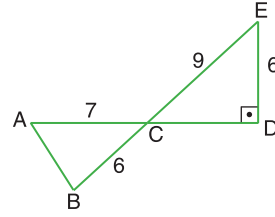
Üçgenin iç açılarının toplamı 180° olduğundan, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ olur.

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.}$$

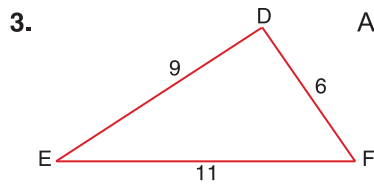
ALİŞTIRMALAR



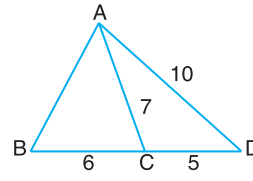
$A(\widehat{ABC})$ yi bulunuz. 2.



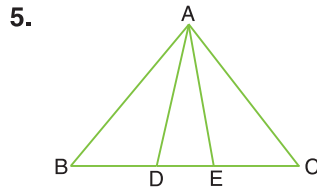
$A(\widehat{ABC})$ yi bulunuz.



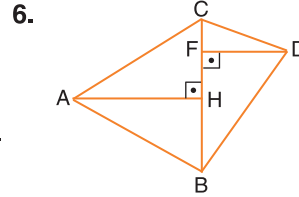
$A(\widehat{DEF})$ yi bulunuz. 4.



$A(\widehat{ABC})$ yi bulunuz.



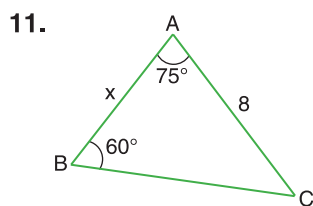
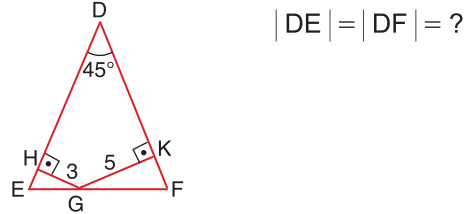
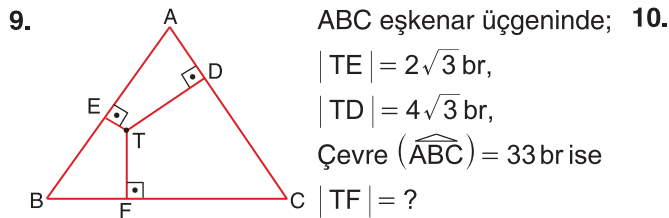
$|DE| = |EC| = \frac{|BD|}{2}$
ise $\frac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{ABC})}$ yi bulunuz.



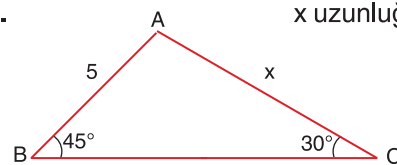
$|BC| = 5$ cm,
 $A(\widehat{ABC}) = 15$ cm²,
 $A(\widehat{BCD}) = 10$ cm² ise
 $\frac{|FD|}{|AH|}$ oranını bulunuz.

7. Alanlarının oranı 32 olan iki üçgenin benzerlik oranı kaçtır?

8. Benzer iki üçgenin alanları oranı $\frac{9}{16}$ dir. Büyük üçgenin çevresi 64 cm olduğuna göre küçük üçgenin çevresi kaç cm dir?



x uzunluğunu bulunuz. 12.



x uzunluğunu bulunuz.

9.5.1 Vektör Kavramı ve Vektörlerle İşlemler

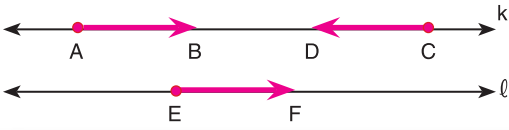


A noktasından başlayıp B noktasında biten doğru parçasına yönlü doğru parçası denir. \vec{AB} şeklinde gösterilir.

d, yönlü doğru parçasının taşıyıcı doğrusudur. \vec{AB} yönlü doğru parçasının yönü A dan B ye doğrudur. \vec{AB} yönlü doğru parçasının uzunluğu $|\vec{AB}|$ şeklinde gösterilir.

