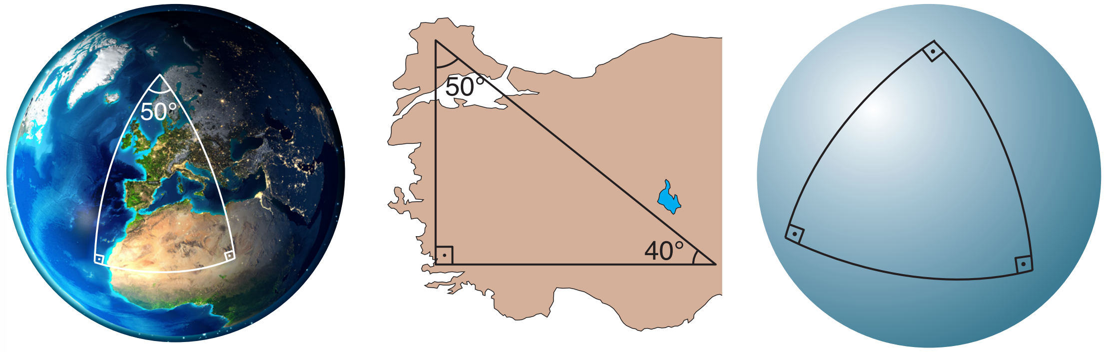
5. ÜNİTE

DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

5.1 : Dörtgenler ve Özellikleri
5.2 : Özel Dörtgenler
5.3 : Çokgenler



Dünyamız yaklaşık olarak küre biçimindedir. Onun üzerinde bir üçgen çizmeye kalktığımızda o üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden büyük olur. Yukarıdaki resim ve şekillerde bu durum gösterilmektedir. Oysa ortadaki düzlem haritada bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir.

Küresel Geometri

Öklid (Euclides) dışı geometrilerin varlığı, 19. yüzyılda keşfedildi. Bunu keşfeden dört matematikçi şunlardır: C. F. Gauss (1777-1855), N. Lobachevsky (1792-1856), J. Bolyai (1802-1860) ve B. Riemann (1826-1866). Bu keşif, Dünya'nın düz değil de yuvarlak olduğunun akıl düzeyindeki keşfinden sonra ortaya çıkmış ve Öklid geometrisinin mutlak doğru olmadığı anlaşılmıştır.

David Hilbert, 1899'da Geometri'nin Temelleri (Grundlagen der Geometri) adlı yapıtında Öklid'in yapmak istediğini (bugünkü anlamda) çok daha matematiksel olarak yapmıştır.

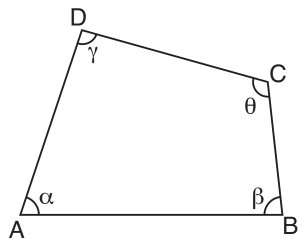
Öklid geometrisi düzlemde geçerlidir ve yerel olarak iyi bir yaklaştırmadır. Dünya o denli büyüktür ki, küçük uzaklıkları ölçerken bu Dünya'nın eğriliği göze çarpmaz. Örneğin önümüzdeki kâğıt düzdür ve orada çizeceğimiz üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Sonra matematikçiler Öklid-dışı geometrileri keşfettiler. Paralel doğrular, düz bir yüzey üzerinde kesişmez. Küresel bir yüzeyde bütün doğrular kesişebilir. Hiperbolik bir yüzeyde kesişmeyen birçok doğru bulunur. Öklid geometrisini, bir duvar ustası kullanabilir; ama okyanusta giden bir denizci kullanamaz. Öklid-dışı geometrilerin keşfedilmesi, aslında bin yıllara dayansa da bazı sistemlerin biricik olmadığını gösterdi. Öklid geometrisi, kendi içinde tutarlıdır ve olanaklı geometri sistemlerinden sadece biridir. Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi Dünya üzerindeki bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür; ama bir harita üzerindeki üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.

Kaynak: www.atominsan.net

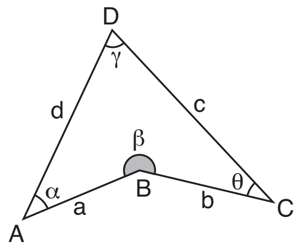
5.1 : DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ

5.1.1: Dörtgenin Temel Elemanları ve Özellikleri

DÖRTGENİN TEMEL ELEMANLARI VE ÖZELLİKLERİ



Dışbükey dikdörtgen



İçbükey dörtgen

Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekle **dörtgen**, kapalı şeklin içine **dörtgenin iç bölgesi**, dışına **dörtgenin dış bölgesi**, dörtgen ile iç bölgesinin birleşimine **dörtgensel bölge** denir. Bu kitapta “dörtgensel bölgenin alanı” yerine kısaca “dörtgenin alanı” deyimini kullanacağız.

Yukarıdaki şekillerde verilen ABCD dörtgenlerinde A, B, C ve D noktaları dörtgenin köşeleri, [AB] , [BC] , [CD] ve [AD] dörtgenin kenarları, |AB| = a , |BC| = b , |CD| = c ve |AD| = d kenar uzunluklarıdır (a, b, c, d $\in \mathbb{R}^+$).

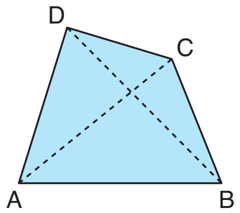
Şekillerde ölçüleri $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = \theta$ ve $m(\widehat{D}) = \gamma$ olan açılara iç açılar, iç açıların bütünleyenlerine ise dış açılar denir.

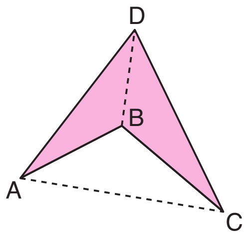
Dışbükey Dörtgen:

Bir dörtgende tüm iç açı ölçüleri 180 dereceden küçük ise bütün köşelerde bükülme şeklin dışına doğru olduğundan bu tür dörtgenlere dışbükey (konveks) dörtgen denir.

İçbükey Dörtgen:

Dörtgende en az bir iç açı ölçüsü 180 dereceden büyük ise o köşedeki bükülme şeklin içine doğru olduğundan bu tür dörtgenlere iç bükey (konkav) dörtgen denir.





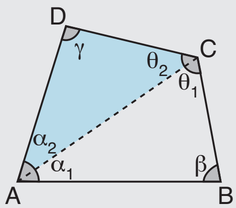
ABCD dörtgeninde ardışık olmayan köşeleri birleştiren [AC] ve [BD] na **köşegen** adı verilir.

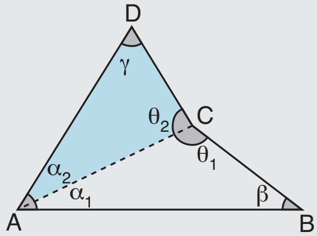
Bu kitaptaki anlatımda dörtgen denilince dışbükey dörtgen anlaşılmalıdır.

Dörtgende Açılar

İnceleyerek Öğrenelim

1. İçbükey ve dışbükey dörtgenlerde iç açı ölçülerinin toplamı 360° olur. Gösterelim.



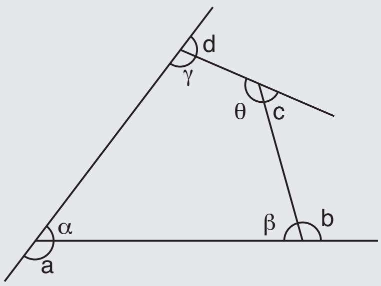


Yukarıdaki şekillerde görüldüğü gibi bir ABCD dörtgeninde [AC] köşegeni çizilirse elde edilen ABC ve ACD üçgenlerinde,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta + \theta_1 &= 180° \\ + \quad \alpha_2 + \gamma + \theta_2 &= 180° \end{aligned}\right\}$$ olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + (\theta_1 + \theta_2) + \gamma = 180° + 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \theta + \gamma = 2.180° = 360°$$ bulunur.

2. Dörtgende dış açı ölçüleri toplamı 360° olur. Gösterelim.



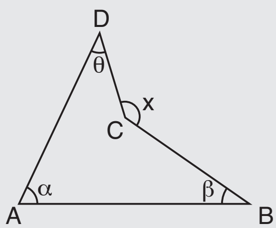
Şekilde ABCD dörtgeninde iç açıların bütünleyenlerinin ölçüsü a, b, c ve d dış açı ölçüleridir.

Buna göre,

$$a + b + c + d = (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \theta) + (180° - \gamma)$$

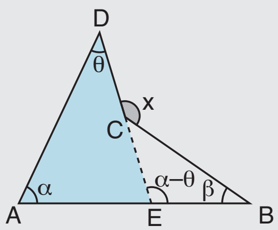
$$= 4.180° - (\alpha + \beta + \theta + \gamma) = 4.180° - 2.180° = 2.180° = 360°$$ olur.

3.



Şekildeki ABCD içbükey dörtgeninde verilenlere göre,

$x = \alpha + \beta + \theta$ olur. Gösterelim.

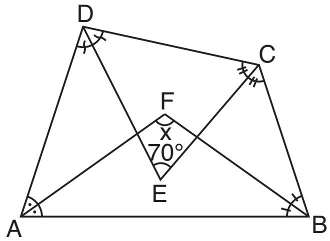


Şekilde görüldüğü gibi $CD \cap AB = \{E\}$ olsun.

$m(\widehat{DEB}) = \alpha + \theta$ ve BCE üçgeninde dış açı ölçüsü

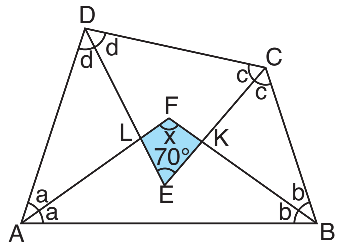
$x = \alpha + \beta + \theta$ olur.

Örnek



ABCD bir dörtgen, [AF], [FB], [CE] ve [DE] iç açıortaylardır. Şekilde $m(\widehat{CED}) = 70^\circ$ ise $m(\widehat{AFB}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Şekilde [AF], [FB], [CE] ve [DE] açıortay olduğundan ABCD dörtgeninde iç açı ölçüleri toplamı,

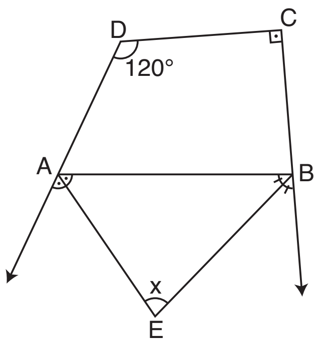
$2a + 2b + 2c + 2d = 360^\circ \Rightarrow a + b + c + d = 180^\circ$ olur.

Diğer yandan ABF ve CDE üçgeninde,

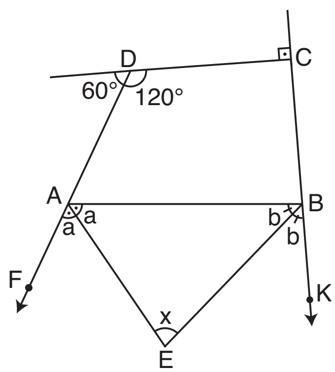
$$\left.\begin{aligned} a + b + x &= 180^\circ \\ + \quad c + d + 70^\circ &= 180^\circ \end{aligned}\right\}$$ olduğundan bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında,

$$\underbrace{a + b + c + d}_{180^\circ} + x + 70^\circ = 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow x + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$$ bulunur.

Örnek



ABCD dörtgeninde, [AE] ve [BE] dış açıortay, $m(\widehat{C}) = 90^\circ$ $m(\widehat{D}) = 120^\circ$, olduğuna göre, $m(\widehat{AEB}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözüm

Şekilde $\left\{\begin{aligned} m(\widehat{FAE}) &= m(\widehat{BAE}) = a \\ m(\widehat{ABE}) &= m(\widehat{KBE}) = b \end{aligned}\right.$ olsun.

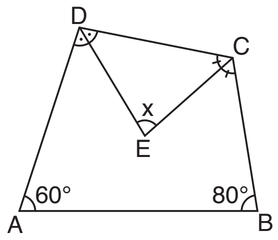
ABCD dörtgeninde dış açı ölçülerinin toplamı,

$2a + 2b + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow 2a + 2b = 210^\circ \Rightarrow a + b = 105^\circ$

bulunur. Sonuçta ABE üçgeninde,

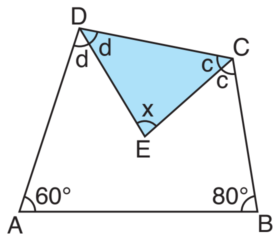
$x + a + b = 180^\circ \Rightarrow x + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$ olur.

Örnek



ABCD bir dörtgen [DE] ve [CE] açıortaylar $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{B}) = 80^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CED}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Şekildeki gibi,

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{CDE}) = \alpha \\ m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{DCE}) = \beta \end{array}\right\} \text{ olsun.}$$

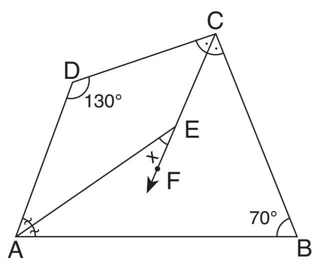
ABCD dörtgeninde,

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 80^\circ + 2c + 2d = 360^\circ$

$2c + 2d = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ \Rightarrow c + d = 110^\circ$ ve CDE üçgeninde

$x + c + d = 180^\circ \Rightarrow x + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$ bulunur.

Örnek



ABCD bir dikdörtgen

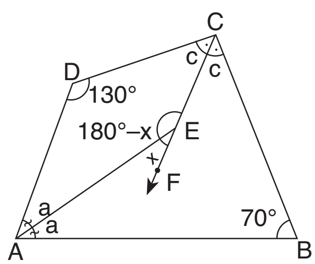
[AE] ve [CF açıortaylar

$m(\widehat{B}) = 70^\circ$

$m(\widehat{D}) = 130^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{AEF}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAE}) = a \\ m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{BCF}) = c \end{array}\right\} \text{ olsun.}$$

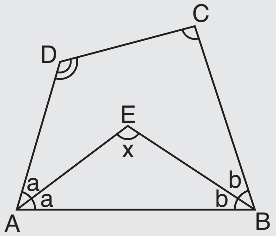
ADCE ve ABCE dörtgenlerinde iç açı ölçüleri toplamı 360° olduğundan,

$a + 130^\circ + c + 180^\circ - x = 360^\circ = a + 70^\circ + c + 180^\circ + x \Rightarrow 130^\circ - x = 70^\circ + x$

$2x = 130^\circ - 70^\circ \Rightarrow x = \dfrac{130^\circ - 70^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim

1.



Bir ABCD dörtgeninde ardışık köşelerdeki iki iç açıortay [AE] ve [BE] olsun. Şekilde,

$$m(\widehat{AEB}) = x = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

olur. Gösterelim.

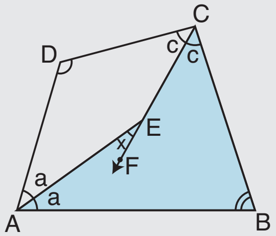
ABCD dörtgeninde iç açı ölçüleri toplamı,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ \Rightarrow 2a + 2b + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

$(a + b) + \dfrac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = 180^\circ$ ve ABE üçgeninde $(a + b) + x = 180^\circ$ olduğundan,

$x = \dfrac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$ olur.

2.



ABCD dörtgeninde ardışık olmayan iki köşedeki iç açıortay [AE] ve [CF olsun. Şekilde, [AE] ve [CF açıortaylarının belirttiği dar açının ölçüsü,

$m(\widehat{AEF}) = x = \dfrac{|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|}{2}$ olur. Gösterelim.

Şekildeki ABCE iç bükey dörtgeninde ve ADCE dörtgeninde iç açı ölçüleri toplamı 360° olduğundan;

$$a + m(\widehat{B}) + c + (180^\circ + x) = 360^\circ = a + m(\widehat{D}) + c + 180^\circ - x$$

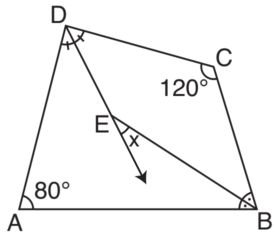
$$m(\widehat{B}) + x = m(\widehat{D}) - x \Rightarrow 2x = m(\widehat{D}) - m(\widehat{B}) \Rightarrow x = \frac{|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|}{2}$$

bulunur. Yukarıdaki şekilde ABCD dörtgeninin çiziminde,

$$m(\widehat{D}) > m(\widehat{B}) \Rightarrow m(\widehat{D}) - m(\widehat{B}) > 0 \Rightarrow m(\widehat{D}) - m(\widehat{B}) = |m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|$$

olduğuna dikkat edelim.

Örnek



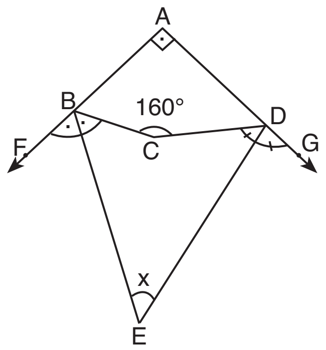
Yanda verilen ABCD dörtgeninde [DE ve [BE) iç açıortay, $m(\widehat{A}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 120^\circ$ olduğuna göre x kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

[DE ve [BE) açıortaylarının belirttiği dar açının ölçüsü şekilde,

$x = \dfrac{|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})|}{2} = \dfrac{120^\circ - 80^\circ}{2} = 20^\circ$ bulunur.

Örnek



ABCD dörtgeninde;

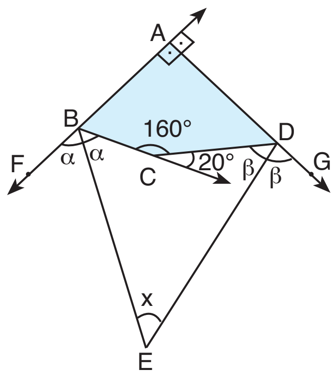
[BE] ve [DE] dış açıortaylar,

$m(\widehat{A}) = 90^\circ$

$m(\widehat{C}) = 160^\circ$ ise

$m(\widehat{BED}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Şekilde $m(\widehat{FBE}) = m(\widehat{CBE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{GDE}) = \beta$ olsun. ABCD dörtgeninde, A köşesinde dış açı ölçüsü 90° ve C köşesinde dış açı ölçüsü $180 - 160 = 20^\circ$ olduğundan dış açı ölçüleri toplamı,

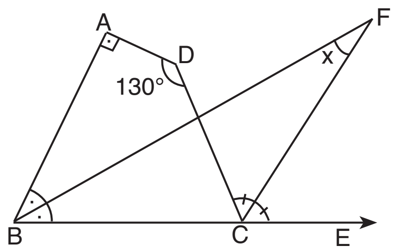
$90 + 2\alpha + 20 + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 250 \Rightarrow \alpha + \beta = 125^\circ$

bulunur. BCDE içbükey dörtgeninde,

$160^\circ = x + \alpha + \beta$ ve $\alpha + \beta = 125^\circ$ olduğundan,

$160 = x + 125 \Rightarrow x = 35^\circ$ bulunur.

Örnek



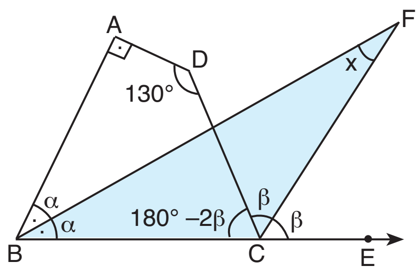
ABCD dörtgeninde [BF] iç açıortay, [CF] dış açıortay

$m(\widehat{A}) = 90^\circ$,

$m(\widehat{D}) = 130^\circ$ ise

$m(\widehat{BFC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Şekildeki ABCD dörtgeninde

$m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{FBE}) = \alpha$,

$m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{ECF}) = \beta$ olsun.

$m(\widehat{BCD}) = 180^\circ - 2\beta$ ve iç açı ölçüleri toplamı,

$90^\circ + 2\alpha + (180^\circ - 2\beta) + 130^\circ = 360^\circ$

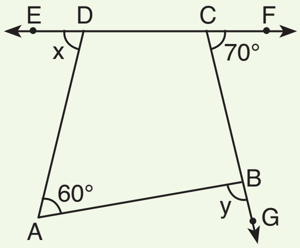
$40^\circ = 2(\beta - \alpha) \Rightarrow \beta - \alpha = 20^\circ$ bulunur.

Diğer yandan FBC üçgeninde dış açı ölçüsü,

$\beta = x + \alpha \Rightarrow x = \beta - \alpha = 20^\circ$ elde edilir.

Alıştırmalar

1.



Şekilde ABCD bir dörtgen,

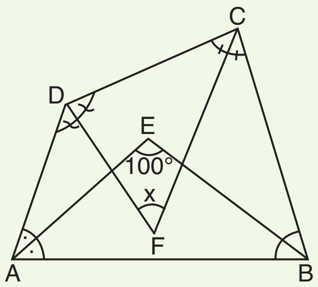
$m(\widehat{FCG}) = 70°$,

$m(\widehat{BAD}) = 60°$,

$m(\widehat{ADE}) = x$ ve

$m(\widehat{ABG}) = y$ ise $x + y$ toplamı kaç derecedir?

2.

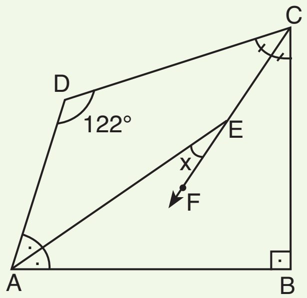


ABCD dörtgeninde [AE], [BE], [CF] ve [DF] iç açıortaylar

$m(\widehat{AEB}) = 100°$ ise

$m(\widehat{DFC}) = x$ kaç derecedir?

3.



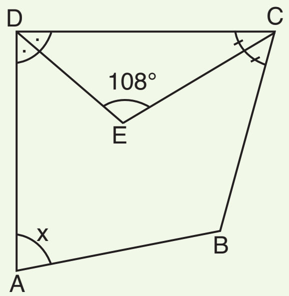
ABCD dörtgeninde [AE] ve [CE iç açıortaylar,

$m(\widehat{B}) = 90°$,

$m(\widehat{D}) = 122°$ dir.

Buna göre, şekildeki $m(\widehat{AEF}) = x$ kaç derecedir?

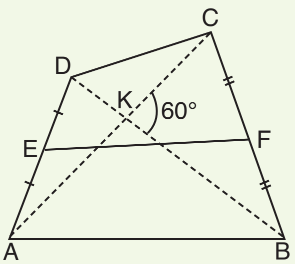
4.



ABCD dörtgeninde [CE] ve [DE] iç açıortaylardır.

$m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{A})$ ise $m(\widehat{A}) = x$ kaç derecedir?

5.



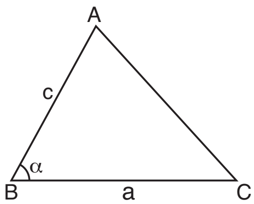
ABCD dörtgeninde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$,

$|AC| = |BD| = 8$ cm, $m(\widehat{BKC}) = 60°$ ve

E ile F kenarların orta noktaları olduğuna göre,

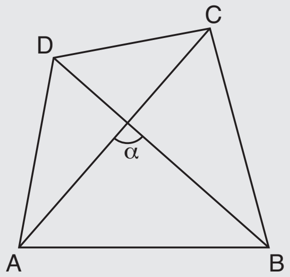
$|EF|$ kaç cm dir?