Taşıyıcıları aynı veya paralel olan yönlü doğru parçalarına "paralel yönlü doğru parçaları" denir.

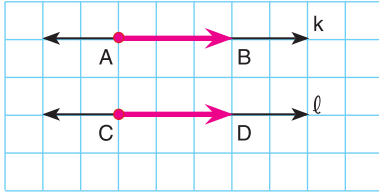
Örnek



$k//l$ olduğuna göre \vec{AB} , \vec{CD} ve \vec{EF} paralel yönlü doğru parçalarıdır.

Yönleri ve doğrultuları aynı, uzunlukları sıfırdan farklı ve eşit olan yönlü doğru parçalarına "eş yönlü doğru parçaları" denir.

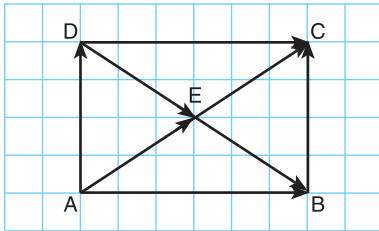
Örnek



$k//l$ olduğuna göre ve $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ olduğundan \vec{AB} ve \vec{CD} eş yönlü doğru parçalarıdır.

Örnek

Aşağıdaki dikdörtgende birbirine eş olan yönlü doğru parçalarını inceleyelim.

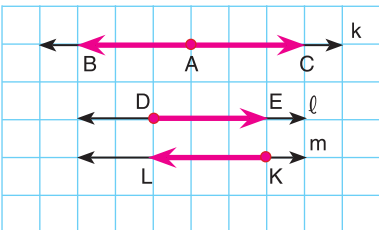


\vec{AB} ile \vec{DC} ,
 \vec{AD} ile \vec{BC} ,
 \vec{AE} ile \vec{EC} ,
 \vec{DE} ile \vec{EB} eş yönlü doğru parçalarıdır.

Yönleri zıt, taşıyıcıları aynı veya paralel olan yönlü doğru parçalarına "zıt yönlü doğru parçaları" denir.

Örnek

Aşağıdaki zıt yönlü doğru parçalarını inceleyelim.

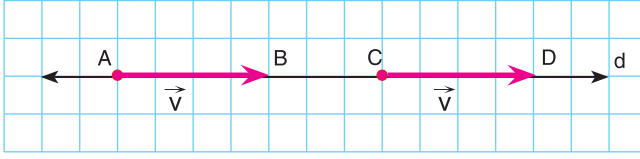


k doğrusu üzerindeki \vec{AB} ve \vec{AC} zıt yönlü doğru parçalarıdır. $\vec{AB} = -\vec{AC}$ şeklinde gösterilir.

$l//m$ olmak üzere \vec{DE} ve \vec{KL} zıt yönlü doğru parçalarıdır.

$\vec{DE} = -\vec{KL}$ şeklinde gösterilir.

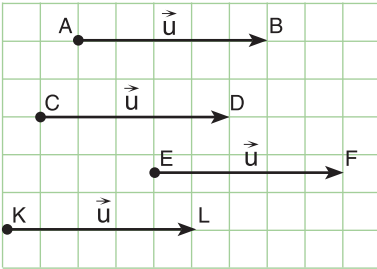
Yönü ve uzunluğu belli olan büyüklükleri belirtmekte kullanılan yönlü doğru parçalarına vektör denir.



Yanda verilen \vec{AB} ve \vec{CD} eş yönlü doğru parçalarının her ikisi de \vec{v} vektörü ile temsil edilir.

$\vec{v} = \vec{AB} = \vec{CD}$ dir. \vec{AB} vektörü yerine \vec{CD} ya da \vec{CD} vektörü yerine de \vec{AB} vektörü kullanılabilir.

Örnek



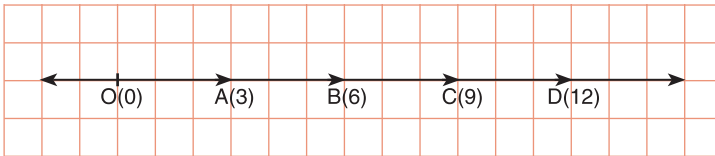
Yandaki şekilde her bir doğru parçasının uzunluğu, doğrultusu ve yönü eşittir. Hepsini kullanmak yerine tamamını temsilen \vec{u} vektörünü yazmak yeterlidir.

Başlangıç noktası koordinat doğrusunda 0 (sıfır) olan bir vektöre “konum (yer) vektörü” adı verilir.



Yandaki şekilde \vec{OA} vektörü A noktasının konum vektörüdür. O ve A noktalarının yanında parantezle verilen sayılara vektörün bileşenleri denir.

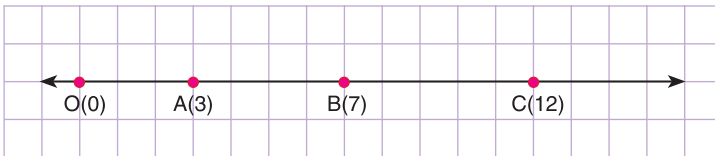
Örnek



Yandaki şekilde \vec{OA} vektörü \vec{AB} , \vec{BC} ve \vec{CD} vektörlerinin yer vektörü olarak yazılır.

Bir vektörün bitim noktası bileşeninden başlangıç noktası bileşeninin mutlak değer içerisindeki farkına o vektörün “uzunluğu” adı verilir.

Örnek



Yanda bileşenleri verilen bazı vektörlerin uzunluklarını hesaplayalım.

\vec{OA} vektörünün uzunluğu $|\vec{OA}| = |3 - 0| = 3$ tür.

\vec{AB} vektörünün uzunluğu $|\vec{AB}| = |7 - 3| = 4$ tür.

\vec{AC} vektörünün uzunluğu $|\vec{AC}| = |12 - 3| = 9$ dur.

\vec{BC} vektörünün uzunluğu $|\vec{BC}| = |12 - 7| = 5$ tir.

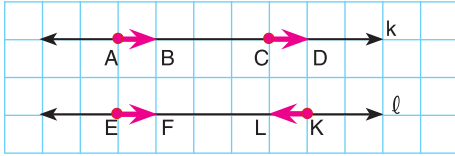
Başlangıç ve bitim noktası aynı olan vektörlere “sıfır vektörü” denir ve $\vec{0}$ şeklinde gösterilir. Sıfır vektörünün doğrultusu ve yönü belirsiz, uzunluğu ise sıfırdır.

Örnek

Başlangıcı ve bitişi A olan vektöre \vec{AA} vektörü denir.
 $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots = \vec{0}$ şeklinde ifade edilir.

Uzunluğu 1 birim olan vektöre “birim vektör” adı verilir. Verilen iki vektörün uzunluğu 1 birim, yönleri aynı ise aynı yönlü birim vektörler, zıt yönlü ise zıt yönlü birim vektörler olarak adlandırılır.

Örnek

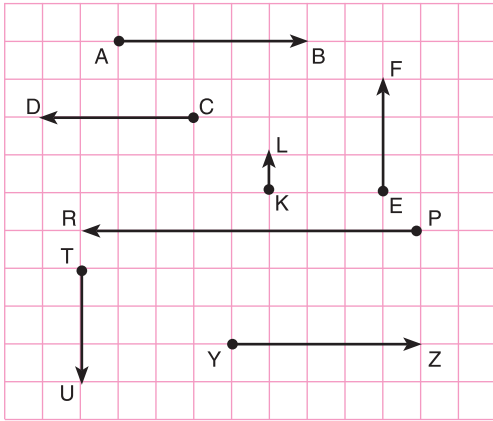


k ve l doğruları üzerindeki vektörleri inceleyelim.

k doğrusu üzerindeki \vec{AB} ve \vec{CD} vektörleri aynı yönlü birim vektörler, l doğrusu üzerindeki \vec{EF} ve \vec{KL} vektörleri zıt yönlü birim vektörlerdir.

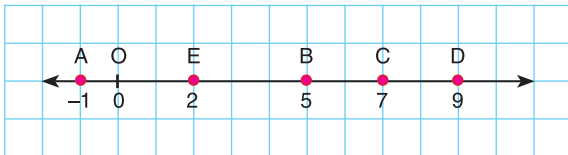
Örnek

Aşağıdaki vektörleri inceleyelim.