Dörtgenin Alanı



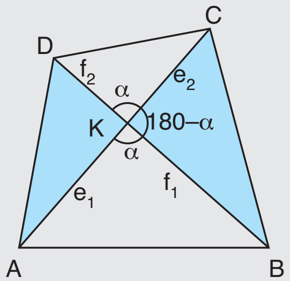
Şekildeki gibi iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının sinüs değeri bilinen bir ABC üçgeninin alanının $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} a.c.\sin\alpha$ olduğunu 9. sınıf matematik derslerinde öğrenmiştik. Bu bilgiden faydalanarak köşegen uzunlukları ve köşegenler arasındaki açının sinüs değeri bilinen bir dörtgenin alanının nasıl hesaplanabildiğini görelim.

İnceleyerek Öğrenelim



ABCD dörtgeninde köşegen uzunlukları |AC| = e, |BD| = f ve köşegenler arasındaki açının ölçüsü α ise ABCD dörtgeninin alanı,

$A(ABCD) = \frac{1}{2} e.f.\sin\alpha$ olur. Gösterelim.



$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $|AK| = e_1$, $|CK| = e_2$, $|BK| = f_1$,

$|DK| = f_2$ olsun. Buna göre $e_1 + e_2 = e$ ve $f_1 + f_2 = f$ olur.

$A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{BCK}) + A(\widehat{CDK}) + A(\widehat{ADK}) = A(\widehat{ABCD})$

ve $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$ olduğundan;

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} e_1.f_1.\sin\alpha + \frac{1}{2} e_2.f_1.\sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2}.e_2.f_2.\sin\alpha + \frac{1}{2}.e_1.f_2.\sin(180° - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} e_1.f_1.\sin\alpha + \frac{1}{2}.e_2.f_1.\sin\alpha + \frac{1}{2}.e_2.f_2.\sin\alpha + \frac{1}{2}.e_1.f_2.\sin\alpha$$

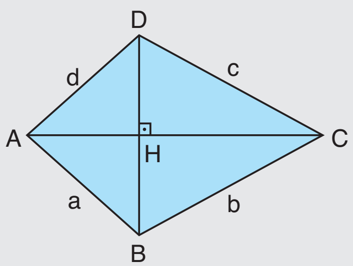
$$= \frac{1}{2} \sin\alpha.(e_1.f_1 + e_2.f_1 + e_2.f_2.+ e_1.f_2)$$

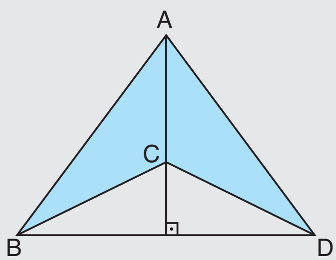
$$= \frac{1}{2} \sin\alpha\ [f_1(e_1 + e_2) + f_2\ (e_1 + e_2)]$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha\ (e\ f_1 + e\ f_2)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha.e.(f_1 + f_2)$$ ve sonuçta $A(ABCD) = \frac{1}{2} e.f.\sin\alpha$ elde edilir.

Sonuç





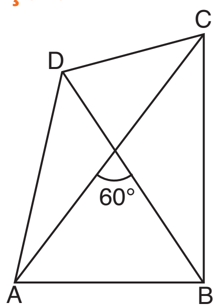
Köşegenleri dik olan bir ABCD dörtgeninde

$A(ABCD) = \frac{1}{2} e.f.\sin 90° \Rightarrow A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2}$ olur.

Örnek

ABCD dörtgeninde köşegen uzunlukları $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm, $|BD| = 6$ cm ve köşegenler arasındaki açının ölçüsü $60°$ ise bu dörtgensel bölgenin alanını bulalım.

Çözüm



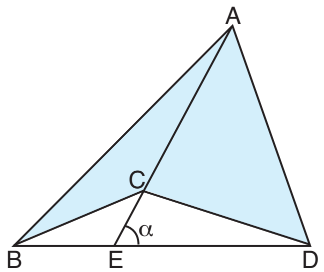
ABCD dörtgeninin alanı;

$$A(ABCD) = \frac{e.f.\sin\alpha}{2} = \frac{4\sqrt{3}.6.\sin 60°}{2}$$

$$= 12.\sqrt{3}\ \sin 60°$$

$$= 12\sqrt{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18\ cm^2 \text{ olur.}$$

Örnek

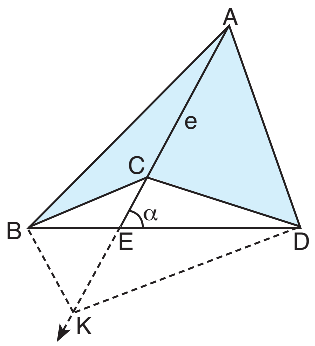


ABCD içbükey dörtgeninde $|AC| = e$, $|BD| = f$ ve köşegenler arasındaki açının ölçüsü $m(\widehat{AED}) = \alpha$ ise

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}\ e.f.\sin\alpha$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde ABKD dışbükey dörtgen olacak şekilde $K \in [AE$ seçilsin.

$$A(ABKD) = \frac{1}{2}\ |AK|.|BD|\sin\alpha \text{ ve}$$

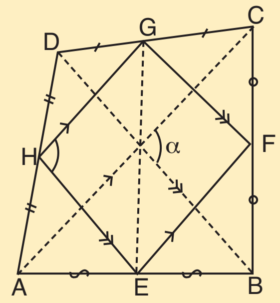
$$A(BCDK) = \frac{1}{2}\ |KC|.|BD|\sin\alpha \text{ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,}$$

$$A(ABKD) - A(BCDK) = \frac{1}{2}\ |BD|\sin\alpha\ (|AK| - |CK|)$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}\ |BD|\sin\alpha\ |AC|$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}\ e.f.\sin\alpha \text{ elde edilir.}$$

Etkinlik



▶ Bir ABCD dörtgeni ve kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulan EFGH dörtgenini şekildeki gibi çiziniz.

▶ |AC| = e , |BD| = f ve köşegenler arasındaki açının ölçüsünü α olarak alınız.

▶ ABC üçgeninde [EF] nın orta taban olduğunu dikkate alarak |EF| nu |AC| = e türünden bulunuz.

▶ ACD üçgeninde [GH] nın orta taban olduğunu dikkate alarak |GH| nu da e türünden bulunuz.

▶ |EF| ve |GH| uzunluklarını karşılaştırınız.

▶ BCD üçgeninde [FG] ve ABD üçgeninde [EH] nın orta taban olduğunu dikkate alarak |FG| ve |EH| uzunluklarını f türünden yazınız.

▶ [EF] // [AC] // [GH] ve [EH] // [BD] // [FG] olduğuna göre EHG, EFG açıları ve FEH, FGH açılarının ölçülerini α türünden yazınız.

■ Etkinlik basamaklarından elde ettiğiniz bilgileri kullanarak EFGH dörtgeninin paralelkenar olup olmayacağını gerekçeleri ile belirtiniz.

▶ |AC| + |BD| toplamını e ve f türünden yazınız.

▶ |EF| + |FG| + |GH| + |HE| toplamını e ve f türünden yazınız.

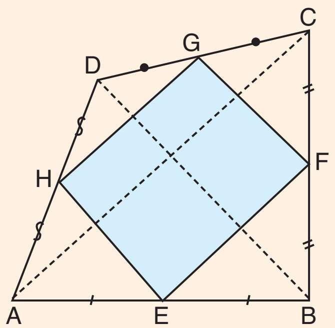
■ |AC| + |BD| ile |EF| + |FG|+|GH|+|HE| toplamlarının sonuçlarını karşılaştırarak Ç(EFGH) yi veren bir eşitlik yazınız.

▶ ABCD dörtgensel bölgesinin alanını veren bağıntıyı yazınız.

■ EHG üçgeni ile EFG üçgeninin alanlarını veren bağıntıların toplamını yazınız. (Üçgenlerin alan bağıntılarında sinα yı kullanınız).

■ A(ABCD) bağıntısı ile $A(\widehat{EHG}) + A(\widehat{EFG})$ toplamını karşılaştırarak ABCD dörtgeninin bölgesinin alanı ile EFGH dörtgeninin alanı arasındaki bağıntıyı yazınız.

Bunları Bilelim

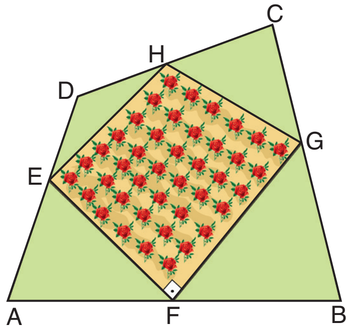


ABCD dörtgeninde E, F, G ve H kenarların orta noktaları,

|AC| = e ve |BD| = f ise

- EFGH dörtgeni bir paralelkenar,
- Ç(EFGH) = e + f,
- A(ABCD) = 2.A(EFGH) olur.

Örnek

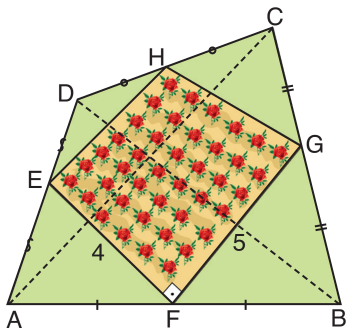


Resimdeki ABCD dörtgeni biçimindeki bir bahçede ölçüm yapıldığında E, F, G ve H kenarların orta noktaları,

$[EF] \perp [FG]$, $|EF| = 4$ m, $|FG| = 5$ m olduğu görülmüştür.

Bahçedeki EFGH bölgesine gül ekilip geriye kalan yerler çimlendirilecektir. Buna göre, gül ekilen bölgenin ve çimlendirilmiş bölgenin alanını, ABCD bölgesinin köşegen uzunluklarını ve gül ekilen bölgeyi çevrelemek için kaç metre tel gerektiğini bulalım.

Çözüm



E, F, G ve H orta noktalar olduğundan bahçedeki EFGH bölgesi bir paralelkenar hatta bir açısının ölçüsü 90° olduğundan dikdörtgen olur. Gül bahçesinin alanı,

$A(EFGH) = 4.5 = 20 \text{ m}^2$,

$A(ABCD) = 2\,A(EFGH) = 2.20 = 40 \text{ m}^2$ ve çimlendirilmiş bölgenin alanı $S = 40 - 20 = 20 \text{ m}^2$ bulunur.

ABC üçgensel bölgesinde [FG] orta taban olduğundan, $|AC| = 2\,|FG| = 2.5 = 10$ m ve

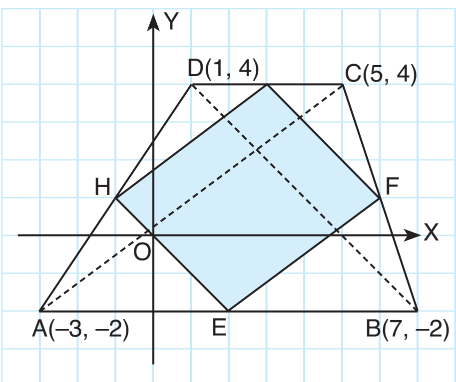
ABD üçgensel bölgesinde [EF] orta taban olduğundan, $|BD| = 2|EF| = 2.4 = 8$ m olur.

Sonuçta gül ekilen bölgeyi çevrelemek için, $Ç(EFGH) = |AC| + |BD| = 10 + 8 = 18$ m tel gerekir.

Örnek

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları A(–3, –2) , B(7, –2) , C(5, 4) ve D(1, 4) olan ABCD dörtgeni veriliyor. ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin çevresini bulalım.

Çözüm



ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktaları E, F, G, H olsun.

$Ç(EFGH) = |AC| + |BD|$ olduğundan iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısı ile,

$|AC| = \sqrt{(5-(-3))^2 + (4-(-2)^2} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$ birim

$|BD| = \sqrt{(7-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$ birim

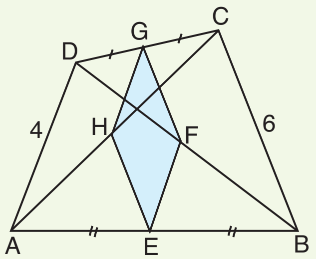
bulunur. Sonuçta EFGH paralelkenarının çevresi,

$Ç(EFGH) = |AC| + |BD| = 10 + 6\sqrt{2}$ birim olur.

Alıştırmalar

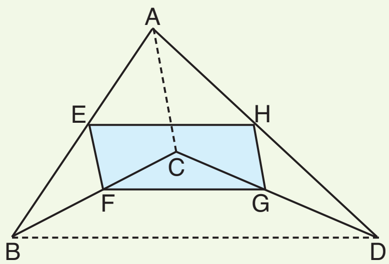
1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun kelimeleri yazınız.

- Herhangi bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirerek elde edilen dörtgen bir ....
- Bir ABCD dörtgeninin köşegen uzunlukları toplamı, bu dörtgenin kenar orta noktalarını birleştiren dörtgenin .... eşittir.
- Bir ABCD dörtgeninin alanı bu dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştiren dörtgenin alanının .... katıdır.

2. 

ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegenlerinin orta noktaları sırasıyla H ve F dir.

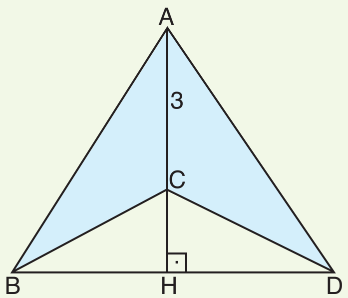
|AE| = |BE| , |CG| = |DG| , |BC| = 6 cm ve |AD| = 4 cm ise, EFGH dörtgeninin çevresi kaç cm dir?

3. 

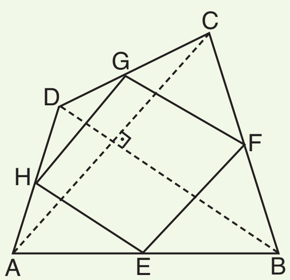
ABCD içbükey dörtgeninde,
E, F, G ve H kenarların orta noktalarıdır.

a. Ç(EFGH) = |AC| + |BD|,

b. A(EFGH) = $\frac{1}{2}$ A(ABCD) olduğunu gösteriniz.

4. 

Yanda verilen ABD üçgeninde;
[AH] ⊥ [BD] , |AC| = 3 cm , |BD| = 6 cm olduğuna göre, ABCD içbükey dörtgeninin alanını bulunuz.

5. 

ABCD dörtgeninde E, F, G ve H kenarlarının orta noktaları, [AC] ⊥ [BD], |AC| = 6 cm , |BD| = 8 cm olduğuna göre, A(EFGH) kaç cm^2 olur?

5.2 : ÖZEL DÖRTGENLER

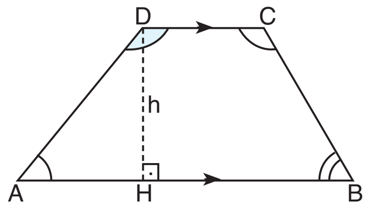
5.2.1: Yamuk, Paralelkenar, Eşkenar Dörtgen, Dikdörtgen, Kare ve Deltoit ile İlgili Açı ve Uzunluk Bağıntıları

5.2.2: Yamuk, Paralelkenar, Eşkenar Dörtgen, Dikdörtgen, Kare ve Deltoidin Alan Bağıntıları

5.2.3: Dörtgenlerin Alan Bağıntılarının Problem Çözme ve Modellemede Kullanılması

YAMUK VE YAMUĞUN ÖZELLİKLERİ

Yamuk:

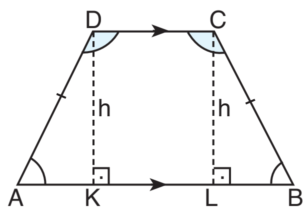


En az iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk denir. Yamuğun paralel olan kenarlarına yamuğun tabanları, paralel olmayan kenarlarına yan kenarlar (ayaklar), tabanları taşıyan doğrular arasındaki tabanlara dik doğru parçasına da yamuğun yüksekliği denir. Şekilde [DH] ⊥ [AB] ise ABCD yamuğunun yüksekliği h dir.

Bir yamukta bir yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açı ölçülerinin toplamı 180° olur. ABCD yamuğunda [AB] // [CD] ise

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180°, \quad m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180° \text{ olur.}$$

İkizkenar Yamuk:

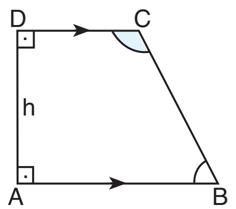


Yan kenarlarının uzunlukları eşit olan yamuğa ikizkenar yamuk denir. İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri eşittir.

Yanda verilen ABCD ikizkenar yamuğunda,

[AB] // [CD] ve |AD| = |BC| ise $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ olur.

Dik Yamuk:

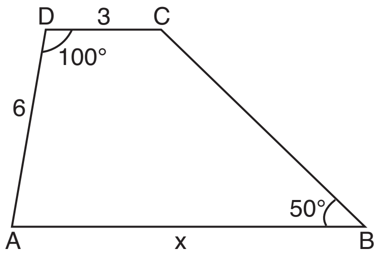


Yan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa dik yamuk denir.

Yandaki ABCD dik yamuğunda,

[AB] // [CD] ve |AB| ⊥ |AD| olduğundan [AD] yamuğun yüksekliği olur.

Örnek



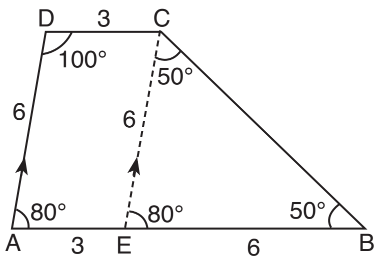
ABCD yamuk, [AB] // [CD]

$m(\widehat{ADC}) = 100°$, $m(\widehat{ABC}) = 50°$,

$|AD| = 6$ cm , $|CD| = 3$ cm ise

$|AB| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



[AB] // [CD] olduğundan yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açı ölçülerinin toplamı,

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) + 100 = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 80°$

bulunur. C köşesinden [CE] // [AD] çizilirse AECD paralelkenar olacağından,

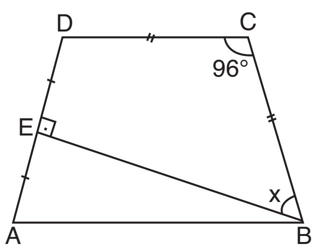
$|AE| = |CD| = 3$ cm, $|AD| = |CE| = 6$ cm ve yöndeş açılardan,

$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BAD}) = 80°$ elde edilir. BCE üçgeninde iç açı ölçüleri toplanırsa,

$50° + 80° + m(\widehat{BCE}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{BCE}) = 50° \Rightarrow |BE| = |CE| = 6$ cm

ve sonuçta $|AB| = x = 3 + 6 = 9$ cm bulunur.

Örnek

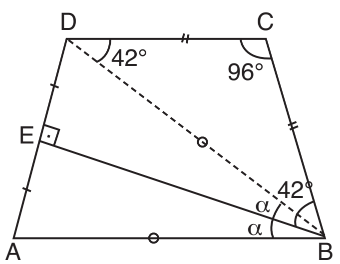


ABCD yamuk, [AB] // [CD], $m(\widehat{BCD}) = 96°$

$[BE] \perp [AD]$, $|AE| = |DE|$ ve $|BC| = |CD|$ ise

$m(\widehat{CBE}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



ABCD yamuğunun [BD] köşegeni çizilirse, BAD üçgeni [BE] yüksekliği tabanı iki eş parçaya ayırdığı için ikizkenar olur.

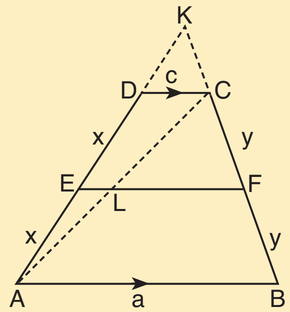
$|BD| = |BA|$ olduğundan,

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{DBE}) = \alpha$ ve $|CD| = |BC|$ verildiği için

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) = 42°$, [AB] // [CD] olduğundan da iç ters açıların ölçüleri $2\alpha = 42° \Rightarrow \alpha = 21°$ olur.

Sonuçta $m(\widehat{CBE}) = x = \alpha + 42 = 21 + 42 = 63°$ bulunur.

Etkinlik



Bir ABCD yamuğunda; [AB] // [CD], |AB| = a ve |CD| = c olsun.

Yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasının tabanlara paralel ve uzunluğunun $\frac{a+c}{2}$ olduğu aşağıda ispatlanmaktadır. Boş bırakılan yerleri doldurunuz.

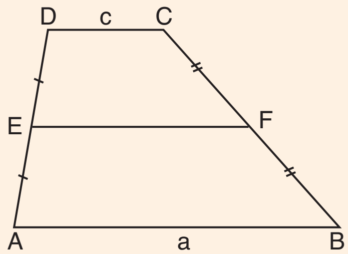
Verilen: [AB] // [CD] , |AE| = |DE| = x , |FB| = |FC| = y

İstenen: [EF] // [CD] // [AB] ve $|EF| = \frac{a+c}{2}$

İfadeler	Gerekçeler
1. $AD \cap BC = \{K\}$	1. Düzlemde paralel olmayan doğrular bir noktada kesişir.
2. $\frac{\|KD\|}{2x} = \frac{\|KC\|}{2y}$	2. $\widehat{KAB}$ de [CD] // [AB] , Temel Orantı Teoremi
3. $\frac{\|KD\|}{x} = \frac{\|KC\|}{y}$	3. ....
4. $\frac{\|KD\|}{\|DE\|} = \frac{\|KC\|}{\|CF\|}$	4. x = |DE| , y = |CF| verildi.
5.	5. $\widehat{KEF}$ de Temel Orantı Teoremi Karşıtı
6. $\|EL\| = \frac{c}{2}$	6. ACD üçgeninde [EL] orta taban
7.	7. ABC üçgeninde [FL] orta taban
8. |EF| = |EL| + |FL|	8. ....
9. $\|EF\| = \frac{a+c}{2}$	9. İstenen

Bunları Bilelim

Yamukta Orta Taban:



Yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun orta tabanı denir. Orta taban tabanlara paraleldir.

Şekildeki ABCD yamuğunda [AB] // [CD]

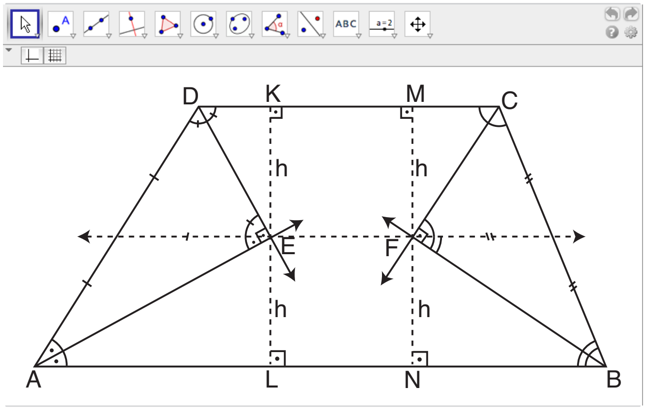
|AE| = |DE| , |FB| = |FC| , |AB| = a ve |CD| = c ise

$|EF| = \frac{a+c}{2}$ ve [EF] // [AB] // [CD] olur.

Örnek

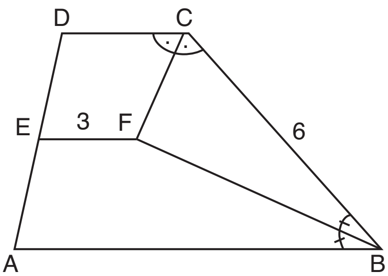
Dinamik matematik / geometri yazılımını kullanarak bir yamukta iç açıortayların orta taban üzerinde dik kesiştiğini görelim.