\vec{AB} , \vec{CD} , \vec{PR} ve \vec{YZ} vektörlerinin doğrultuları aynıdır.
 \vec{EF} , \vec{KL} ve \vec{TU} vektörlerinin doğrultuları aynıdır. \vec{EF} ve \vec{KL} eş yönlü \vec{TU} ise zıt yönlüdür.
 \vec{AB} ve \vec{YZ} vektörlerinin doğrultu ve yönleri aynı, uzunlukları eşittir.
 \vec{PR} ve \vec{CD} vektörlerinin doğrultu ve yönleri aynıdır.
 \vec{KL} vektörü birim vektördür.

Örnek



Bileşenleri verilen bazı vektörlerin uzunluklarını hesaplayalım.

$$|\vec{OA}| = |-1 - 0| = 1, \quad |\vec{EO}| = |0 - 2| = 2, \quad |\vec{EC}| = |7 - 2| = 5, \quad |\vec{DE}| = |2 - 9| = 7$$

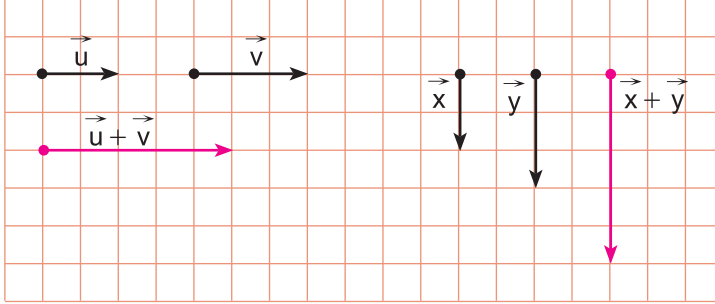
$$|\vec{AD}| = |9 - (-1)| = 10, \quad |\vec{AB}| = |5 - (-1)| = 6, \quad |\vec{OC}| = |7 - 0| = 7, \quad |\vec{BD}| = |9 - 5| = 4 \text{ olur.}$$

Vektörlerde Toplama İşlemi

İki vektörden birinin başlangıç noktası diğer vektörün bitiş noktası ile çakıştırılıyor. İkinci vektörün başlangıç noktasını birinci vektörün bitiş noktasına birleştiren vektöre bu iki vektörün toplamı denir.

Düzlemde \vec{AB} ve \vec{CD} gibi iki vektör alalım. Bu vektörlerin toplamı $\vec{AB} + \vec{CD}$ şeklinde gösterilir.

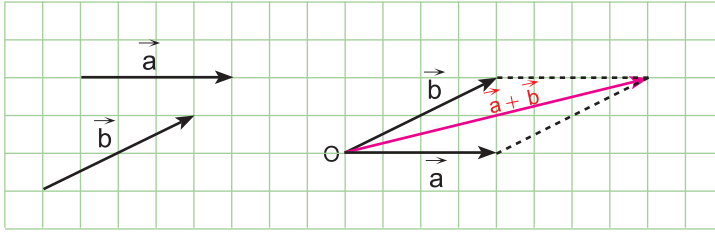
Örnek



Yandaki \vec{u} ve \vec{v} vektörlerinin toplamı $\vec{u} + \vec{v}$, \vec{x} ve \vec{y} vektörlerinin toplamı ise $\vec{x} + \vec{y}$ vektörüdür.

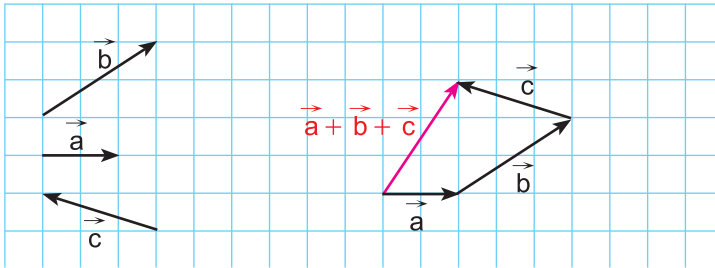
Vektörlerde toplama işlemi geometrik olarak iki şekilde gösterilebilir.

1. Paralelkenar Yöntemi



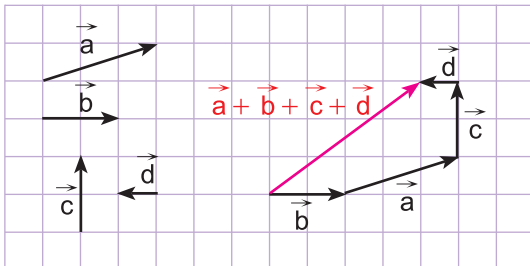
Başlangıçları O noktasında olan \vec{a} ve \vec{b} vektörleri çizilir. Çizilen iki kenar paralelkenara tamamlanır. O noktasını karşı köşeye birleştiren vektör $\vec{a} + \vec{b}$ vektörünü oluşturur.

2. Çokgen (uç uca ekleme) Yöntemi

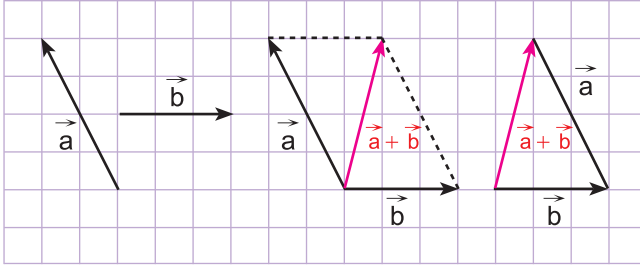


Vektörler birinin bitim noktası diğerinin başlangıç noktasına gelecek şekilde uç uca eklenir. En başa gelen vektörün başlangıç noktası ile en sona gelen vektörün bitim noktası birleştirilir. Bu vektör $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektörünü oluşturur.

Örnek

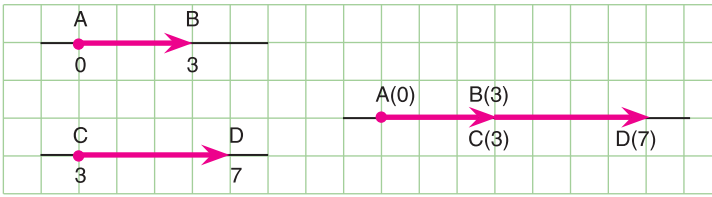


Örnek



Vektörleri toplarken sıra önemli değildir. Örneğin, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ veya $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$ dir.

Örnek



Yanda verilen \vec{AB} ve \vec{CD} vektörlerinin toplamını cebirsel olarak ifade edelim.

B ve C noktalarının bileşenleri aynı sayı olduğundan \vec{AB} ve \vec{CD} vektörlerini uç uca eklersek toplam vektörünü \vec{AD} vektörü olarak ifade etmiş oluruz.

$$|\vec{AB}| = |3 - 0| = 3 \text{ birim,}$$

$$|\vec{CD}| = |7 - 3| = 4 \text{ birim,}$$

$$|\vec{AB}| + |\vec{CD}| = |\vec{AD}| = |7 - 0| = 7 \text{ birim bulunur.}$$

3. Bileşenleri Toplama Yöntemi

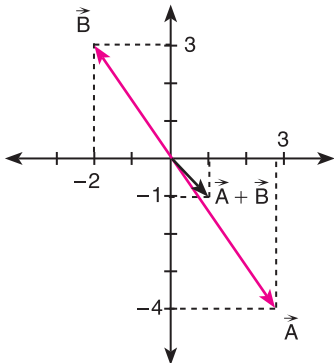
$\vec{A} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2)$ ise \vec{A} ile \vec{B} nün toplamı

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ biçiminde bulunur. Buna bileşenlerini toplama yöntemi denir.

Örnek

$\vec{A} = (3, -4)$ ve $\vec{B} = (-2, 3)$ olduğuna göre $\vec{A} + \vec{B}$ nü bulalım.

$\vec{A} + \vec{B} = (3, -4) + (-2, 3) = (3 - 2, -4 + 3) = (1, -1)$ olur.



Örnek

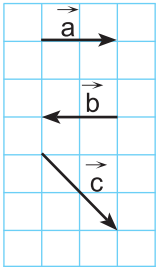
$\vec{A} = (-7, 11)$ ve $\vec{B}(5, -6)$ olduğuna göre $\vec{A} + \vec{B}$ nü bulalım.

$\vec{A} + \vec{B} = (-7, 11) + (5, -6) = (-7 + 5, 11 - 6) = (-2, 5)$ olur.