Çözüm



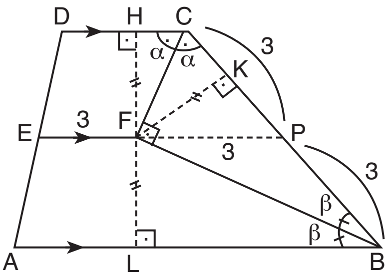
Dinamik geometri yazılımını açıp sağ kısımdaki "geometri" sekmesini tıklayarak doğru parçaları ile bir ABCD yamuğunu çizelim [AB] // [CD] olsun.
Yazılımın üst kısmındaki 4. kutuda bulunan ( ) açıortay seçeneği yardımıyla A, B, C ve D köşelerindeki açıortaylarını çizerek kesim noktalarını şekildeki gibi E ve F ile isimlendirelim. Yazılımın açı ölçme aracı ( ) yardımıyla $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{CFB}) = 90°$ ve ve uzunluk ölçme aracı ( ) yardımıyla E ile F noktalarının tabanlara uzaklıkları |EK| = |EL| = |FM| = |FN| = h bulunur. Şekilde EFMK, EFNL dikdörtgen ve EF // KM // LN olduğundan EF orta tabanı taşıyan doğru olur. Görüldüğü gibi bir yamukta iç açıortaylar orta taban üzerinde dik kesişmektedir.

Örnek



ABCD yamuğunda, [AB] // [CD] // [EF]
[CF] ve [FB] açıortaylar,
|EF| = 3 cm , |BC| = 6 cm ise
|AB| + |CD| toplamı kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Önce bir yamukta yan kenarla tabanların oluşturduğu B ve C köşesindeki iç açıortayların orta taban üzerinde dik kesiştiğini gösterelim. F noktasından geçen ve tabanlara dik olan [HL] ile [FK] ⊥ [BC] çizilirse, [CF] açıortay olduğundan, |FH| = |FK| ve [FB] açıortay olduğundan |FK| = |FL| sonuçta |FH| = |FK| = |FL| bulunur.

Buna göre açıortaylar orta taban üzerindeki F noktasında kesişirler.

$m(\widehat{FCD}) = m(\widehat{FCB}) = \alpha$, $m(\widehat{FBA}) = m(\widehat{FBC}) = \beta$ ve [AB] // [CD] olduğundan,

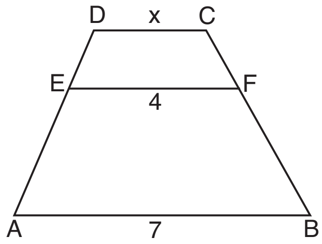
$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$ BCF üçgeninde $m(\widehat{F}) = 90°$ olur.

[EF] // [AB] ve F noktası tabanlara eşit uzaklıkta olduğundan [EF] uzatıldığında elde edilen [EP] yamuğun orta tabanıdır. [FP] BCF dik üçgeninin hipotenüsünün kenar ortayı olduğu için de

|FP| = |BP| = |CP| = 3 cm bulunur. Sonuçta, ABCD yamuğunun orta taban uzunluğu,

$|EP| = |EF| + |FP| = 3 + 3 = 6 = \dfrac{|AB| + |CD|}{2} \Rightarrow |AB| + |CD| = 12$ cm elde edlir.

Örnek



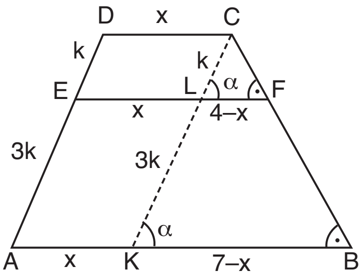
ABCD bir yamuk, [AB] // [CD] // [EF],

|AE| = 3|DE| , |AB| = 7 cm

|EF| = 4 cm ise

|CD| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Şekilde [CK] // [AD] çizilirse oluşan AKCD paralelkenarında,

|AK| = |EL| = |CD| = x , |LF| = 4 – x , |KB| = 7 – x

|DE| = |CL| = k ve |AE| = |KL| = 3k elde edilir.

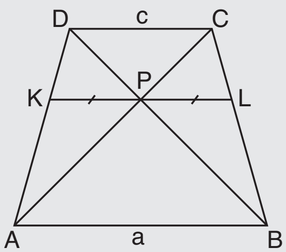
Yöndeş açılardan,

$m(\widehat{CLF}) = m(\widehat{CKM}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{CFE})$ olur.

A.A. benzerlik kuralına göre

$\widehat{CLF} \sim \widehat{CKB} \Rightarrow \dfrac{4-x}{7-x} = \dfrac{k}{4k} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 16 - 4x = 7 - x \Rightarrow 9 = 3x \Rightarrow x = 3$ cm bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim



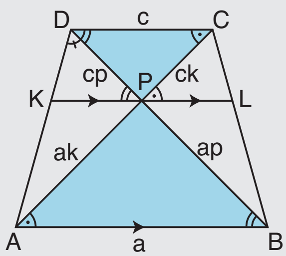
ABCD yamuğunda [AB] // [CD], |AB| = a

|CD| = c ve [AC] ∩ [BD] = {P} olsun.

P noktasından geçen ve tabanlara paralel olan [KL] verildiğinde,

$|PK| = |PL| = \dfrac{ac}{a+c}$ ve $|KL| = \dfrac{2ac}{a+c}$

olur. Gösterelim.



[AB] // [CD] olduğundan A.A. benzerlik kuralına göre,

$\widehat{PCD} \sim \widehat{PAB}$, $\widehat{CPL} \sim \widehat{CAB}$ ve $\widehat{DKP} \sim \widehat{DAB}$ olur.

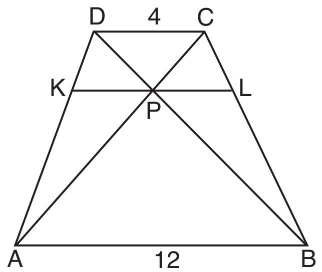
$\dfrac{|PC|}{|PA|} = \dfrac{|PD|}{|PB|} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} |PA| = a.k \ , \ |PC| = c.k \\ |PB| = a.p \ , \ |PD| = c.p \end{cases}$ olur. $(k.p \in \mathbb{R}^+)$

$\widehat{DKP} \sim \widehat{DAB} \Rightarrow \dfrac{|PK|}{|AB|} = \dfrac{|DP|}{|DB|} \Rightarrow \dfrac{|PK|}{a} = \dfrac{c.p}{(a+c).p} \Rightarrow |PK| = \dfrac{a.c}{a+c}$

$\widehat{CPL} \sim \widehat{CAB} \Rightarrow \dfrac{|PL|}{|AB|} = \dfrac{|CP|}{|CA|} \Rightarrow \dfrac{|PL|}{a} = \dfrac{c.k}{(a+c).k} \Rightarrow |PL| = \dfrac{a.c}{a+c}$ olduğundan

$|PK| = |PL| = \dfrac{a \cdot c}{a+c}$ ve $|KL| = \dfrac{2a.c}{a+c}$ bulunur.

Örnek



ABCD yamuk, [AB] // [CD] // [KL]

[AC] ∩ [BD] = {P}, |AB| = 12 cm, |CD| = 4 cm olduğunu göre,

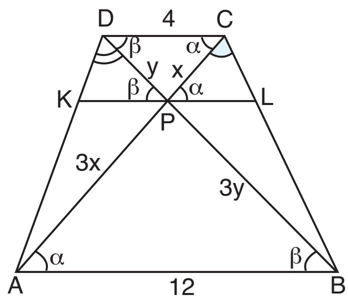
|PL|, |KP| ve |KL| uzunluklarını bulalım.

Çözüm - 1

Şekildeki gibi bir ABCD yamuğunda $|KL| = \dfrac{2ac}{a+c}$ ve $|KP| = |LP| = \dfrac{ac}{a+c}$ olacağından,

$|KL| = \dfrac{2.12.4}{12+4} = \dfrac{2.48}{16} = 6$ cm ve |KP| = |LP| = 3 cm bulunur.

Çözüm - 2



[AB] // [CD] // [KL] olduğundan iç ters açıların ölçüleri,

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$, $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DBA}) = \beta$

ve A.A. Benzerlik benzerlik kuralına göre,

$$\widehat{PCD} \sim \widehat{PAB} \Rightarrow \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} |PC| = x \Rightarrow |PA| = 3x \\ |PD| = y \Rightarrow |PB| = 3y \end{cases}$$ bulunur $(x, y \in \mathbb{R}^+)$.

Yöndeş açılar olan $m(\widehat{CPL}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olduğundan bir iç açısı ortak CPL ve CAB üçgenleri de A.A. benzerlik kuralına göre benzerdir. Sonuçta,

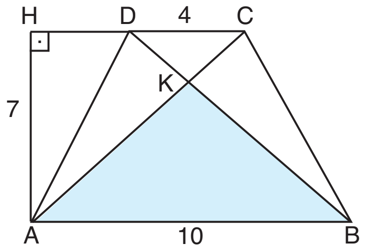
$$\frac{|PL|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|CA|} \Rightarrow \frac{|PL|}{12} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \Rightarrow |PL| = 3 \text{ cm}$$ bulunur.

Birer açısı ortak ve yöndeş açılardan $m(\widehat{DPK}) = m(\widehat{DBA}) = \beta$ olan DPK ve DBA üçgenleri de A.A. benzerlik kuralına göre benzer olduğundan;

$$\frac{|KP|}{|AB|} = \frac{|DP|}{|DB|} \Rightarrow \frac{|KP|}{12} = \frac{y}{4y} = \frac{1}{4} \Rightarrow |KP| = 3 \text{ cm}$$, |KL| = |KP| + |PL| = 3 + 3 = 6 cm bulunur.

Örnekte verilen koşullarda daima |KP| = |PL| olduğuna dikkat edelim!

Örnek



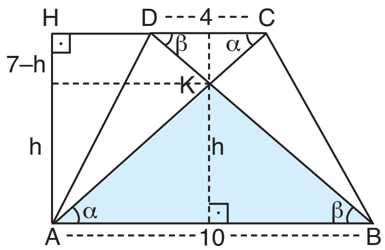
ABCD yamuğunda [AB] // [CD],

|AB| = 10 cm, |CD| = 4 cm

yamuğun yüksekliği |AH| = 7 cm

olduğuna göre, KAB üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm



İç ters açı çiftleri eş olduğundan,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACH}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = \beta$ olur.

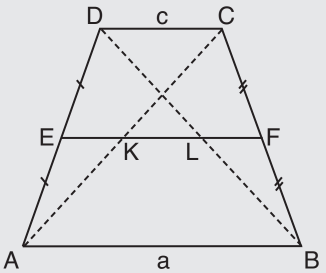
A.A. benzerlik kuralına göre, $\widehat{KCD} \sim \widehat{KAB}$ ve yükseklik oranları da benzerlik oranına eşit olduğundan şekilde,

$\dfrac{7-h}{h} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} \Longrightarrow 35 - 5h = 2h \Rightarrow 7h = 35 \Rightarrow h = 5\text{ cm}$

bulunur.

Sonuçta KAB üçgeninin alanı $\dfrac{10.5}{2} = 25\text{ cm}^2$ olur.

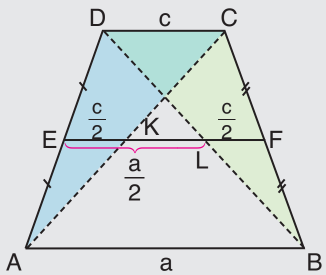
İnceleyerek Öğrenelim



ABCD yamuğunda [AB] // [CD],

[EF] orta taban, |AB| = a ve |CD| = c olsun. Orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu,

$|KL| = \dfrac{a-c}{2}$ olur. Gösterelim.

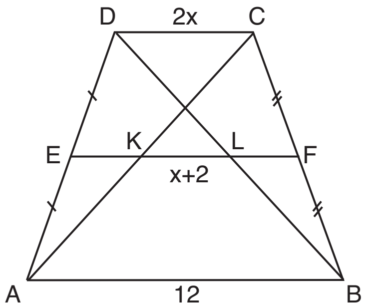


ABCD yamuğunda [EF] orta taban olduğundan ACD üçgeninde [EK], BCD üçgeninde [LF] orta taban olur dolayısıyla $|EK| = |LF| = \dfrac{c}{2}$ olur.

DAB üçgeninde [EL], CAB üçgeninde de [KF orta taban ve $|EL| = |KF| = \dfrac{a}{2}$ olduğundan

$|KL| = |EL| - |EK| = \dfrac{a}{2} - \dfrac{c}{2} = \dfrac{a-c}{2}$ bulunur.

Örnek



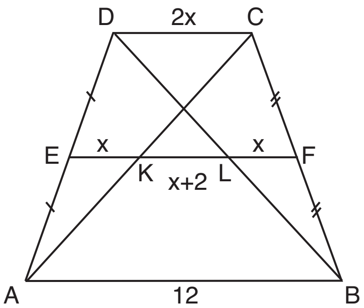
ABCD yamuğunda [AB] // [CD]

$[AC] \cap [EF] = \{K\}$, $[BD] \cap [EF] = \{L\}$

$|AB| = 12$ cm, $|CD| = 2x$, $|KL| = x + 2$

olduğuna göre, [EF] orta tabanının uzunluğu kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



ABCD yamugunda [EF] orta taban olduğundan, ACD ve BCD üçgenlerinde sırasıyla [EK] ve [LF] orta taban olur.

Bu nedenle, $|EK| = |LF| = \dfrac{|CD|}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

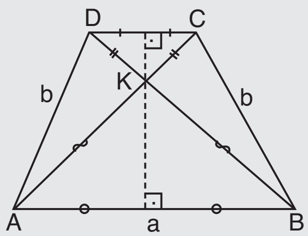
$|EF| = x + (2 + x) + x = 3x + 2$ bulunur.

Diğer yandan,

$|EF| = \dfrac{12 + 2x}{2} = 3x + 2 \Rightarrow 6 + x = 3x + 2 \Rightarrow x = 2$ ve

$|EF| = 3x + 2 = 3.2 + 2 = 8$ cm olur.

İnceleyerek Öğrenelim



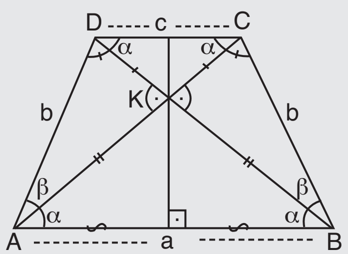
İkizkenar yamukta köşegenler eştir.

Şekilde [AB] // [CD] ve $|AD| = |BC|$ ise

$|AC| = |BD|$ olur.

Köşegenlerin kesim noktasından geçen yükseklik

ikizkenar yamuğun simetri eksenidir. Gösterelim.



ABCD yamuğunda [AB] // [CD], $|AD| = |BC| = b$,

$|AB| = a$, $|CD| = c$ ve $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ olsun. İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABC})$ olduğundan, K.A.K. eşlik kuralına göre,

$\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD} \Rightarrow |AC| = |BD|$,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ABD}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BCA})$ bulunur.

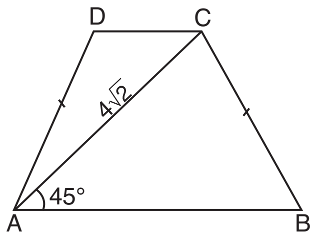
İç ters açıların eşitliğinden,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha \Rightarrow |KA| = |KB|$ ve $|KC| = |KD|$

K.A.K. eşlik kuralına göre, $\widehat{AKD} \cong \widehat{BKC}$ olur.

Sonuçta şekilde K noktasından geçen yamuğun yüksekliği KAB ve KCD ikizkenar üçgenlerinin tabanlarını iki eş parçaya böler ve ikizkenar yamuğun simetri ekseni olur.

Örnek

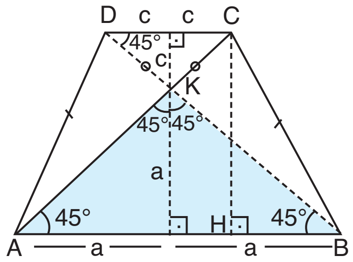


ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [CD],

|AD| = |BC|, $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ve |AC| = $4\sqrt{2}$ cm

olduğuna göre, yamuğun orta tabanının ve yüksekliğinin uzunluğunu bulalım.

Çözüm



Yamuğun, [CH] yüksekliği çizilirse AHC ikizkenar dik üçgeninde |AH| = |CH| = 4 cm olur. [BD] köşegeni de çizilirse,

[AC] ∩ [BD] = {K} ise |AC| = |BD|, |KA| = |KB|,

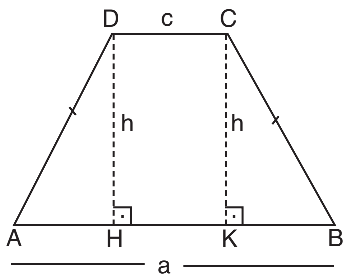
|KC| = |KD| ve KCD ile KAB ikizkenar dik üçgenler olur. K noktasından geçen yükseklik ikizkenar yamuğun simetri ekseni olduğundan şekildeki ikizkenar dik üçgenlerde,

|AB| = 2a , |CD| = 2c ise yamuğun yüksekliği

|CH| = a + c = 4 cm bulunur.

Sonuçta köşegenleri dik şekildeki ikizkenar yamukta orta taban uzunluğu ile yükseklik uzunluğu birbirine eşit ve $\dfrac{(2a)+(2c)}{2} = a + c = |CH| = 4$ cm bulunur.

Örnek



ABCD ikizkenar yamuğunda, [AB] // [CD] ve |AD| = |BC| olsun.

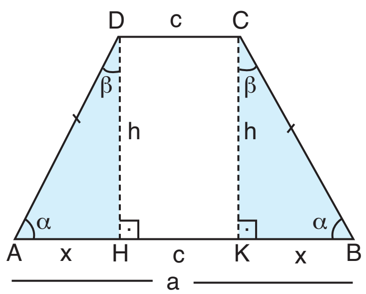
[DH] ⊥ [AB] , [CK] ⊥ [AB] , |AB| = a ve |CD| = c ise

a. |AH| = |BK| = $\dfrac{a-c}{2}$

b. |AK| = |BH| = $\dfrac{a+c}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

a.



Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda; |AD| = |BC|,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ADH}) = m(\widehat{BCK}) = \beta$

olduğundan A.K.A. eşlik kuralından

$\overset{\frown}{AHD} \cong \overset{\frown}{BKC} \Rightarrow$ |AH| = |BK| = x ve CDHK dikdörtgeninde

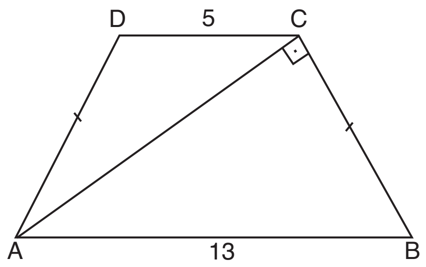
|CD| = |HK| = c bulunur.

|AB| = x + c + x = 2x + c = a olduğundan,

|AH| = |BK| = x = $\dfrac{a-c}{2}$ bulunur.

b. Şekilde |AK| = |BH| = x + c = $\dfrac{a-c}{2} + c = \dfrac{a+c}{2}$ olur.

Örnek



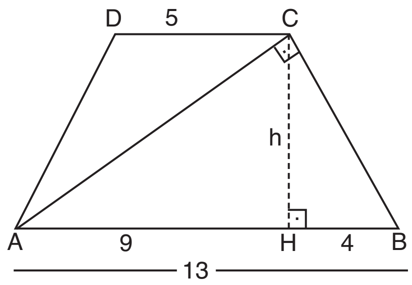
Şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda

$[AB] \parallel [CD]$, $|AD| = |BC|$,

$|AB| = 13$ cm ve $|CD| = 5$ cm ise

yamuğun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



$[CH] \perp [AB]$ çizilirse,

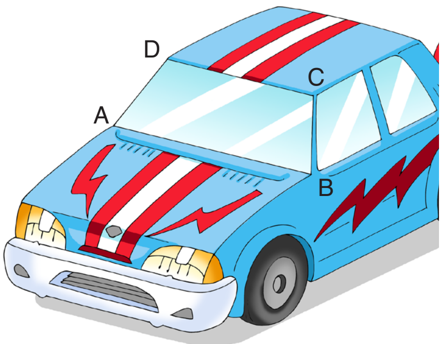
$|BH| = \dfrac{13-5}{2} = 4$ cm ve $|AH| = 9$ cm bulunur.

ABC dik üçgeninde $[CH] \perp [AB]$ olduğundan,

Öklid Bağıntısı ile

$h^2 = 4.9 \Rightarrow h = 6$ cm elde edilir.

Örnek



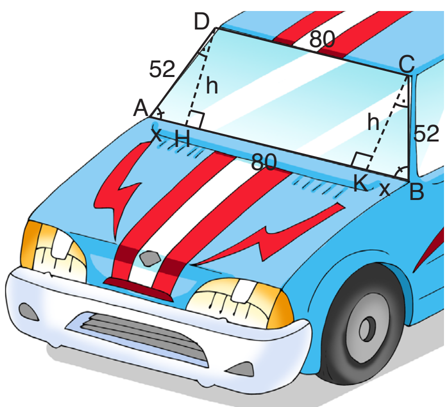
Resimdeki arabanın ABCD ikizkenar yamuğu biçimindeki ön camında,

$[AB] \parallel [CD]$, $|AD| = |BC| = 52$ cm,

$|CD| = 80$ cm, $|AB| = 120$ cm olduğuna göre,

yamuk biçimindeki camın yüksekliği kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Yamuk biçimindeki ABCD camında

$[CK] \perp [AB]$ ve $[DH] \perp [AB]$ çizilirse CDHK dikdörtgen ve A.K.A. eşlik kuralına göre, $\widehat{AHD} \cong \widehat{BKC}$ olduğundan

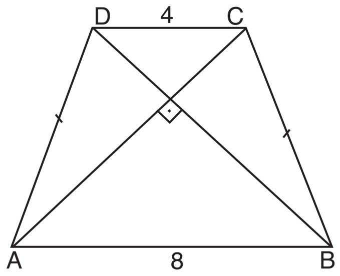
$|AH| = |BK| = x$ ve $|HK| = 80$ cm olur.

$|AB| = x + 80 + x = 120 \Rightarrow x = \dfrac{120-80}{2} = 20$ cm elde edilir.

AHD dik üçgeninde Pisagor Teoremi kullanılırsa,

$52^2 = 20^2 + h^2 \Rightarrow h = 48$ cm bulunur.

Örnek



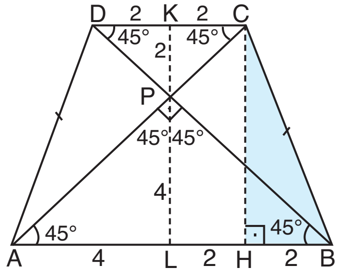
ABCD ikizkenar yamuğunda,

[AB] // [CD] ve |AD| = |BC| dir.

[AC] ⊥ [BD], |AB| = 8 cm, |CD| = 4 cm

olduğuna göre, |BC| kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Köşegenlerin kesim noktasından geçen [KL] yüksekliği ikizkenar yamuğun simetri ekseni ve [AC] ⊥ [BD] olduğundan şekilde

|CK| = |DK| = |PK| = 2 cm, |AL| = |BL| = |PL| = 4 cm olur.

CKLH dikdörtgeninde yükseklik |KL| = |CH| = 2 + 4 = 6 cm ve

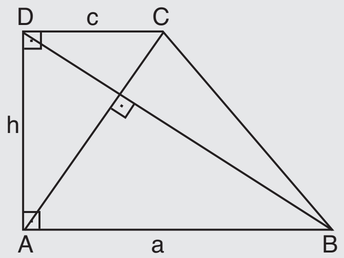
|CK| = |HL| = 2 cm ⇒ |BH| = 4 – 2 = 2 cm olacağından

BCH dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile

$|BC|^2 = |BH|^2 + |CH|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 2^2 + 6^2 = 40$

$|BC| = 2\sqrt{10}$ cm elde edilir.

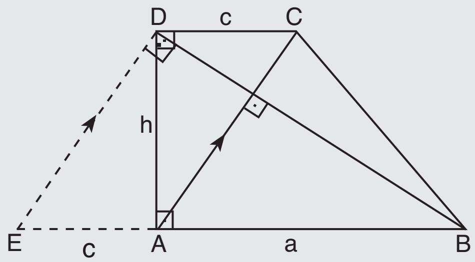
İnceleyerek Öğrenelim



Köşegenleri dik olan bir ABCD dik yamuğunda

[AB] // [CD], [AB] ⊥ [AD], [AC] ⊥ [BD], |AB| = a, |CD| = c

ve yamuğun yüksekliği |AD| = h ise $h^2 = a.c$ olur.
Gösterelim.

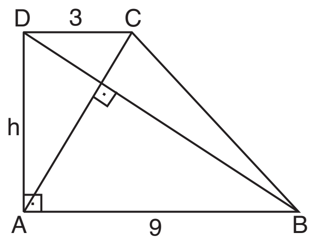


Şekilde görüldüğü gibi DE // [AC] çizilsin.

AB ∩ DE = {E} olmak üzere ACDE bir paralelkenar olacağından |AE| = |CD| = c ve [DE] ⊥ [BD] olur.

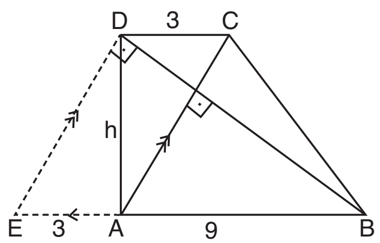
Sonuçta DEB dik üçgeninde [DA] ⊥ [BE] olduğundan Öklit Bağıntısı ile $h^2 = ac$ bulunur.

Örnek



ABCD dik yamuk, [AB] // [CD], [AB] ⊥ [AD], [AC] ⊥ [BD], |AB| = 9 cm ve |CD| = 3 cm ise
yamuğun yüksekliği kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm

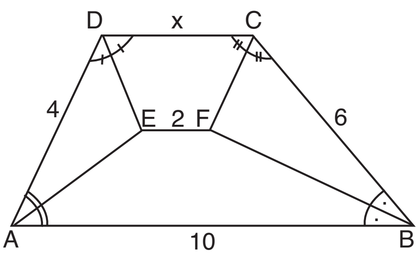


Şekildeki gibi [DE] // [AC] çizerek AB ∩ DE = {E} isimlendirilirse yöndeş açıların eşliğinden [BD] ⊥ [DE] ve ACDE paralelkenarında |AE| = |CD| = 3 cm olur.

BDE dik üçgeninde Öklid Bağıntısı na göre,

$h^2 = 3.9 = 27 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

Örnek

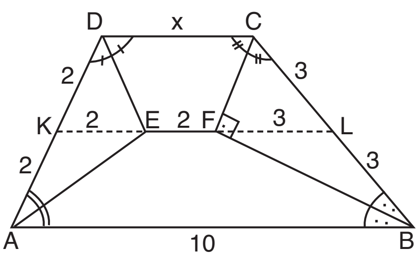


ABCD yamuğunda; [AB] // [CD]

[AE], [DE] , [FB] ve [CF] açıortaylar

|AB| = 10 cm, |AD| = 4 cm, |BC| = 6 cm, |EF| = 2 cm olduğuna göre, |CD| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Bir yamukta yan kenarlar ile tabanların oluşturduğu açıların açıortayları, orta taban üzerinde dik kesiştiğinden [EF] yan kenarlara doğru uzatılırsa [KL] orta taban, [KE], AED dik üçgeninde hipotenüsün kenarortayı ve [FL], BCF dik üçgeninde hipotenüsün kenarortayı olur.

Bu yüzden, |AK| = |DK| = |KE| = 2 cm ve

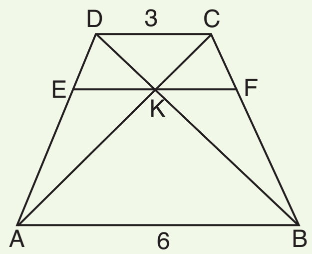
|BL| = |LC| = |FL| = 3 cm ⇒ |KL| = 2 + 2 + 3 = 7 cm

orta tabanın uzunluğu olarak bulunur. Sonuçta

$$|KL| = \frac{|AB| + |CD|}{2} \Rightarrow 7 = \frac{10 + x}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ cm olur.}$$

Alıştırmalar

1.



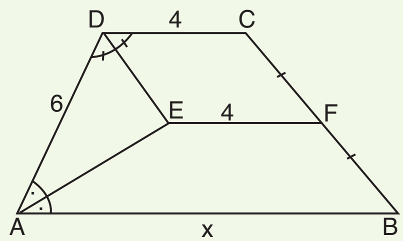
ABCD yamuğunda; [AB] // [CD] // [EF],

[AC] ∩ [BD] ∩ [EF] = {K}

|CD| = 3 cm , |AB| = 6 cm ise

|EF| kaç cm dir?

2.



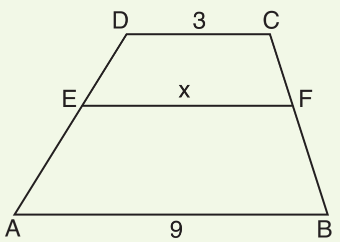
ABCD yamuğunda; [AB] // [CD],

[AE] ve [DE] iç açıortaylar,

|FB| = |FC|, |AD| = 6 cm, |CD| = |EF| = 4 cm

olduğuna göre, |AB| = x kaç cm dir?

3.

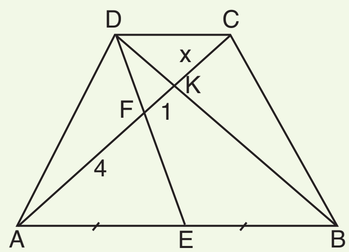


ABCD yamuk, [AB] // [CD] // [EF] dir.

|FB| = 2 |FC|, |AB| = 9 cm ve |CD| = 3 cm ise

|EF| = x kaç cm dir?

4.



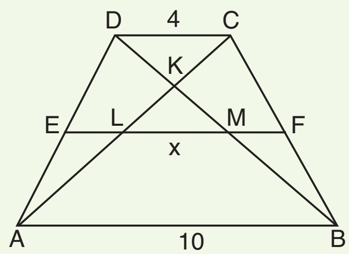
ABCD yamuk, [AB] // [CD],

[AC] ∩ [BD] = {K}, [AC] ∩ [DE] = {F},

|AE| = |BE|, |FK| = 1 cm, |AF| = 4 cm

olduğuna göre, |KC| = x kaç cm dir?

5.



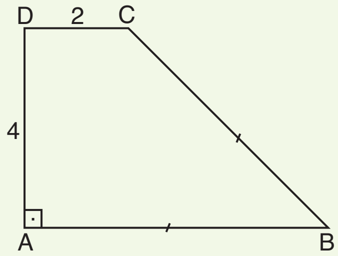
ABCD yamuk, [AB] // [CD],

[AC] ∩ [BD] = {K}, [EF] orta taban,

|CD| = 4 cm, |AB| = 10 cm ise

|LM| = x kaç cm dir?

6.



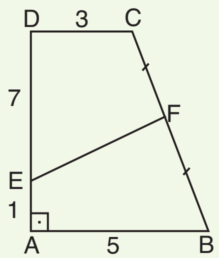
ABCD dik yamuk, [AB] // [CD], [AB] ⊥ [AD]

|AB| = |BC|, |AD| = 4 cm, |CD| = 2 cm ise

ABCD yamuğunun çevre uzunluğu kaç cm dir?

7. Köşegenleri dik kesişen bir ABCD yamuğunda; [AB] // [CD], |AC| = 12 cm, |BD| = 16 cm olduğuna göre, orta taban uzunluğu kaç cm dir?

8.



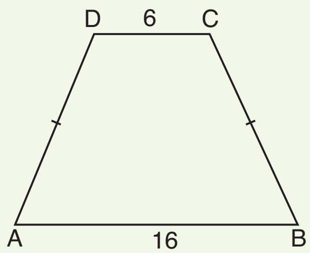
ABCD dik yamuk, [AB] // [CD], [AB] ⊥ [AD],

|FB| = |FC|, |AB| = 5 cm, |CD| = 3 cm, |AE| = 1 cm

ve |DE| = 7 cm ise

|EF| kaç cm dir?

9.



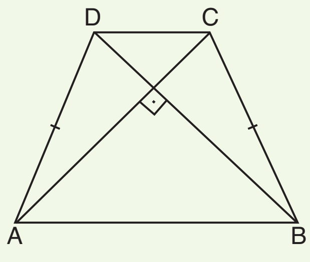
ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [CD] ,

|AD| = |BC|, |AB| = 16 cm, |CD| = 6 cm ve

yamuğun yüksekliği 12 cm dir.

Buna göre, bu yamuğun çevre uzunluğu kaç cm dir?

10.

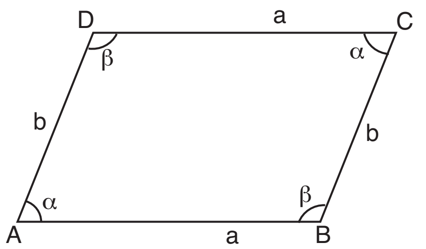


ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [CD], [AC] ⊥ [BD],

|AB| = 2|CD| = 8 cm ve |AD| = |BC| ise

yamuğun yüksekliği kaç cm dir?

PARALELKENAR VE PARALELKENARIN ÖZELLİKLERİ

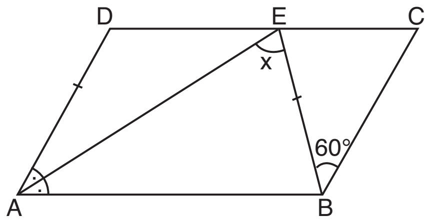


Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene paralelkenar denir. Paralelkenarda karşılıklı kenarlar ve karşılıklı açılar eş, komşu açılar bütünlerdir.

Şekildeki ABCD paralelkenarında,

- $|AB| = |CD| = a$, $|AD| = |BC| = b$
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = \beta$ ve $\alpha + \beta = 180°$ olur.

Örnek



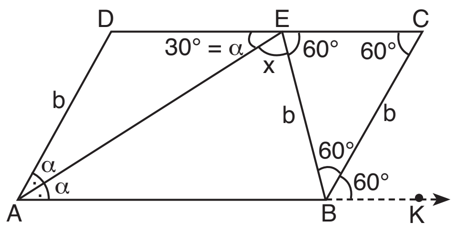
ABCD bir paralelkenar,

$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAE})$,

$m(\widehat{CBE}) = 60°$, $|AD| = |BE|$ ise

$m(\widehat{AEB}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Paralelkenarda karşılıklı kenarlar eş olduğundan,

$|BC| = |AD| = |BE| = b$ ve BCE üçgeninde

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{E}) = 60°$ bulunur.

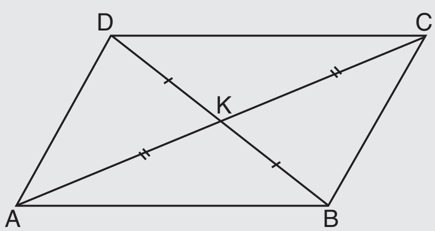
ABCD paralelkenar olduğundan, AB // CD,

iç ters ve yöndeş açılar eş olduğundan da

$2\alpha = m(\widehat{CBK}) = m(\widehat{C}) = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{AED}) = 30°$ ve sonuçta $m(\widehat{CED}) = 30 + x + 60 = 180° \Rightarrow x = 90°$ bulunur.

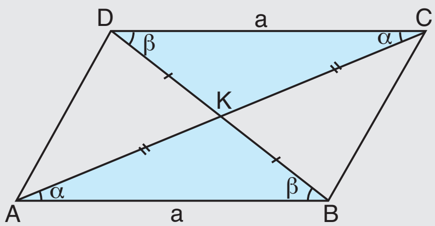
İnceleyerek Öğrenelim



Bir paralelkenarda köşegenler birbirini ortalayarak keser.

Şekilde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ ise

$|AK| = |CK|$ ve $|BK| = |DK|$ olur. Gösterelim.

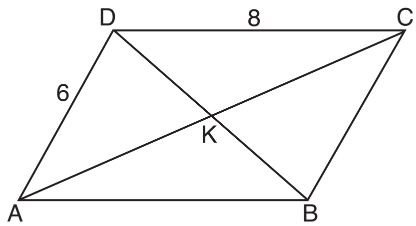


ABCD paralelkenarında [AB] // [CD] ve

$|AB| = |CD| = a$ olduğundan şekilde A. K. A. eşlik kuralına göre;

$\widehat{KCD} \cong \widehat{KAB} \Rightarrow |KC| = |KA|$ ve $|KD| = |KB|$ olur.

Örnek



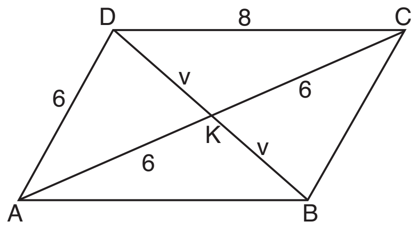
ABCD paralelkenarında;

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

$|AD| = 6$ cm , $|CD| = 8$ cm ve $|AC| = 12$ cm

olduğuna göre, $|BD|$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından

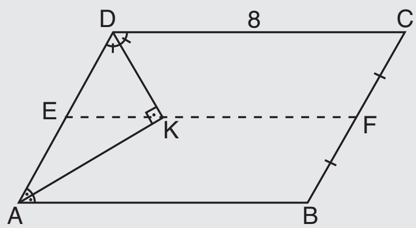
$|AK| = |CK| = 6$ cm ve $|BK| = |DK| = v$ olur.

ACD üçgeninde Kenarortay Teoremi'ni kullanırsak,

$$6^2 + 8^2 = 2v^2 + \frac{12^2}{2} \Rightarrow 100 = 2v^2 + 72 \Rightarrow 2v^2 = 28 \Rightarrow v^2 = 14 \Rightarrow v = \sqrt{14}\,\text{cm} \text{ ve}$$

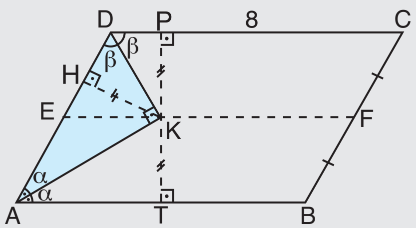
$|BD| = 2v = 2\sqrt{14}$ cm bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim



Paralelkenarda ardışık iki köşedeki iç açıortaylar orta taban üzerinde dik kesişir.

Şekildeki ABCD paralelkenarında [AK], [DK] açıortay ve [EF] orta taban ise $[AK] \perp [DK]$ ve $K \in [EF]$ olur. Gösterelim.



[AK] ve [DK] açıortay olduğundan,

$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{BAK}) = \alpha$,

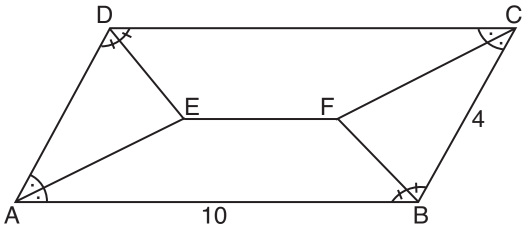
$m(\widehat{ADK}) = m(\widehat{CDK}) = \beta$ ise

$[AB] // [CD] \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ ve

ADK üçgeninde $[AK] \perp [DK]$ bulunur. Diğer yandan açıortay üzerindeki her nokta açının kollarına eşit uzaklıkta olduğundan şekilde,

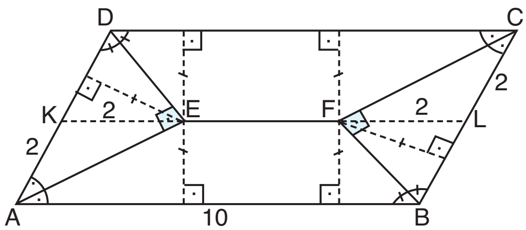
$|KT| = |KH| = |KP| \Rightarrow |KP| = |KT| \Rightarrow$ K noktası ABCD paralelkenarının orta tabanı üzerinde olur.

Örnek



ABCD paralelkenarında; [AE] , [DE] , [BF] ve [CF] açıortay, |AB| = 10 cm , |BC| = 4 cm ise, |EF| kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm

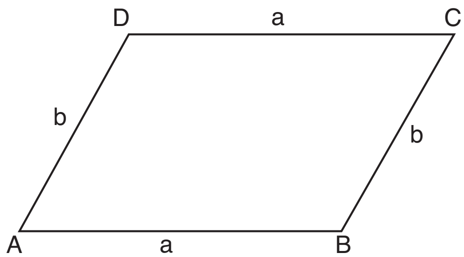


Bir açıortayın her noktasının açının kenarlarına olan uzaklıkları eşit olduğundan, [EF] paralelkenarın orta tabanı üzerindedir. EF doğrusu paralelkenarın yan kenarlarını K ve L noktalarından keserse ADE ve BCF üçgenleri dik üçgenler ve hipotenüse ait kenarortaylar hipotenüste ayırdığı parçalarla eş olacağından;

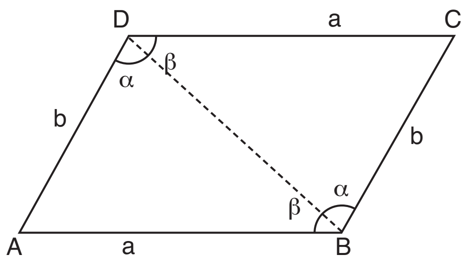
|EK| = |AK| = |DK| = 2 cm ve |FL| = |BL| = |CL| = 2 cm olur. |AB| = |CD| = |KL| = 10 cm verildiğinden |EF| = |KL| – |EK| – |FL| = 10 – 2 – 2 = 10 – 4 = 6 cm bulunur.

Sonuçlar:

1.



Karşılıklı kenarları eş olan her dörtgen bir paralelkenardır. Gösterelim.



Şekildeki gibi bu dörtgenin [BD] köşegeni çizilirse,

ABD ve CDB tüm kenarları eş iki üçgen olur.

K.K.K. eşlik kuralından

$\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB}$ ve

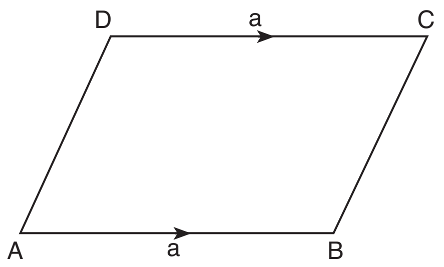
Eş üçgenlerde karşılıklı açılar eş olduğundan,

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CBD}) = \alpha \Rightarrow$ [AD] // [BC]

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = \beta \Rightarrow$ [AB] // [CD] bulunur.

Dikkat edilirse burada “İki doğru bir kesenle kesildiğinde iç ters açı çiftleri eş ise bu iki doğru paraleldir.” karşıt teoremini kullandık.

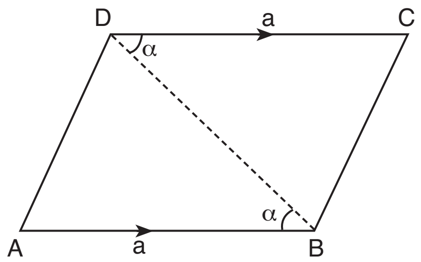
2.



Bir ABCD dörtgeninde,

$[AB] \parallel [CD]$ ve $|AB| = |CD|$ ise,

ABCD bir paralelkenardır. Gösterelim.

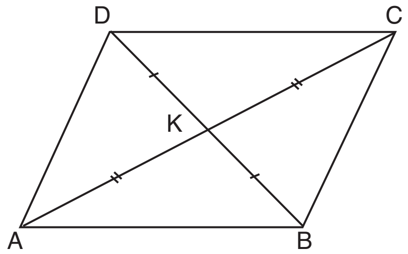


[BD] köşegeni çizildiğinde, $[AB] \parallel [CD]$ olduğundan, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = \alpha$, $|AB| = |CD| = a$ ve $|BD| = |BD|$ olduğundan K.A.K. eşlik kuralından,

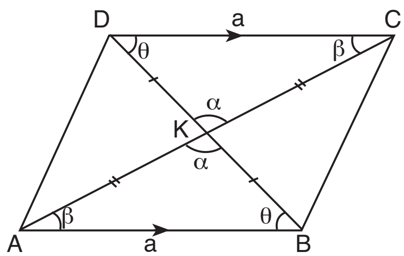
$\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB} \Rightarrow |AD| = |BC|$ bulunur.

Sonuçta karşılıklı kenarları eş olan ABCD dörtgeni bir paralelkenar olur.

3.



Köşegenleri birbirini ortalayan bir ABCD dörtgeni paralelkenardır. Gösterelim.



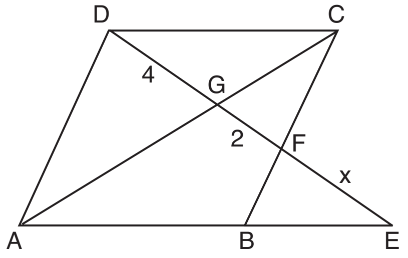
ABCD dörtgeninde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $|AK| = |CK|$ ve $|BK| = |DK|$ olsun.

$m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{CKD}) = \alpha$ olduğundan, K.A.K. eşlik kuralına göre, $\widehat{AKB} \cong \widehat{CKD}$ olur.

Dolayısıyla, $|AB| = |CD| = a$, $m(\widehat{KAB}) = m(\widehat{KCD}) = \beta$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = \theta$ bulunur.

Şekilde iç ters açı çiftleri eş olduğundan $[AB] \parallel [CD]$ elde edilir. 2. sonuca göre, karşılıklı iki kenarı hem paralel hem de eş olan ABCD dörtgeni bir paralelkenardır.

Örnek



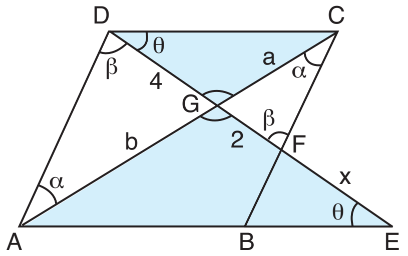
ABCD paralelkenar,

ADE bir üçgen,

$|DG| = 4$ cm , $|FG| = 2$ cm ise,

$|EF| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Şekilde $|CG| = a$, $|AG| = b$ olsun.

[AD] // [BC] olduğundan,

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CAD}) = \alpha$, $m(\widehat{CFD}) = m(\widehat{ADE}) = \beta$

ve A.A. benzerlik kuralından

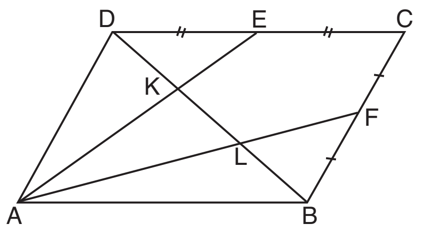
$\widehat{CGF} \sim \widehat{AGD}$ ... ① olur.