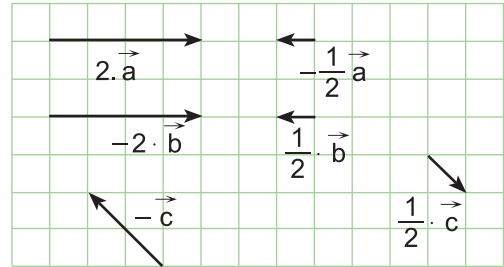
Bir Vektörün Bir Gerçek Sayı ile Çarpımı

Herhangi bir \vec{a} vektörünün $k \in \mathbb{R}$ gerçekte sayı ile çarpılması $k \cdot \vec{a}$ şeklinde ifade edilir. k gerçekte sayı pozitif ise yön değişmez, k gerçekte sayı negatif ise yön tersine çevrilir.

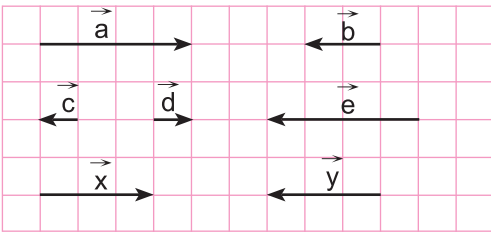
Örnek



Yanda verilen vektörleri kullanarak $2 \cdot \vec{a}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$, $-2\vec{b}$, $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$, $-\vec{c}$ ve $\frac{1}{2} \cdot \vec{c}$ vektörlerini gösterelim.



Örnek

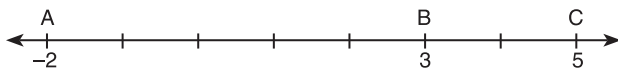


\vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} , \vec{x} ve \vec{y} vektörlerini \vec{a} vektörü cinsinden belirtelim.

$$\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}, \quad \vec{c} = -\frac{1}{4} \cdot \vec{a}, \quad \vec{x} = \frac{3}{4} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{d} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}, \quad \vec{e} = -\vec{a}, \quad \vec{y} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{a}$$

Örnek



$A(-2)$, $B(3)$ ve $C(5)$ noktaları veriliyor. $2 \cdot \vec{AB} + 3 \cdot \vec{BC}$ vektörünün uzunluğunu hesaplayalım.

$$|\vec{AB}| = |3 - (-2)| = 5 \text{ br} \quad |\vec{BC}| = |5 - 3| = 2 \text{ br}$$

$$2 \cdot |\vec{AB}| = 2 \cdot 5 = 10 \text{ br} \quad 3 \cdot |\vec{BC}| = 3 \cdot 2 = 6 \text{ br}$$

$$2 \cdot |\vec{AB}| + 3 \cdot |\vec{BC}| = 10 + 6 = 16 \text{ br bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR



1. Aşağıdaki ifadelerin önüne doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazınız.

- a) (...) \vec{AB} ile \vec{BA} vektörlerinin yönü aynıdır.
 b) (...) $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$
 c) (...) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ise \vec{a} ile \vec{b} vektörleri aynı vektörlerdir.
 ç) (...) Birim vektör 1 birim uzunluğundadır.

2. A(-4) ve B(2) noktaları veriliyor. Buna göre $|\vec{AB}|$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -6 B) -4 C) 2 D) 6 E) 8

3. A(2) ve B(x+3) noktaları veriliyor. $|\vec{AB}| = 9$ ise x kaçtır?

4. Sayı doğrusunda verilenlere göre $|\vec{OA}| + |\vec{OB}|$ uzunluğunu hesaplayınız.

5. Aşağıdakilerden hangisi bir nokta belirtir?

- A) \vec{AB} B) \vec{BC} C) \vec{CD} D) \vec{DE} E) \vec{EE}

6. A(7) ve B(x) noktaları veriliyor. \vec{AB} birim vektör olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

7. Sayı doğrusunda verilenlere göre $|\vec{AB}| = |\vec{CD}| = 3$, $|\vec{BC}|$ olduğuna göre $x \cdot y = ?$

8. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ toplamının eşitini bulunuz.

9. Yandaki vektörlerden hangi ikisinin toplamı sıfır vektörüdür?

10. Yanda verilen \vec{a} vektörüne göre $-\frac{3}{4} \vec{a}$ vektörünü çiziniz.

11. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektörlerinin toplamını çiziniz.

12. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{a} = \vec{0}$ ise \vec{a} vektörünün eşitini bulunuz.