[AE] // [CD] olduğundan yine iç ters açılar $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{CDE}) = \theta$ ve ters açılar $m(\widehat{CGD}) = m(\widehat{AGE})$ olduğundan A.A. benzerlik kuralına göre $\widehat{AGE} \sim \widehat{CGD}$ ... ② olur.

① ve ② benzerliklerinde $\frac{a}{b}$ ortak oran olduğundan,

$\frac{2}{4} = \frac{a}{b} = \frac{4}{(x+2)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x+2} \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$ cm bulunur.

Örnek



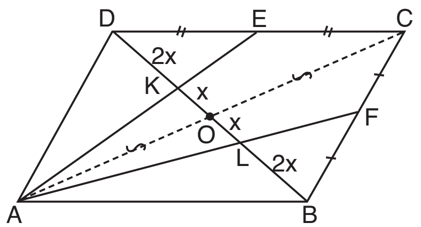
ABCD paralelkenarında;

E ve F kenarların orta noktaları,

$[AE] \cap [BD] = \{K\}$, $[AF] \cap [BD] = \{L\}$

ve $|BD| = 6$ cm olduğuna göre, $|KL|$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



[AC] köşegenini de çizersek, $[AC] \cap [BD] = \{O\}$ olsun.

Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından,

$|AO| = |CO|$ ve $|BO| = |DO|$ olur.

Dikkat edilirse, ACD üçgeninde K ağırlık merkezidir

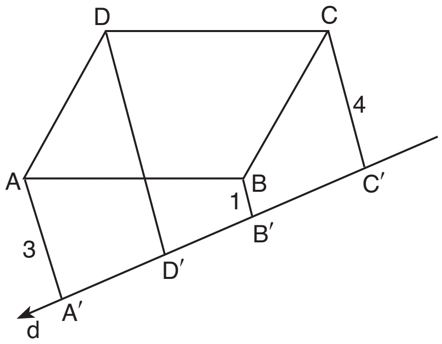
ve $|OK| = x \Rightarrow |DK| = 2x \Rightarrow |DO| = |BO| = 3x$ olur.

ABC üçgeninde de L ağırlık merkezi olduğundan,

$|OL| = \frac{3x}{3} = x \Rightarrow |BL| = 2x$ ve $|DK| = |KL| = |BL| = 2x$

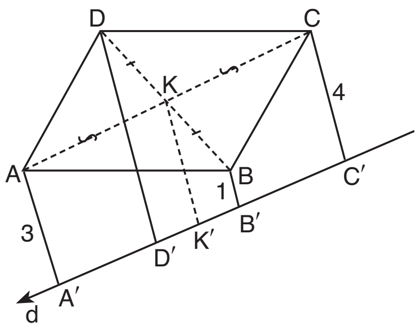
bulunur. Sonuçta $|BD| = 6x = 6 \Rightarrow x = 1$ ve $|KL| = 2x = 2$ cm olur.

Örnek



Yanda verilen düzlemsel şekilde ABCD paralelkenar,
$[AA'] \,//\, [DD'] \,//\, [BB'] \,//\, [CC']$,
A', B', C' ve $D' \in d$ olmak üzere,
$|AA'| = 3$ cm , $|CC'| = 4$ cm ve $|BB'| = 1$ cm
olduğuna göre, $|DD'|$ kaç cm dir? Bulalım.

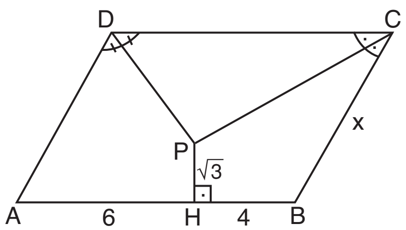
Çözüm



ABCD paralelkenarında,
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $|DD'| = x$ olmak üzere , [AC] ile [BD] köşegenleri ve $[KK'] \,//\, [AA']$ çizilsin.
Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından,
$ACC'A'$ yamuğunda $[KK']$ orta taban ve $|KK'| = \dfrac{3+4}{2}$ olur. Benzer şekilde, $BDD'B'$ yamuğunda da $[KK']$ orta taban ve $[KK'] = \dfrac{x+1}{2}$ olur.

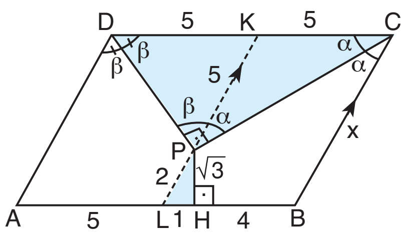
Sonuçta $\dfrac{3+4}{2} = |KK'| = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow 3 + 4 = x + 1 \Rightarrow x = 6$ cm bulunur.

Örnek



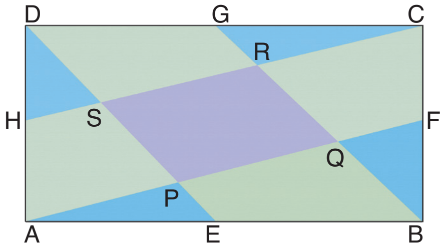
ABCD paralelkenarında;
[DP] ve [CP] açıortaylar
$[PH] \perp [AB]$, $|AH| = 6$ cm , $|BH| = 4$ cm
ve $|PH| = \sqrt{3}$ cm olduğuna göre,
$|BC| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



P noktasından geçen
$[KL] \,//\, [BC]$ çizilirse,
iç ters açı çiftlerinin eşliğinden
$m(\widehat{BCP}) = m(\widehat{DCP}) = m(\widehat{CPK}) = \alpha$
$m(\widehat{ADP}) = m(\widehat{CDP}) = m(\widehat{DPK}) = \beta$
$[DP] \perp [CP]$ ve $|PK| = |CK| = |DK| = |AL| = |BL| = 5$ cm
buradan $|HL| = 1$ cm bulunur.
PLH özel dik üçgeninde $|PL| = 2$ cm ve sonuçta $|KL| = |BC| = x = 2 + 5 = 7$ cm olur.

Örnek

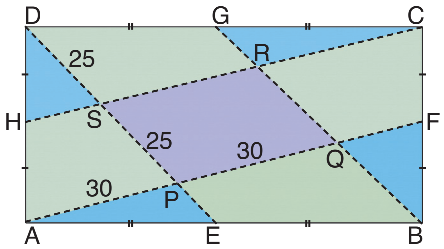


Resimde ABCD dikdörtgeni biçimindeki masa örtüsünde E, F, G, H kenarların orta noktalarıdır.

$|DP| = 50$ cm , $|AQ| = 60$ cm ise,

PQRS dörtgensel bölgesinin çevresini bulalım.

Çözüm



Masa örtüsünde,

$|BE| = |DG|$ ve $[BE] \parallel [DG]$ $\Rightarrow$ EBGD paralelkenar ve

$[BG] \parallel [DE]$ ...... ①

$|AH| = |CF|$ ve $[AH] \parallel [CF]$ $\Rightarrow$ AFCH paralelkenar ve

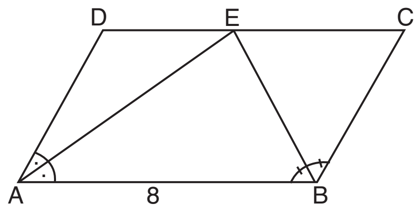
$[AF] \parallel [CH]$ ......②

① ve ② den PQRS bir paralelkenar olur. ABQ üçgeninde $[EP] \parallel [BQ]$ $\Rightarrow$ Temel Orantı Teoremi'ne göre, $\dfrac{|AE|}{|BE|} = \dfrac{|AP|}{|PQ|} = 1 \Rightarrow |AP| = |PQ|$ ve $|AQ| = 60$ cm olduğundan,

$|AP| = |PQ| = |SR| = 30$ cm olur. Benzer şekilde DAP üçgeninde,

$[HS] \parallel [AP]$ $\Rightarrow$ Temel Orantı Teoremi'ne göre, $\dfrac{|DH|}{|AH|} = \dfrac{|DS|}{|SP|} = 1 \Rightarrow |DS| = |SP|$ ve $|DP| = 50$ cm verildiğinden, $|DS| = |SP| = |RQ| = 25$ cm olur. Sonuçta Çevre(PQRS) $= 2(30 + 25) = 110$ cm bulunur.

Örnek

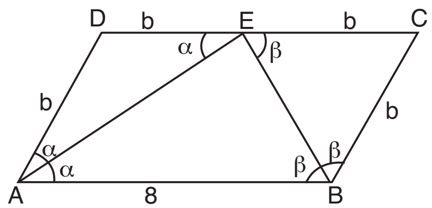


ABCD paralelkenarında [AE] ve [BE] iç açıortaylar,

$E \in [CD]$, $|AB| = 8$ cm ise,

ABCD paralelkenarının çevre uzunluğu kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



İç ters açıların ölçüleri eşit olduğundan şekilde,

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{AED}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{CEB}) = \beta$ olur.

ADE ve BCE üçgenleri ikizkenar ve

$|AD| = |DE| = b$ ve $|BC| = |CE| = b$ olduğundan,

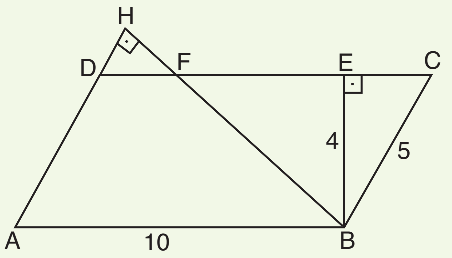
$|CD| = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ cm bulunur. ABCD paralelkenarında tüm kenar uzunluklarını toplarsak, $Ç(ABCD) = 8 + 8 + 4 + 4 = 24$ cm bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

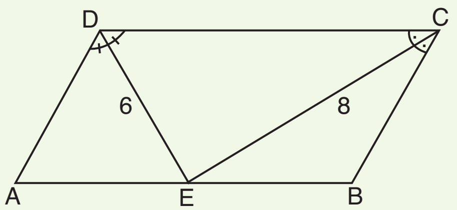
( ) Karşılıklı açıları eş olan her dörtgen paralelkenardır.
( ) Köşegenleri birbirini ortalayan her dörtgen paralelkenardır.
( ) Bir dörtgende karşılıklı iki kenar hem paralel hem de eş ise bu dörtgen paralelkenardır.

2.



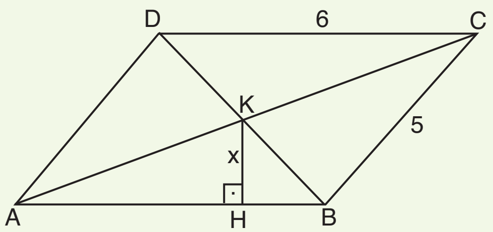
ABCD paralelkenar, ABH dik üçgen,
$[AH] \perp [BH]$, $[BE] \perp [CD]$,
$|AB| = 10$ cm, $|BC| = 5$ cm ve $|BE| = 4$ cm ise,
B noktasının [AD] kenarına uzaklığı kaç cm dir?

3.



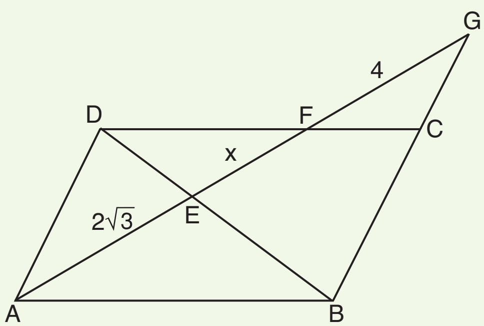
ABCD paralelkenarında,
[CE] ve [DE] açıortaylar,
$|DE| = 6$ cm, $|CE| = 8$ cm ise,
ABCD paralelkenarının çevresi kaç cm dir?

4.



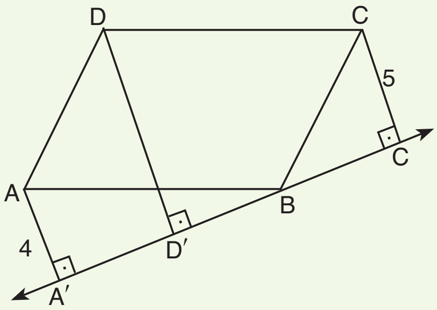
ABCD paralelkenarında,
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $[KH] \perp [AB]$,
$|BC| = |BD| = 5$ cm, $|CD| = 6$ cm ise,
$|KH| = x$ kaç cm dir?

5.



ABCD paralelkenar, ABG bir üçgen ve
$[BD] \cap [AG] = \{E\}$ dir.
$|AE| = 2\sqrt{3}$ cm, $|FG| = 4$ cm ise,
$|EF| = x$ kaç cm dir?

6.

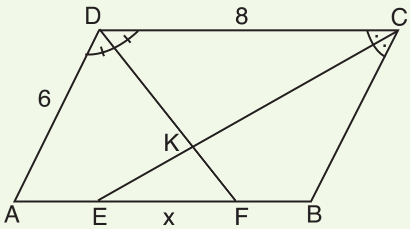


ABCD paralelkenarının B köşesinden geçen bir d doğrusu verilmiştir. A, D ve C köşelerinin d doğrusu üzerindeki dik izdüşümleri A′, D′, C′ ve

$|AA'| = 4$ cm , $|CC'| = 5$ cm ise,

$|DD'|$ uzunluğu kaç cm dir?

7.



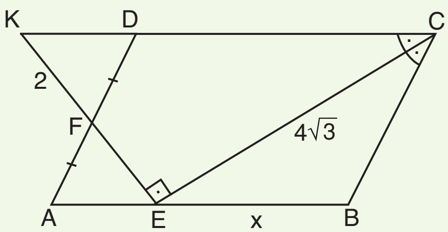
ABCD paralelkenarında,

$[CE] \cap [DF] = \{K\}$, [CE] ve [DF] açıortaylar,

$|AD| = 6$ cm , $|CD| = 8$ cm ise,

$|EF| = x$ kaç cm dir?

8.



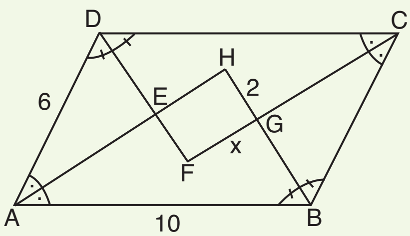
ABCD paralelkenar, CEK dik üçgen

$[CE] \perp [EK]$, $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{KCE})$

$|CE| = 4\sqrt{3}$ cm , $|KF| = 2$ cm ise,

$|BE| = x$ kaç cm dir?

9.



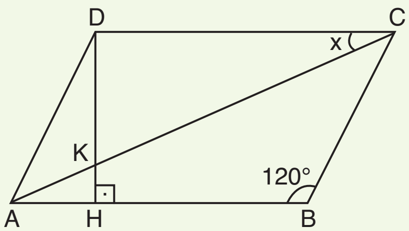
ABCD paralelkenarında,

[AH] , [BH] , [CF] ve [DF] açıortaylar,

$|AB| = 10$ cm , $|AD| = 6$ cm , $|HG| = 2$ cm ise,

$|FG| = x$ kaç cm dir?

10.



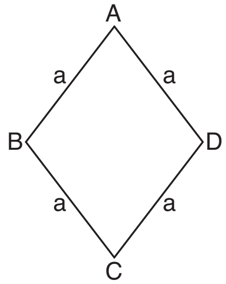
ABCD paralelkenar, $[DH] \perp [AB]$,

$[AC] \cap [DH] = \{K\}$, $m(\widehat{ABC}) = 120°$,

$|CK| = 2\,|BC|$ ise,

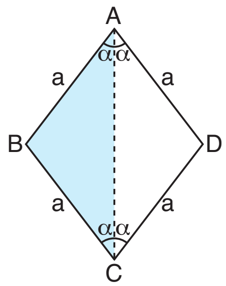
$m(\widehat{ACD}) = x$ kaç derecedir?

EŞKENAR DÖRTGEN VE EŞKENAR DÖRTGENİN ÖZELLİKLERİ



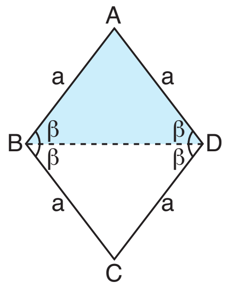
Tüm kenarları eş olan dörtgene eşkenar dörtgen denir.

Karşılık kenarları eş olduğundan eşkenar dörtgen bir paralelkenardır ve paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.



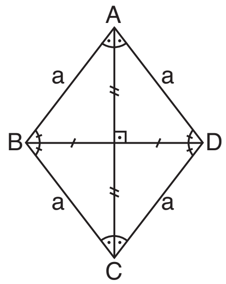
Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegeni çizlirise K.K.K. eşlik kuralına göre,

$\widehat{ACB} \cong \widehat{ACD} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACD}) \Rightarrow$ [AC] köşegeni açıortay olur.



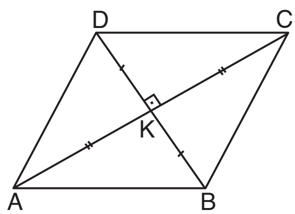
ABCD eşkenar dörtgeninde [BD] köşegeni çizlirse K.K.K. eşlik kuralına göre,

$\widehat{ABD} \cong \widehat{CBD} \Rightarrow m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) \Rightarrow$ [BD] köşegeni de açıortaydır.



İkizkenar üçgenlerde tepeden çizilen açıortay tabana dik olup tabanı ortaladığından şekilde görüldüğü gibi bir eşkenar dörtgende köşegenler diktir ve birbirini ortalar.

Bir paralelkenarın köşegenleri dik ise bu paralelkenar eşkenar dörtgen olur. Gösterelim.

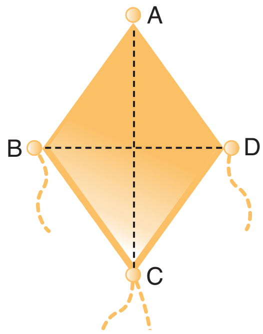


ABCD bir paralelkenar, $[AC] \perp [BD]$ ve $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ olsun. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından,

$|AK| = |CK|$ ve $|BK| = |DK|$ olur. $\widehat{AKB}$, $\widehat{AKD}$, $\widehat{CKB}$ ve $\widehat{CKD}$ dik üçgenlerinde karşılıklı dik kenarlar eş olduğundan K.A.K. eşlik kuralına göre, $\widehat{AKB} \cong \widehat{AKD} \cong \widehat{CKB} \cong \widehat{CKD}$ olur.

Sonuçta $|AB| = |AD| = |BC| = |CD| = a$ bulunur. Köşegenleri dik bir paralelkenar eşkenar dörtgendir.

Örnek

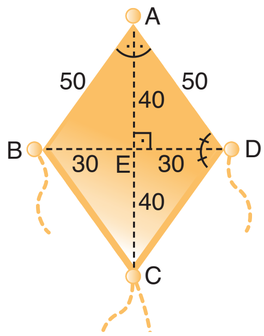


Resimdeki ABCD eşkenar eşkenar dörtgeni biçimindeki uçurtmada [AC] ve [BD] çıtalarının uzunlukları,

|AC| = 80 cm , |BD| = 60 cm ise,

uçurtmayı çevreleyen ipin uzunluğu kaç cm dir? Bulalım.

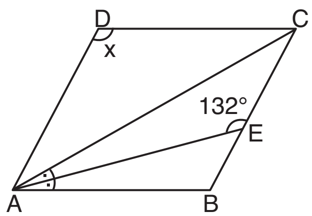
Çözüm



Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini resimdeki gibi E noktasında dik ortaladığından, |BE| = |DE| = 30 cm ve |AE| = |CE| = 40 cm bulunur.

ABE dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile |AB| = 50 cm olacağından, Ç(ABCD) = 4.50 = 200 cm olur.

Örnek

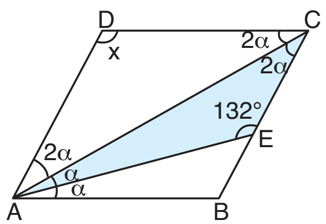


ABCD eşkenar dörtgeninde,

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CAE})$ ve $m(\widehat{AEC}) = 132°$

olduğuna göre, $m(\widehat{ADC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CAE}) = \alpha$ olsun.

ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegeni açıortay olduğundan,

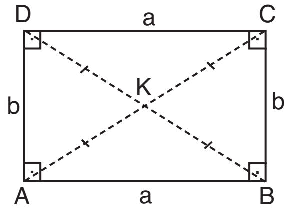
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$ olur. ACE üçgeninde iç açı ölçüleri toplamı,

$132° + \alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow 3\alpha = 48° \Rightarrow \alpha = 16°$ ve

ACD üçgeninde iç açı ölçüleri toplamı,

$x + 4\alpha = 180° \Rightarrow x + 4.16° = 180° \Rightarrow x + 64° = 180° \Rightarrow x = 116°$ bulunur.

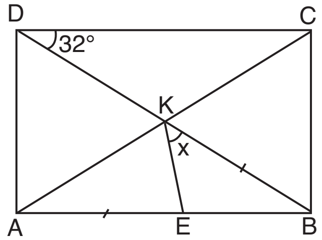
DİKDÖRTGEN VE DİKDÖRTGENİN ÖZELLİKLERİ



Açılarından biri dik açı olan bir paralelkenara dikdörtgen denir. Bu yüzden dikdörtgen paralelkenarın tüm özelliklerini taşır. Tüm iç açıları dik açı olduğundan bir dikdörtgende köşegenler birbirine eştir. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,

$|AC| = |BD|$ ve dolayısıyla $|AK| = |BK| = |CK| = |DK|$ olur.

Örnek

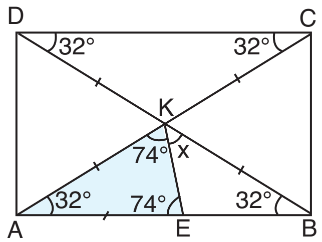


ABCD dikdörtgeninde; $[AC] \cap [BD] = \{K\}$

$m(\widehat{BDC}) = 32^\circ$, $|AE| = |BK|$ ise,

$m(\widehat{BKE}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

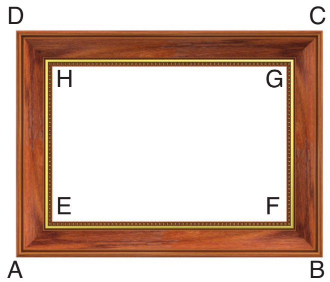


Dikdörtgende köşegenler eş olup birbirini ortaladığından,

$|KA| = |KB| = |KC| = |KD|$ olur. Bu durumda AKE ikizkenar üçgen ve iç ters açılardan $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAC}) = 32^\circ$ olduğundan,

$m(\widehat{AKE}) = m(\widehat{AEK}) = 74^\circ$ sonuçta BEK üçgeninde dış açı ölçüsü, $74^\circ = x + 32^\circ \Rightarrow x = 42^\circ$ bulunur.

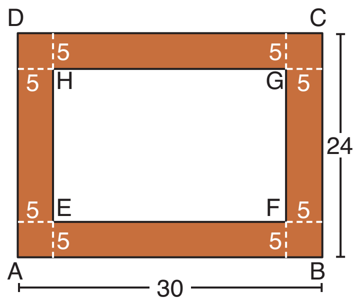
Örnek



Yanda verilen fotoğraf çerçevesinin en dışındaki ABCD dikdörtgeninde, $|AB| = 30$ cm , $|BC| = 24$ cm dir.

Çerçevenin kalınlığı 5 cm olduğuna göre, içte fotoğraf konulacak EFGH dikdörtgensel bölgesinin kenar uzunluklarını bulalım.

Çözüm

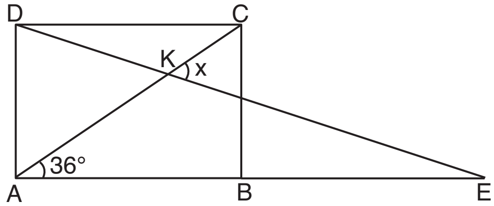


Çerçevenin kalınlığı 5 cm olduğundan şekilde,

$|AB| = 30 = |EF| + 10 \Rightarrow |EF| = 20$ cm,

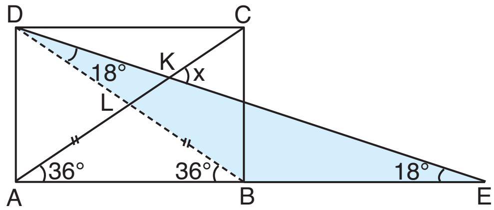
$|BC| = 24 = |FG| + 10 \Rightarrow |FG| = 14$ cm olur.

Örnek



ABCD dikdörtgen, $[AC] \cap [DE] = \{K\}$,
$m(\widehat{CAE}) = 36^\circ$ ve $|AC| = |BE|$ ise,
$m(\widehat{CKE}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

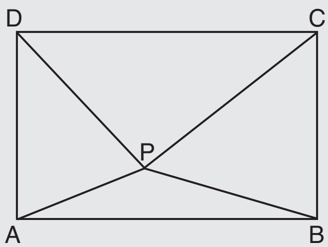
Çözüm



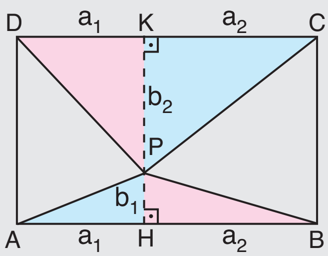
[BD] köşegenini çizelim. $[AC] \cap [BD] = \{L\}$ olsun.
$|AC| = |BD| = |BE|$ ve köşegenler birbirini ortaladığından ABL üçgeninde, $|AL| = |BL|$ ve
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CAE}) = 36^\circ$ elde edilir.

Diğer yandan $|BD| = |BE|$ olduğundan, BDE üçgeninde $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BDE})$ ve dış açı ölçüsü $36^\circ = 2\,m(\widehat{BED}) \Rightarrow m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BDE}) = 18^\circ$ olur. Sonuçta KAE üçgeninin dış açı ölçüsü,
$m(\widehat{CKE}) = x = 36 + 18 = 54^\circ$ bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim



ABCD dikdörtgeni ile bir P noktası verilsin.
Şekilde daima,
$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$ olur. Gösterelim.

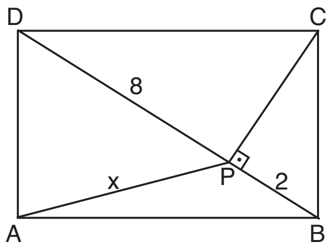


Şekildeki gibi P noktasından geçen [KH] // [BC] çizilirse
$\overset{\frown}{PAH}$, $\overset{\frown}{PCK}$, $\overset{\frown}{PBH}$, $\overset{\frown}{PDK}$ dik üçgen;
$|AH| = |DK| = a_1$ ve $|BH| = |CK| = a_2$ olur.
$|PH| = b_1$ ve $|KP| = b_2$ ise dik üçgenlerde Pisagor Teoremi ile

$$\left.\begin{aligned} |PA|^2 + |PC|^2 &= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ |PB|^2 + |PD|^2 &= (a_2^2 + b_1^2) + (a_1^2 + b_2^2) = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ olduğundan}$$

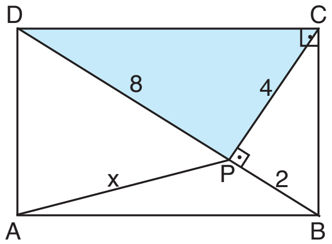
$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$ bulunur.

Örnek



ABCD dikdörtgeninde $[CP] \perp [BD]$, $|DP| = 8$ cm ve $|BP| = 2$ cm olduğuna göre $|AP| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



BCD dik üçgeninde $[CP] \perp [BD]$ olduğundan Öklit Bağıntısı ile

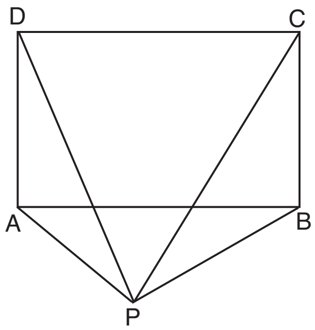
$|CP|^2 = |BP|.|DP| \Rightarrow |CP|^2 = 2.8 = 16 \Rightarrow |CP| = 4$ cm bulunur.

ABCD dikdörtgen olduğundan şekilde,

$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 \Rightarrow x^2 + 4^2 = 2^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 68,$

$x^2 = 52 \Rightarrow x = 2\sqrt{13}$ cm bulunur.

Örnek

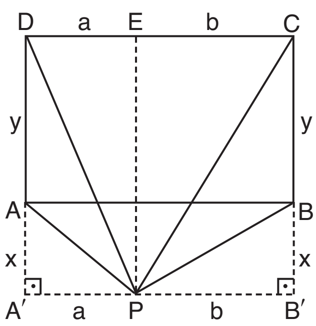


ABCD dikdörtgeninde P dış bölgede bir nokta ise,

$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$

olduğunu gösterelim.

Çözüm



P noktasından geçen $A'B'$ // [AB] doğrusunu çizerek $A'B'CD$ dikdörtgenini oluşturalım.

$|A'P| = |DE| = a$, $|B'P| = |CE| = b$, $|AA'| = |BB'| = x$

ve $|BC| = |AD| = y$ olarak isimlendirilirse,

$AA'P$ ve $PB'C$ dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi'nden,

$|AP|^2 = x^2 + a^2$, $|CP|^2 = b^2 + (x + y)^2$

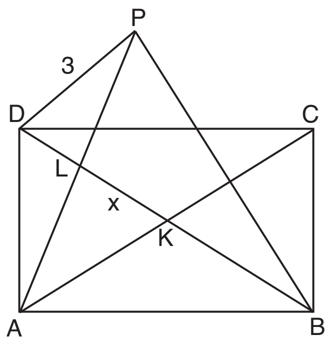
$|AP|^2 + |CP|^2 = a^2 + b^2 + x^2 + (x+y)^2$ bulunur.

PDA' ve PBB' dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi'nden,

$|PD|^2 = a^2 + (x + y)^2$, $|PB|^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow |BP|^2 + |PD|^2 = a^2 + b^2 + x^2 + (x + y)^2$ elde edilir.

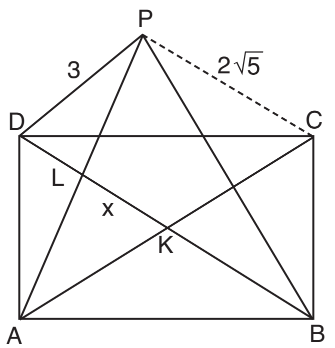
Dikkat edilirse, $|AP|^2 + |CP|^2 = a^2 + b^2 + x^2 + (x + y)^2 = |BP|^2 + |DP|^2$ olmaktadır.

Örnek



ABCD dikdörtgen, P dış bölgesinde bir noktadır.
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $|AL| = |LP|$, $|DP| = 3$ cm ,
$|BP| = 6$ cm , $|AP| = 5$ cm ise
$|KL| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



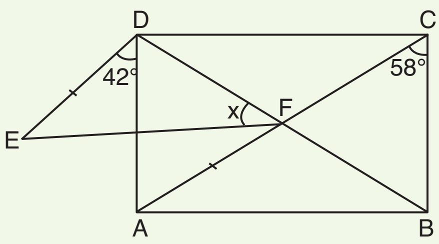
[CP] çizilirse ABCD dikdörtgen olduğundan,
$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2 \Rightarrow 5^2 + |CP|^2 = 6^2 + 3^2$
$|CP|^2 = 20 \Rightarrow |CP| = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.
Dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından $|AK| = |CK|$ olur.
$|AL| = |PL|$ verildiğinden ACP üçgeninde [KL] orta taban ve
sonuçta, $|KL| = x = \dfrac{|CP|}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ cm bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun kelimeleri yazınız.

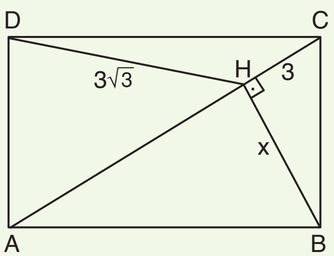
- Bir açısı dik açı olan paralelkenara .... denir.
- Dikdörtgende köşegen uzunlukları ....

2.



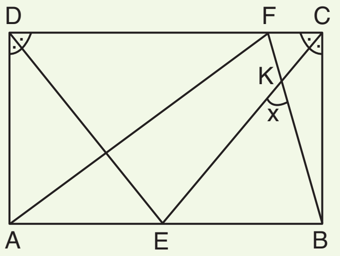
ABCD dikdörtgen, $[AC] \cap [BD] = \{F\}$,
$m(\widehat{ADE}) = 42^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 58^\circ$, $|DE| = |AF|$ ise,
$m(\widehat{DFE}) = x$ kaç derecedir?

3.



ABCD dikdörtgen, $[BH] \perp [AC]$,
$|DH| = 3\sqrt{3}$ cm , $|CH| = 3$ cm ise,
$|BH| = x$ kaç cm dir?

4.



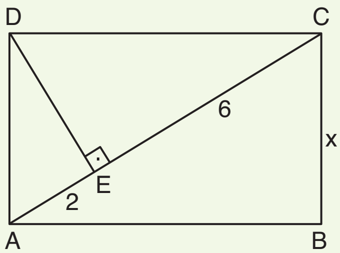
ABCD dikdörtgeninde, $E \in [AB]$,

[CE] ile [DE] açıortaylar,

$|AB| = |AF|$ ise,

$m(\widehat{BKE}) = x$ kaç derecedir?

5.

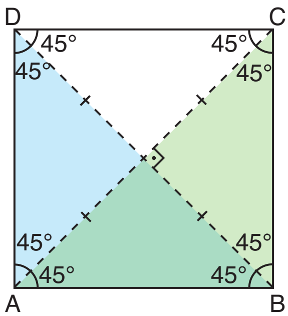


ABCD dikdörtgeninde, $[AC] \perp [DE]$,

$|AE| = 2$ cm , $|CE| = 6$ cm ise,

$|BC| = x$ kaç cm dir?

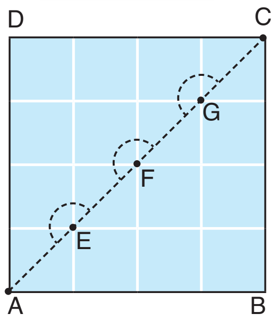
KARE VE KARENİN ÖZELLİKLERİ



Tüm kenarları birbirine eş olan dikdörtgene kare denir. Kare aynı zamanda bir eşkenar dörtgen de olduğundan köşegenleri açıortaydır ve birbirini dik ortalar.

ABCD karesinde $|AB| = a$ ise ABC ve ABD ikizkenar dik üçgenlerinden $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$ olur.

Örnek



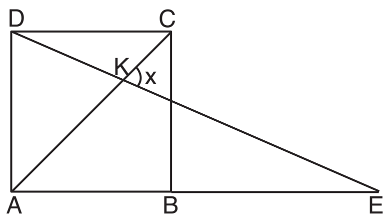
Resimde kare biçimindeki seramiklerle kaplı ABCD karesel bölgesi verilmiştir. Belirtilen A, E, F, G ve C noktalarının doğrusal olduğunu gösterelim.

Çözüm

Resimdeki seramikler karesel bölge biçiminde olduğundan,

$m(\widehat{CGF}) = m(\widehat{GFE}) = m(\widehat{AEF}) = 45 + 90 + 45 = 180° \Rightarrow$ C, G, F ; G, F, E ve A, E, F kendi aralarında doğrusal, sonuçta A, E, F, G, C noktaları da doğrusal olur.

Örnek

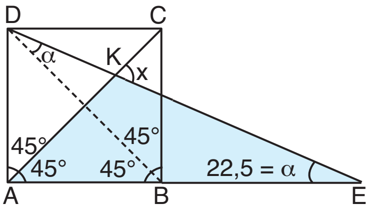


ABCD kare, ADE dik üçgen,

$|AC| = |BE|$ ise,

$m(\widehat{CKE}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



[BD] köşegeni çizilirse,

$|AC| = |BD| = |BE|$ olacağından BDE ikizkenar üçgen olur.

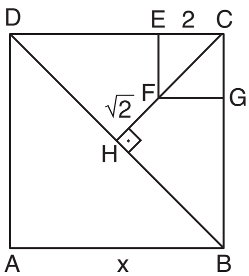
Taban açılarının ölçüsü α olsun.

Karede köşegenler açıortay olduğundan,

BDE üçgeninde dış açı ölçüsü, $45° = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$ ve

AEK üçgeninde dış açı ölçüsü, $x = 45 + 27{,}5 = 67{,}5°$ bulunur.

Örnek

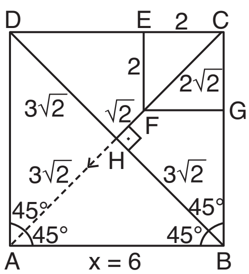


ABCD ve CEFG birer kare,

$[CH] \perp [BD]$, $|FH| = \sqrt{2}$ cm, $|CE| = 2$ cm

olduğuna göre, $|AB| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



CEFG karesinde [CF] köşegeni açıortay olduğundan;

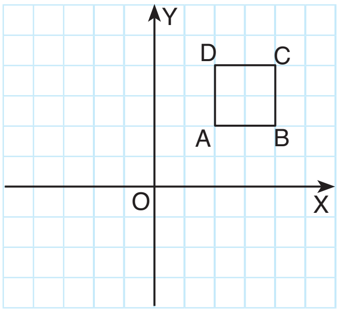
$A \in [CF$, $|CF| = 2\sqrt{2}$ cm ve

$|AH| = |BH| = |CH| = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm olur.

ABH ikizkenar dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile,

$x = 3\sqrt{2} . \sqrt{2} = 6$ cm bulunur.

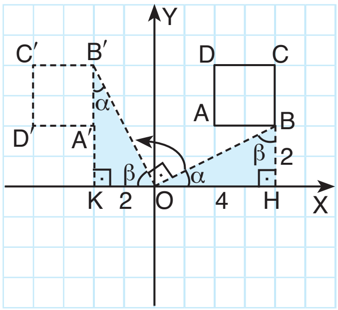
Örnek



$A(2, 2)$, $B(4, 2)$, $C(4, 4)$ ve $D(2, 4)$ olmak üzere,

ABCD karesi O başlangıç noktası etrafında pozitif yönde 90° döndürüldüğünde B noktasına karşılık gelen B′ noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm



Şekilde $m(\widehat{BOB'}) = 90^\circ$ olacağından,

$|OB| = |OB'|$, $m(\widehat{BOH}) = \alpha$, $m(\widehat{OBH}) = \beta \Rightarrow m(\widehat{KOB'}) = \beta$

ve $m(\widehat{KB'O}) = \alpha$ olur. A.K.A. eşlik kuralından,

$$\widehat{HOB} \cong \widehat{KB'O} \Rightarrow \begin{cases} |BH| = |KO| = 2 \text{ birim} \\ |HO| = |KB'| = 4 \text{ birim} \end{cases}$$

Sonuçta $B'(-2, 4)$ bulunur.

Alıştırmalar

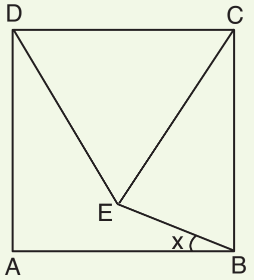
1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

( ) Karede köşegenler diktir ve birbirini ortalar.

( ) Kare bir dikdörtgendir.

( ) Karede her iki köşegen de açıortaydır.

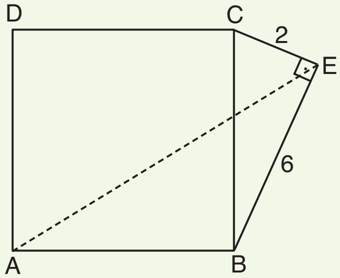
2.



ABCD kare, CDE eşkenar üçgen ise,

$m(\widehat{ABE}) = x$ kaç derecedir?

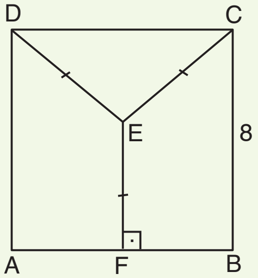
3.



ABCD bir kare BCE dik üçgen,

$[BE] \perp [CE]$, $|CE| = 2$ cm , $|BE| = 6$ cm ise,

$|AE|$ kaç cm dir?

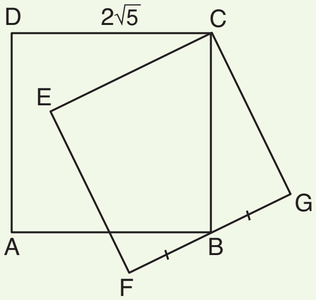
4. 

ABCD bir kare $[EF] \perp [AB]$,

$|EF| = |CE| = |DE|$ ve $|BC| = 8$ cm ise,

$|EF|$ kaç cm dir?

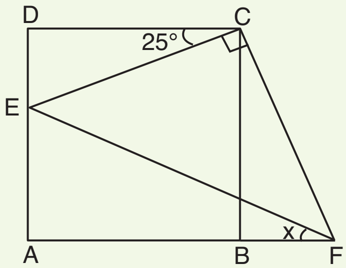
5. Bir dörtgende tüm kenarların orta noktaları birleştirildiğinde oluşan şeklin bir kare olması için bu dörtgende olması gereken koşulları bulunuz.

6. 

ABCD ile EFGC kare,

$|CD| = 2\sqrt{5}$ cm , $|FB| = |BG|$ ise,

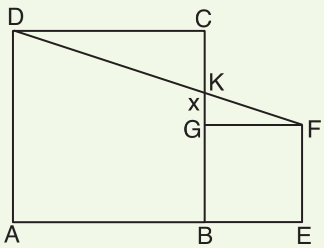
CEFG karesinin çevre uzunluğu kaç cm dir?

7. 

ABCD kare $[CE] \perp [CF]$,

$m(\widehat{DCE}) = 25^\circ$ ise,

$m(\widehat{AFE}) = x$ kaç derecedir?

8. 

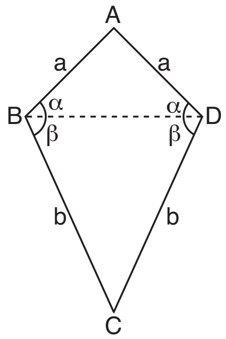
ABCD ve BEFG birer kare,

$[DF] \cap [BC] = \{K\}$

$|AB| = 2\,|BE| = 6$ cm ise,

$|KG| = x$ kaç cm dir?

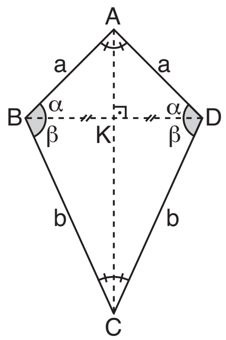
DELTOİD VE DELTOİDİN ÖZELLİKLERİ



Köşegenlerinden biri, iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgene deltoid denir.

Şekildeki ABCD deltoidinde |AB| = |AD| = a , |BC| = |CD| = b ve

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha + \beta$ olur.



Şekilde ABD ve CBD ikizkenar üçgenlerinin tepelerini birleştiren [AC] köşegeni çizildiğinde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ ise [AC] açıortay,

$[AC] \perp [BD]$ ve |BK| = |DK| olur. Gösterelim.

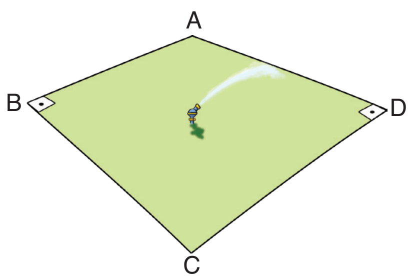
K.A.K. eşlik kuralına göre ABC $\cong$ ADC olduğundan,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{CAD})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACD})$ olur.

İkizkenar üçgenlerin tepesinden çizilen iç açıortay taban dik ortaladığından ABCD deltoidinde açıortay olan [AC] köşegeni [BD] köşegenini dik ortalar.

Şekilde $[AC] \perp [BD]$ ve |BK| = |DK| olur.

Örnek

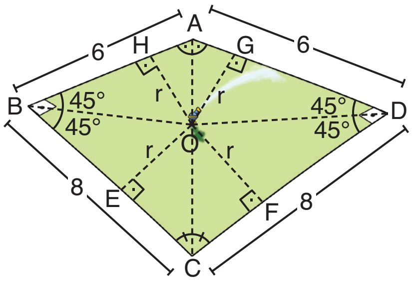


Resimde ABCD deltoidi biçimindeki bahçenin çimlerini sulamak için iç bölgede tüm kenarlara eşit uzaklıkta bir noktaya su fıskiyesi konulmuştur.

$[AB] \perp [BC]$, $[AD] \perp [CD]$, |AB| = |AD| = 6 m,

|BC| = |CD| = 8 m ise, fıskiyenin bulunduğu noktanın kenarlara uzaklığı kaç m dir? Bulalım.

Çözüm



Deltoidde tüm iç açıortaylar iç bölgede bir O noktasında kesiştiğinden O noktasının kenarlara uzaklığı eşit olur. Çünkü şekilde,

[CO] açıortay $\Rightarrow$ |OE| = |OF|

[BO] açıortay $\Rightarrow$ |OE| = |OH|

[AO] açıortay $\Rightarrow$ |OH| = |OG|

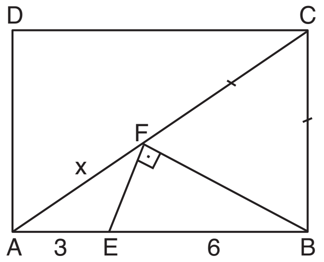
[DO] açıortay $\Rightarrow$ |OF| = |OG| ve

sonuçta, |OE| = |OF| = |OG| = |OH| = r olur. Bahçenin alanı,

$A(ABCD) = 2\left(\dfrac{6.8}{2}\right) = 48 = A(\widehat{OBC}) + A(\widehat{OCD}) + A(\widehat{OAD}) + A(\widehat{AOB})$ olduğundan,

$48 = \dfrac{8.r}{2} + \dfrac{8.r}{2} + \dfrac{6.r}{2} + \dfrac{6.r}{2} \Rightarrow 48 = \dfrac{28r}{2} \Rightarrow 48 = 14r \Rightarrow r = \dfrac{24}{7}$ m bulunur.

Örnek

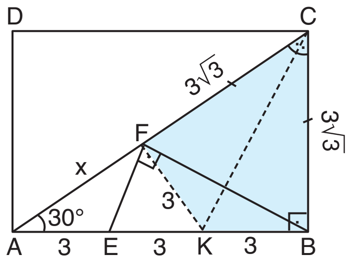


ABCD dikdörtgeninde; $F \in [AC]$, $[FB] \perp [EF]$,

|BC| = |CF| , |AE| = 3 cm ve |BE| = 6 cm olduğuna göre,

|AF| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



BEF dik üçgeninde [FK] kenarortayı çizildiğinde,

|BK| = |EK| = |FK| = 3 cm ve |BC| = |CF| verildiğinden BCFK dörtgeni bir deltoid olur.

Bu deltoidde [CK] açıortay olduğundan, ABC dik üçgeninde açıortay teoremini kullanırsak,

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|AK|} \Rightarrow \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow |AC| = 2|BC| \quad \text{bulunur.}$$

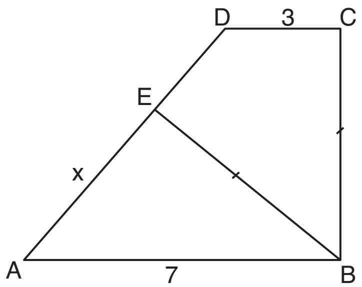
ABC dik üçgeninde |BC| = a ⇒ |AC| = 2|BC| = 2a olacağından,

$a^2 + 9^2 = (2a)^2 \Rightarrow 3a^2 = 81 \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$ cm ve $|AC| = 2a = 6\sqrt{3}$ cm bulunur.

Sonuçta $|BC| = |CF| = 3\sqrt{3}$ cm olduğundan, $|AF| = |AC| - |CF| \Rightarrow x = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

Burada ABC dik üçgeninin bir iç açı ölçüsü 30° olan özel bir dik üçgen olduğuna dikkat edelim!

Örnek



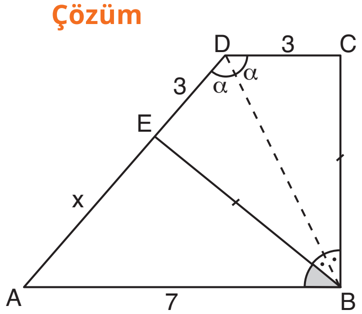
Şekilde ABCD yamuk; [AB] // [CD],

BCDE deltoid, |BC| = |BE|, |AB| = 7 cm

ve |CD| = 3 cm olduğuna göre,

|AE| = x kaç cm olur? Bulalım.

Çözüm



Şekildeki gibi [BD] çizilirse BCDE deltoid olduğundan,

[BD] açıortay ve |CD| = |DE| = 3 cm olur.

$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olduğundan,

ADB ikizkenar üçgen ve |AB| = |BD| = 7 cm

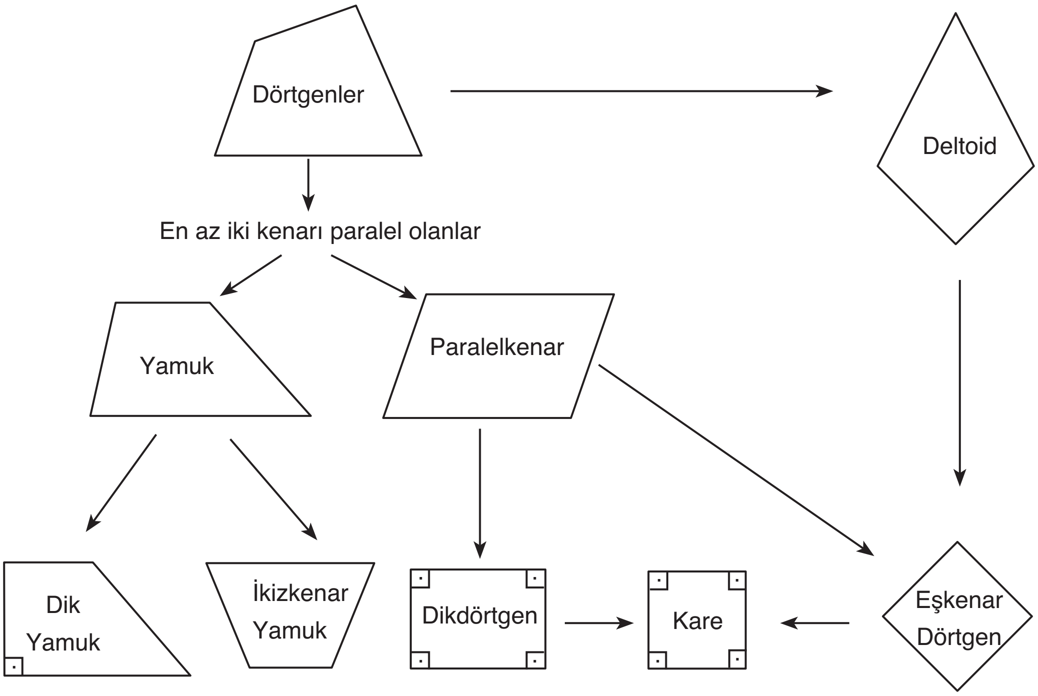
|AE| = x = 7 – 3 = 4 cm bulunur.

Dörtgenlerin Sınıflandırılması

Dörtgenleri değişik özelliklerine göre sınıflandırabiliriz. Karşılıklı kenarları paralel (paralelkenar) olanlar; dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare paralelkenarın tüm özelliklerine sahiptir. Köşegenleri birbirini ortalar, karşılıklı kenarlar ve açılar eştir, komşu açılar bütünlerdir.

Köşegenleri birbirine dik olanlar; kare, eşkenar dörtgen ve deltoiddir. İki köşegeni de açıortay olanlar ise kare ve eşkenar dörtgendir.

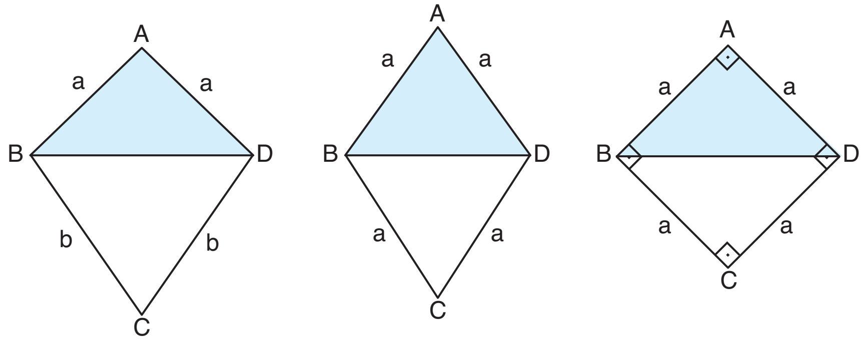
Aşağıdaki temel şema da dörtgenlerin karşılıklı kenar çiftlerinin paralel olup olmamasına göre bir sınıflandırma yapılmıştır. İnceleyiniz.



Örnek

Köşegenlerinden biri, iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgenler hangi dörtgenlerdir? Bulalım.

Çözüm



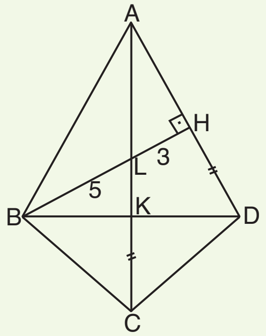
Şekillerde dikkat edilirse [BD] köşegeni; deltoid, eşkenar dörtgen ve karede ABD ile CBD ikizkenar üçgenlerinin ortak tabanıdır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun kelimeleri yazınız.

- Kare ve eşkenar dörtgen özel bir ....
- Deltoidde köşegenler birbirine ....
- Deltoidin iki iç açı ölçüsü ....

2.



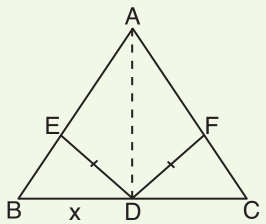
ABCD deltoid ve |BC| = |CD| dir.

$[AC] \cap [BH] = \{L\}$, $[AC] \cap [BD] = \{K\}$,

|DH| = |CK| , |BL| = 5 cm , |HL| = 3 cm olduğuna göre,

ABCD deltoidinin çevre uzunluğu kaç cm dir?

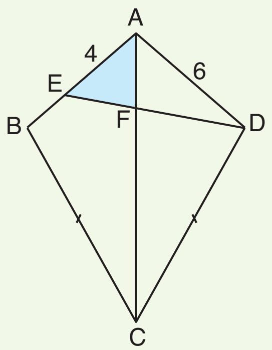
3.



ABC bir üçgen, AEDF deltoiddir.

|DE| = |DF|, |AB| = 6 cm, |AC| = 8 cm ve |BC| = 7 cm olduğuna göre, |BD| = x kaç cm olur?

4.

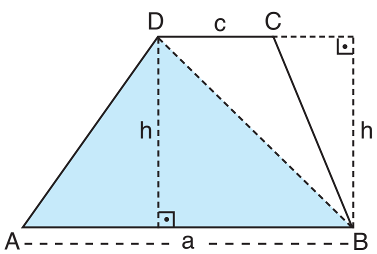


ABCD deltoid, |BC| = |CD|, $[AC] \cap [DE] = \{F\}$

|AE| = 4 cm, |AD| = 6 cm ve $A(\widehat{AEF}) = 6\ cm^2$

olduğuna göre $A(\widehat{DAF})$ kaç cm^2 olur?

YAMUĞUN ALANI



ABCD yamuğunda; [AB] // [CD],

|AB| = a , |CD| = c ve yükseklik h olsun.

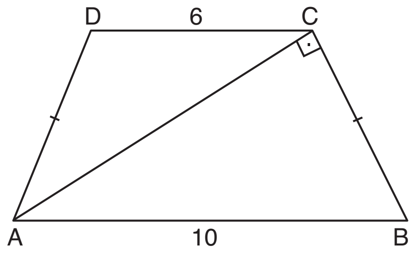
$A(ABCD) = \left(\dfrac{a+c}{2}\right).h$ olur. Gösterelim.

Şekildeki gibi ABCD yamuğunda [BD] köşegeni çizilirse,

$$A(ABCD) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{BCD}) = \frac{a.h}{2} + \frac{c.h}{2} = \left(\frac{a+c}{2}\right).h \quad \text{olur.}$$

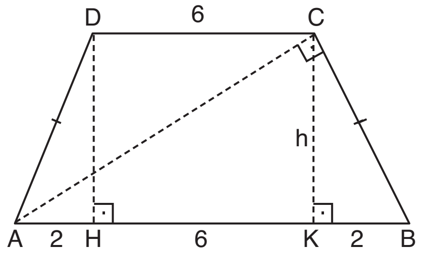
Dikkat edilirse yamuğun alanı, orta taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Örnek



ABCD ikizkenar yamuk; [AB] // [CD],
|AD| = |BC| , [AC] ⊥ [BC],
|AB| = 10 cm , |CD| = 6 cm ise,
A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



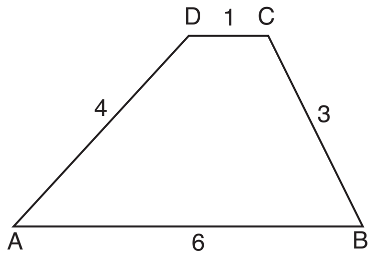
ABCD ikizkenar yamuğunda [DH] ve [CK] yükseklikleri çizilirse,

$|AH| = |KB| = \dfrac{10-6}{2} = 2$ cm, $|AK| = 8$ cm olur.

$|CK| = h$ ise, ABC dik üçgeninde Öklid Bağıntısı ile,
$h^2 = |AK|.|BK| \Rightarrow h^2 = 8.2 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm bulunur.
Sonuçta ABCD yamuğunun alanı,

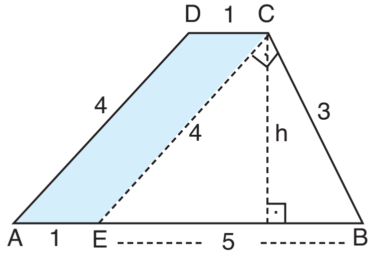
$$A(ABCD) = \left(\frac{a+c}{2}\right).h = \frac{10+6}{2}\cdot 4 = 8.4 = 32 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Örnek



ABCD bir yamuk; [AB] // [CD],
|AB| = 6 cm, |BC| = 3 cm, |CD| = 1 cm
ve |AD| = 4 cm ise, A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm

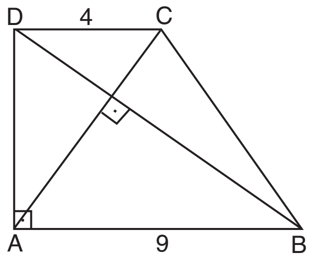


[CE] // [AD] çizersek, AECD paralelkenar dolayısıyla,
$|AD| = |CE| = 4$ cm, $|AE| = |CD| = 1$ cm $\Rightarrow$ $|BE| = 5$ cm olur.
Kenar uzunlukları, 3 cm, 4 cm ve 5 cm olan BCE üçgeni Pisagor Teoremi'ni sağladığı için bir dik üçgen, [BC] ⊥ [CE] ve

$\dfrac{3.4}{2} = A(\widehat{BCE}) = \dfrac{5.h}{2}$ bağıntısından $h = \dfrac{12}{5}$ bulunur.

$$\text{Sonuçta, } A(ABCD) = \left(\frac{a+c}{2}\right)h = \frac{(6+1)}{2}\cdot\frac{12}{5} = \frac{7}{2}\cdot\frac{12}{5} = \frac{84}{10} = 8{,}4 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Örnek



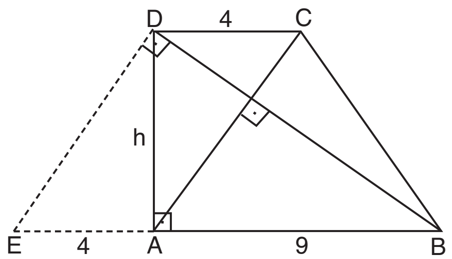
ABCD dik yamuğunda;

[AB] // [CD] , [AB] $\perp$ [AD] , [AC] $\perp$ [BD]

|AB| = 9 cm ve |CD| = 4 cm ise

A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Yamuğun yüksekliği |AD| = h olsun.

D köşesinden [DE] // [AC] çizildiğinde DE $\cap$ AB = {E} ise ACDE paralelkenar olduğundan

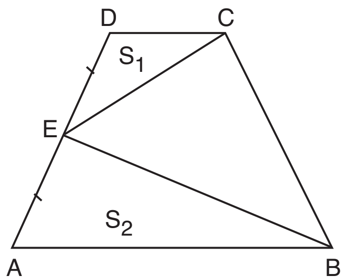
|AE| = |CD| = 4 cm ve [BD] $\perp$ [DE] olur.

BDE dik üçgeninde Öklid Bağıntısı ile,

$h^2 = 4.9 \Rightarrow h = 6$ cm bulunur. Sonuçta,

$$A(ABCD) = \left(\frac{9+4}{2}\right).6 = \frac{13}{2}.6 = 39 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Örnek



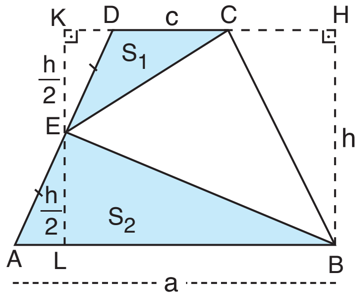
ABCD yamuğunda; [AB] // [CD] ,

|AE| = |DE| , $A(\widehat{CDE}) = S_1$, $A(\widehat{ABE}) = S_2$ olsun.

a. $A(\widehat{BCE}) = S_1 + S_2$

b. $A(ABCD) = 2.A(\widehat{BCE})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



Yamuğun yüksekliği |BH| = |KL| = h olsun.

E noktası orta taban üzerinde olduğundan

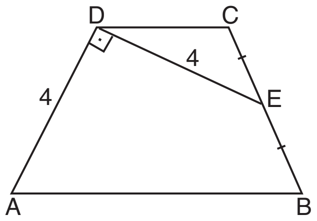
$|KE| = |EL| = \dfrac{h}{2}$ olur. Buna göre şekilde

$$S_1 + S_2 = \left(c \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(a \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{a+c}{4}\right) \cdot h = \frac{A(ABCD)}{2}$$

olduğundan,

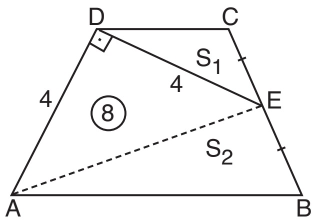
$A(\widehat{BCE}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ ve sonuçta $A(\widehat{BCE}) = S_1 + S_2$ ve $A(ABCD) = 2A(\widehat{BCE})$ bulunur.

Örnek



ABCD yamuğunda; $[AB] \mathbin{//} [CD]$, $[AD] \perp [DE]$, $|BE| = |CE|$ ve $|AD| = |DE| = 4$ cm ise, yamuğun alanını bulalım.

Çözüm



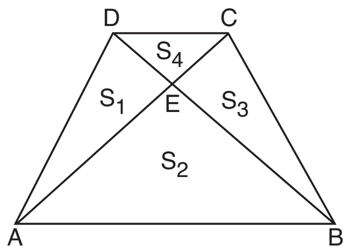
ABCD yamuğunda $|BE| = |CE|$ olduğundan [AE] çizildiğinde,

$A(\widehat{CDE}) = S_1$ ve $A(\widehat{ABE}) = S_2$ olsun.

$A(\widehat{ADE}) = S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 = \dfrac{4.4}{2} = 8 \text{ cm}^2$ bulunur. ABCD yamuğun alanı,

$A(ABCD) = 2\,A(\widehat{ADE}) = 2.8 = 16 \text{ cm}^2$ olur.

Örnek



ABCD yamuğunda $[AB] \mathbin{//} [CD]$, $[AC] \cap [BD] = \{E\}$,

$A(\widehat{AED}) = S_1$, $A(\widehat{ABE}) = S_2$, $A(\widehat{BCE}) = S_3$, $A(\widehat{CDE}) = S_4$ olsun.

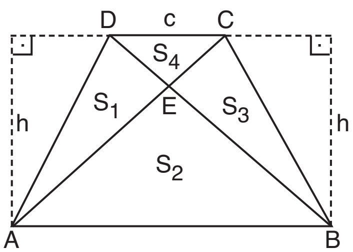
a. $S_1 = S_3$,

b. $S_1 = S_3 = S$ ise $S^2 = S_2.S_4$,

c. $A(ABCD) = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

a.



ABCD yamuğunda $[AB] \mathbin{//} [CD]$ olduğundan, ACD ile BCD üçgenlerinde [CD] tabanları ve bu tabanlara ait yükseklikler eştir. Dolayısıyla alanları da eşit olacağından,

$A(\widehat{ACD}) = \dfrac{c.h}{2} = A(\widehat{BCD}) \Rightarrow S_1 + S_4 = S_3 + S_4 \Rightarrow S_1 = S_3$ elde edilir.

b. $S_1 = S_3 = S$ olsun. Yükseklikleri eş $\widehat{AED}$ ile $\widehat{ABE}$ ve $\widehat{CDE}$ ile $\widehat{BCE}$ üçgenlerinde alanlar oranı, taban uzunlukları oranına eşit olacağından şekilde,

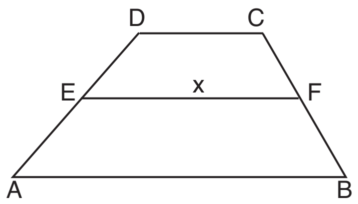
$\dfrac{S}{S_2} = \dfrac{|DE|}{|BE|} = \dfrac{S_4}{S} \Rightarrow S^2 = S_2 S_4$ elde edilir.

c.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2 &= S_2 + S_4 + 2\sqrt{S_2}\sqrt{S_4} \\ &= S_2 + S_4 + 2\sqrt{S_2 S_4} \\ &= S_2 + S_4 + 2\sqrt{S^2} = S_2 + S_4 + 2S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A(ABCD)\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Örnek



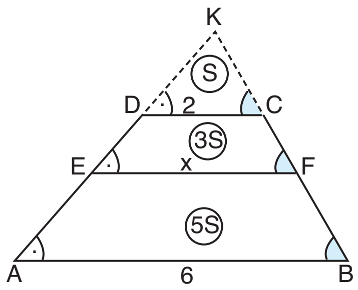
ABCD yamuğunda; [AB] // [CD] // [EF],

|AB| = 3|CD| = 6 cm,

3.A(ABFE) = 5.A(CDEF) ise,

|AF| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



|AB| = 6 cm, |CD| = 2 cm, A(ABFE) = 5S ve A(CDEF) = 3S olsun.

AD ∩ BC = {K} noktası için $\widehat{KCD} \sim \widehat{KBA}$ ve benzerlik oranı

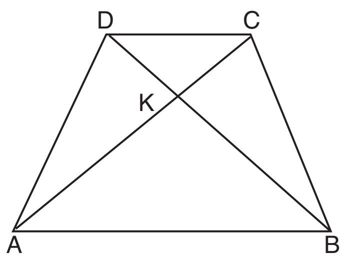
$k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ olduğundan (A.A. benzerlik kuralı) alansal oran,

$\frac{A(\widehat{KCD})}{A(\widehat{KBA})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow A(\widehat{KCD}) = S$ ve $A(\widehat{KAB}) = 9S$ olur.

Yine A.A. benzerlik kuralından $\widehat{KCD} \sim \widehat{KFE}$ ve alanlar oranı benzerlik oranının karesi olduğundan,

$\sqrt{\frac{S}{4S}} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4$ cm bulunur.

Örnek



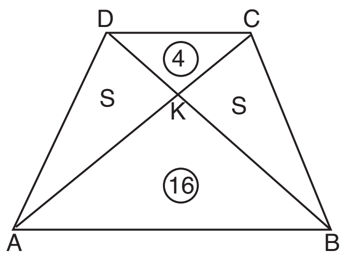
ABCD yamuğunda; [AB] // [CD],

[AC] ∩ [BD] = {K},

$A(\widehat{KCD}) = 4$ cm², $A(\widehat{ABK}) = 16$ cm² ise,

ABCD yamuğunun alanını bulalım.

Çözüm



[AB] // [CD] olduğundan, $A(\widehat{AKD}) = A(\widehat{BKC}) = S$

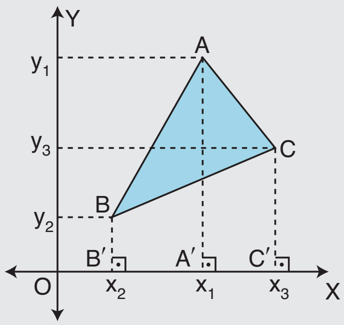
alınırsa , yükseklikleri ortak üçgenlerin alanları oranı

$\frac{16}{S} = \frac{|BK|}{|DK|} = \frac{S}{4} \Rightarrow S^2 = 64 \Rightarrow S = 8$ cm² olur.

Sonuçta A(ABCD) = 16 + 8 + 4 + 8 = 36 cm² bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim

Analitik Düzlemde Köşelerinin Koordinatları Verilen Üçgenin Alanı



Köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin alanı,

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ olur. Gösterelim.

Şekilde görüldüğü gibi A, B, C noktalarının X ekseni üzerindeki dik izdüşümleri A', B', C' olsun. $ABB'A'$, $AA'C'C$ ve $BB'C'C$ dörtgenleri birer dik yamuk ve

$A(\widehat{ABC}) = A(ABB'A') + A(AA'C'C) - A(BB'C'C)$ olduğundan,

$$A(\widehat{ABC}) = \left(\frac{|AA'|+|BB'|}{2}\right)\cdot|B'A'| + \left(\frac{|AA'|+|CC'|}{2}\right)\cdot|A'C'| - \left(\frac{|BB'|+|CC'|}{2}\right)\cdot|B'C'|$$

$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\cdot(x_1 - x_2) + \left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right)(x_3 - x_1) - \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)\cdot(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ bulunur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde A(0, 3), B(–1, –2) ve C(3, 1) olmak üzere ABC üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ise $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ olduğundan

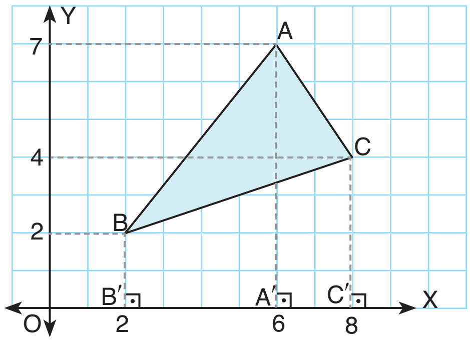
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}[0(-2-1) + (-1)(1-3) + 3(3-(-2))]$$

$$= \frac{1}{2}[0 - 1.(-2) + 3.(3+2)] = \frac{1}{2}(0 + 2 + 15) = \frac{17}{2}\ \text{br}^2 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları A(6, 7), B(2, 2) ve C(8, 4) olan ABC üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm



ABC üçgenini analitik düzlemde gösterelim. A, B, C köşelerinin X ekseni üzerindeki dik iz düşümleri sırasıyla A′, B′ ve C′ olsun, şekilde dikkat edilirse;

$A(\widehat{ABC}) = A(BB'A'A) + A(AA'C'C) - A(BB'C'C)$ olur.

$|BB'| = 2$, $|AA'| = 7$, $|CC'| = 4$, $|A'B'| = 6 - 2 = 4$, $|A'C'| = 8 - 6 = 2$ br,

$|B'C'| = 8 - 2 = 6$ br ve BB′A′A, AA′C′C ve BB′C′C birer dik yamuktur. Buna göre,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{2+7}{2}.4 + \frac{7+4}{2}.2 - \frac{2+4}{2}.6 = \frac{9}{2}\cdot 4 + \frac{11}{2}\cdot 2 - \frac{6}{2}\cdot 6 = 18 + 11 - 18 = 11 \text{ br}^2$$ bulunur.

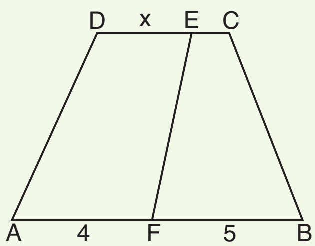
Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

( ) Bir yamuğun alanı orta taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

( ) Her dörtgende olduğu gibi yamukta da kenarların orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin alanı, yamuğun alanının yarısıdır.

2.



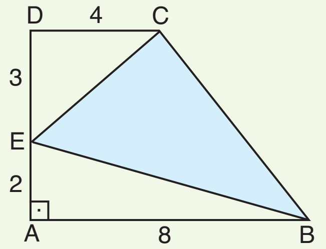
ABCD yamuk; [AB] // [CD],

$|AF| = |CD| = 4$ cm , $|FB| = 5$ cm ve

$A(AFED) = A(BCEF)$ ise

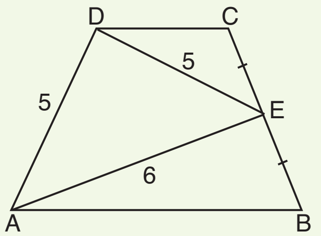
$|DE| = x$ kaç cm dir?

3.



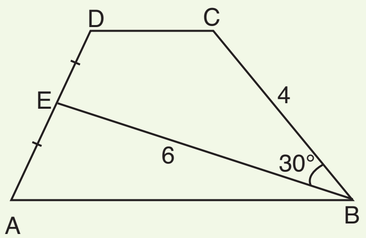
ABCD dik yamuk; $[AB] \parallel [CD]$,
$[AB] \perp [AD]$, $|CD| = 4$ cm, $|DE| = 3$ cm,
$|AE| = 2$ cm ve $|AB| = 8$ cm ise,
$A(\widehat{BCE})$ kaç cm^2 olur?

4.



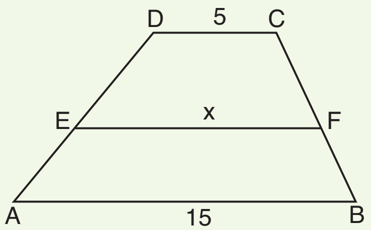
ABCD yamuğunda; $[AB] \parallel [CD]$,
$|BE| = |CE|$, $|AD| = |DE| = 5$ cm,
$|AE| = 6$ cm olduğuna göre,
$A(ABCD)$ kaç cm^2 olur?

5.



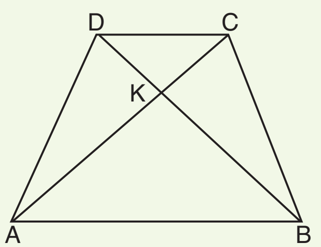
ABCD yamuğunda; $[AB] \parallel [CD]$,
$m(\widehat{CBE}) = 30^\circ$, $|AE| = |DE|$
$|BE| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm ise,
$A(ABCD)$ kaç cm^2 olur?

6.

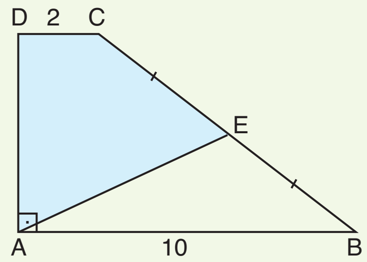


ABCD bir yamuk,
$[AB] \parallel [CD] \parallel [EF]$,
$|CD| = 5$ cm, $|AB| = 15$ cm,
$A(ABFE) = A(EFCD)$ ise,
$|EF| = x$ kaç cm dir?

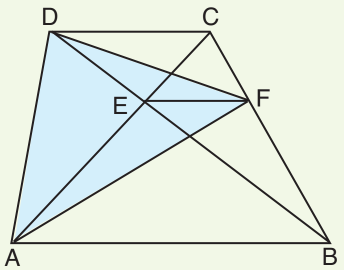
7.



ABCD yamuk; $[AB] \parallel [CD]$, $[AC] \cap [BD] = \{K\}$,
$A(\widehat{KCD}) = 4$ cm^2, $A(\widehat{ABK}) = 25$ cm^2
olduğuna göre, $A(ABCD)$ kaç cm^2 olur?

8. 

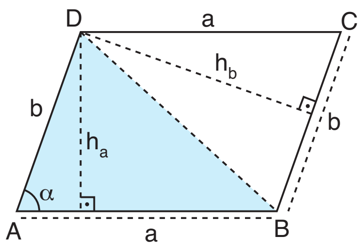
ABCD dik yamuk; [AB] // [CD] , [AB] $\perp$ [AD],
|BE| = |CE| , |AB| = |BC| = 10 cm , |CD| = 2 cm
olduğuna göre, AECD dörtgeninin alanını bulunuz.

9. 

ABCD yamuk; [AB] // [CD] // [EF],
[AC] $\cap$ [BD] = {E}
A($\widehat{AED}$) = 8 cm^2 ise,
A($\widehat{AFD}$) kaç cm^2 olur?

10. ABCD ikizkenar yamuğunda [AB] // [CD]; |AD| = |BC| , |AC| = 5 cm , |AB| = 6 cm ve |CD| = 2 cm olduğuna göre, A(ABCD) kaç cm^2 olur?

PARALELKENARIN ALANI



ABCD paralelkenarında; |AB| = a, |BC| = b, bu kenarlara ait yükseklikler h_a, h_b ve $m(\widehat{A}) = \alpha$ olsun.

A(ABCD) = a.h_a = b.h_b = a.b.sinα olur. Gösterelim

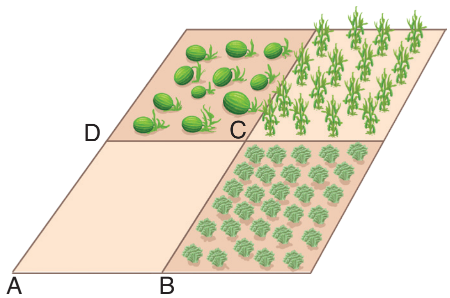
ABCD paralelkenarında [BD] köşegeni çizildiğinde K.K.K. eşlik kuralına göre,

$\widehat{BAD} \cong \widehat{DCB} \Rightarrow A(\widehat{BAD}) = A(\widehat{DCB})$ olduğundan;

$$A(ABCD) = 2.A(\widehat{ABD}) = 2.\left(\frac{a.h_a}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}a.b.\sin\alpha\right) = a.h_a = a.b.\sin\alpha,$$

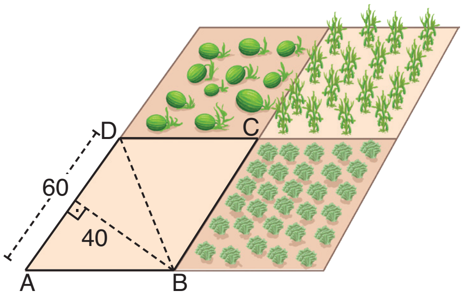
$$A(ABCD) = 2.A(\widehat{BCD}) = 2.\left(\frac{b \cdot h_b}{2}\right) = b.h_b$$ ve sonuçta $A(ABCD) = a.h_a = b.h_b = a.b.\sin\alpha$ bulunur.

Örnek



Resimdeki tarlanın ABCD paralelkenarı biçimindeki bölgesinde |AD| = 60 m ve [BC] ile [AD] kenarları arasındaki uzaklık 40 m olduğuna göre, ABCD bölgesinin alanını bulalım.

Çözüm

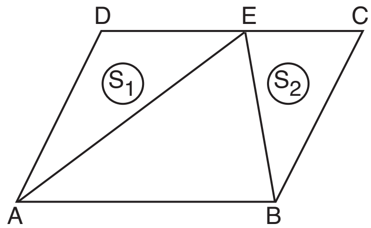


ABCD paralelkenarsal bölgesi [BD] köşegeni ile birbirine eş ABD ve CDB üçgensel bölgelerine ayrılıp, bu bölgelerin alanları da eşit olduğundan,

$A(ABCD) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{BCD}) = 2A(\widehat{ABD})$

$= 2\left(\dfrac{60.40}{2}\right) = 2400 \text{ m}^2$ bulunur.

Örnek



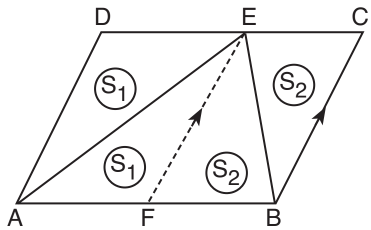
ABCD paralelkenar ve $E \in [CD]$ olsun.

$A(\widehat{ADE}) = S_1$ ve $A(\widehat{BCE}) = S_2$ ise,

$A(\widehat{ABE}) = S_1 + S_2$ ve $A(ABCD) = 2\,A(\widehat{ABE})$

olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekildeki gibi $[EF] \,//\, [BC]$ çizelim.

Bu durumda AFED ve FBCE birer paralelkenardır.

AFED paralelkenarsal bölgesi [AE] köşegeni ile eşdeğer iki üçgensel bölgeye ayrılır ve $A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{AFE}) = S_1$ olur.

Benzer biçimde BCEF paralelkenarsal bölgesi [BE] köşegeni ile eşdeğer üçgensel bölgelere ayrılır ve

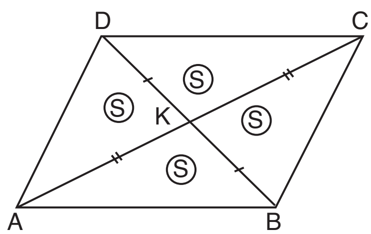
$A(\widehat{FBE}) = A(\widehat{BCE}) = S_2$ olur. Sonuçta, $A(\widehat{ABE}) = S_1 + S_2$

ve $A(ABCD) = 2\,(S_1 + S_2) = 2\,A(\widehat{ABE})$ bulunur.

Örnek

ABCD paralelkenarsal bölgesi [AC] ve [BD] köşegenleri ile eşit alanlı dört üçgensel bölgeye ayrılır. Gösterelim.

Çözüm

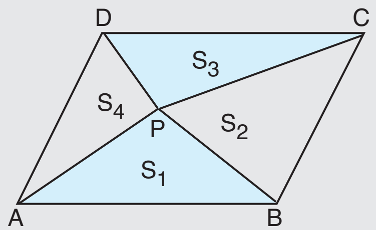


Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından,

$|AK| = |CK|$ ve $|BK| = |DK|$ olur.

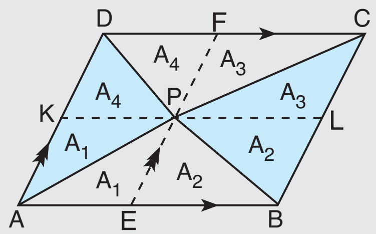
Taban ve yükseklikleri eş olan üçgenlerin alanları da eşit olacağından, $A(\widehat{BAK}) = A(\widehat{BCK}) = A(\widehat{CDK}) = A(\widehat{ADK}) = S$ bulunur.

İnceleyerek Öğrenelim



ABCD paralelkenar ve P iç bölgede herhangi bir nokta olsun. Şekildeki üçgensel bölgelerin alanları S_1, S_2, S_3 ve S_4 ise,

- $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
- $A(ABCD) = 2(S_1 + S_3) = 2(S_2 + S_4)$ olur. Gösterelim.



Şekildeki gibi P noktasından geçip [AB] kenarına paralel olan [KL] ve [BC] kenarına paralel olan [EF] çizilirse;

AEPK paralelkenar ve $A(\widehat{AEP}) = A(\widehat{APK}) = A_1$

EBLP paralelkenar ve $A(\widehat{BEP}) = A(\widehat{BLP}) = A_2$

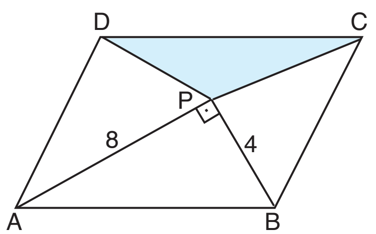
CFPL paralelkenar ve $A(\widehat{CPL}) = A(\widehat{CFP}) = A_3$

DKPF paralelkenar ve $A(\widehat{DKP}) = A(\widehat{DFP}) = A_4$ olur. Dikkat edilirse,

$A(\widehat{PAD}) + A(\widehat{PBC}) = A(\widehat{PAB}) + A(\widehat{PCD}) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ ve

$A(ABCD) = 2\left(A(\widehat{PAD}) + A(\widehat{PBC})\right) = 2\left(A(\widehat{PAB}) + A(\widehat{PCD})\right)$ olmaktadır.

Örnek



ABCD paralelkenar; $[AP] \perp [BP]$,

$|BP| = 4$ cm, $|AP| = 8$ cm ve $A(ABCD) = 48$ cm^2 ise,

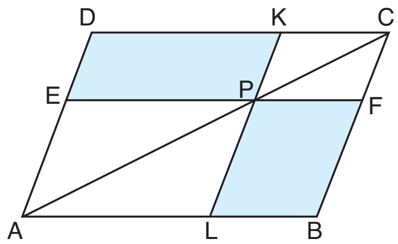
$A(\widehat{CDP})$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm

$A(ABCD) = 2[A(\widehat{ABP}) + A(\widehat{CDP})]$ olduğundan;

$$48 = 2\left(\frac{4.8}{2} + A(\widehat{CDP})\right) \Rightarrow 24 = 16 + A(\widehat{CDP}) \Rightarrow A(\widehat{CDP}) = 8 \text{ cm}^2$$ bulunur.

Örnek



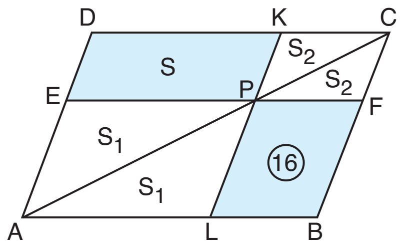
ABCD paralelkenarında; $P \in [AC]$,

$[AB] // [EF]$, $[BC] // [KL]$, $[AC] \cap [EF] \cap [KL] = \{P\}$ olsun.

$A(BFPL) = 16 \text{ cm}^2$ ise,

$A(DEPK)$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

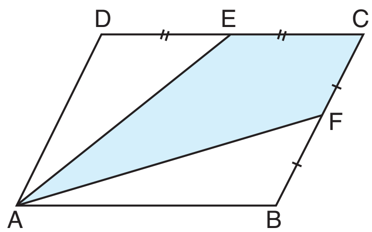
Çözüm



$[AB] // [CD] // [EF]$ ve $[AD] // [BC] // [KL]$ olduğundan, ALPE, BFPL, FCKP ve DEPK dörtgenleri paralelkenardır. ALPE ve FCKP paralelkenarsal bölgelerinde köşegenin ayırdığı üçgensel bölgelerin alanları sırasıyla S_1, S_2 ve $A(DEPK) = S$ olsun.

$A(\widehat{ACD}) = A(\widehat{ABC}) \Rightarrow S_1 + S_2 + S = S_1 + S_2 + 16 \Rightarrow S = 16 \text{ cm}^2$ bulunur.

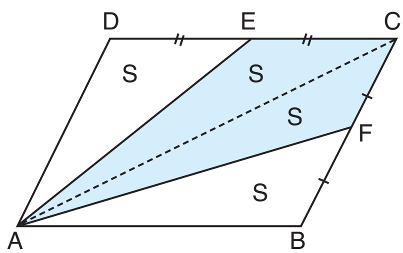
Örnek



Yandaki şekilde, ABCD paralelkenar, E ve F kenarların orta noktalarıdır.

Buna göre, $\dfrac{A(ADE)}{A(ABCD)}$ ve $\dfrac{A(AECF)}{A(ABCD)}$ oranları kaçtır? Bulalım.

Çözüm



[AC] köşegeni çizilirse, taban ve yükseklikleri eş olan üçgenlerin alanları eşit olacağından,

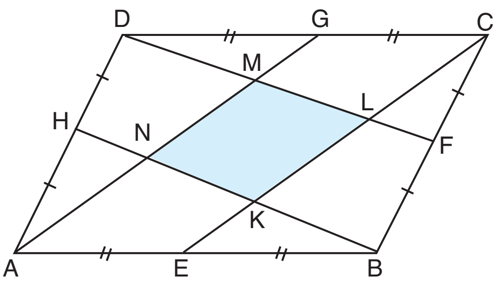
$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{ACE}) = S \Rightarrow A(\widehat{ADC}) = A(\widehat{ABC}) = 2S$

$A(\widehat{ABF}) = A(\widehat{ACF}) = \dfrac{2S}{2} = S$ olur. Sonuçta

$\dfrac{A(ADE)}{A(ABCD)} = \dfrac{S}{4S} = \dfrac{1}{4}$ ve $\dfrac{A(AFCE)}{A(ABCD)} = \dfrac{2S}{4S} = \dfrac{1}{2}$

bulunur.

Örnek



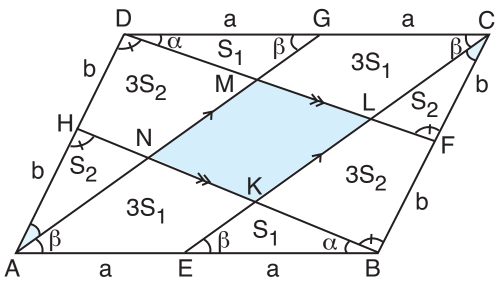
Şekildeki ABCD paralelkenarında,

E, F, G ve H kenarların orta noktalarıdır.

Buna göre, şekilde A, B, C ve D köşelerini karşı kenarların orta noktalarına birleştiren [AG], [BH], [CE], [DF] doğru parçaları ile belirlenen KLMN dörtgeninin bir paralelkenar ve

$\dfrac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \dfrac{1}{5}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde |AE| = |BE| = |CG| = |DG| = a , |AH| = |DH| = |CF| = |FB| = b olsun.

İç ters açılar eş olduğundan şekilde A.K.A. eşlik kuralından, $\widehat{DGM} \cong \widehat{BEK}$, $\widehat{AHN} \cong \widehat{CFL}$ ve bu eş üçgenlerin alanları $A(\widehat{DGM}) = A(\widehat{BEK}) = S_1 \Rightarrow A(\widehat{AHN}) = A(\widehat{CFL}) = S_2$ olur.

Karşılıklı kenarları eş ve paralel olan AECG ve BFDH dörtgenleri paralelkenar olduğundan KLMN dörtgeni de paralelkenardır. [AG] // [CE] ve [BH] // [DF] olduğundan A.A. benzerlik kuralına göre, $\widehat{DMG} \sim \widehat{DLC}$, , $\widehat{BEK} \sim \widehat{BAN}$, $\widehat{CFL} \sim \widehat{CBK}$, $\widehat{AHN} \sim \widehat{ADM}$ ve bu üçgenlerde benzerlik oranı $k = \dfrac{1}{2}$, alansal oran $k^2 = \dfrac{1}{4}$ olur. Buna göre alan dağılımı yapıldığında;

A(MGCL) = A(AEKN) = $3S_1$ ve A(DMNH) = A(BFLK) = $3S_2$ elde edilir. ABCD paralelkenarının alanının $\dfrac{1}{4}$ üne eşit ADG ve ABH üçgenlerinin alanları eşit olacağından,

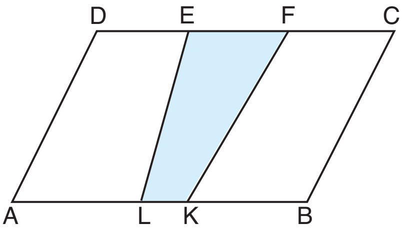
$4S_2 + S_1 = 4S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 = S_2 = S$ bulunur $(S_1, S_2 \in \mathbb{R})$

Böylece, şekilde $A(\widehat{ADG}) = 5S$, $A(ABCD) = 4.\ A(\widehat{ADG}) = 4.5S = 20S$ ve

$A(KLMN) = 20S - 16S = 4S$ bulunur. Sonuçta

$\dfrac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \dfrac{4S}{20S} = \dfrac{1}{5}$ olur.

Örnek



ABCD paralelkenar;

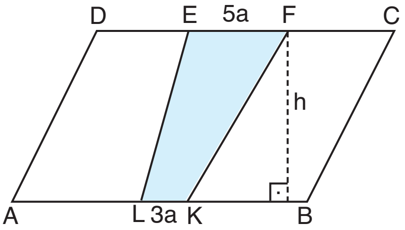
$|DE| = |EF| = |CF|$,

$|AB| = 5\,|KL|$,

$A(EFKL) = 12\text{ cm}^2$ ise,

$A(ABCD)$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Şekilde $|KL| = 3a$ alınırsa,

$|AB| = 5\,|KL| = 5.3a = 15a = |CD|$

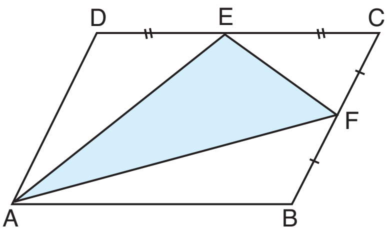
$|DE| = |EF| = |CF| = \dfrac{15a}{3} = 5a$ olur.

Paralelkenarın yüksekliği h olsun. EFKL bir yamuk ve yüksekliği h olduğundan,

$A(EFKL) = \dfrac{5a+3a}{2}\cdot h = 4ah = 12 \Rightarrow ah = 3\text{ cm}^2$ sonuçta

$A(ABCD) = |AB|.h = 15a.h = 15.3 = 45\text{ cm}^2$ bulunur.

Örnek

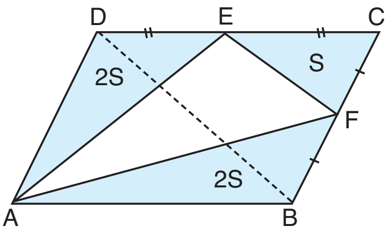


ABCD paralelkenar,

E ile F kenarların orta noktası olsun.

$\dfrac{A(AEF)}{A(ABCD)} = \dfrac{3}{8}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



BCD üçgeninde [EF] orta taban olduğundan;

A.A. benzerlik kuralına göre $\widehat{CEF} \sim \widehat{CDB}$, benzerlik oranı

$k = \dfrac{1}{2}$ ve alansal oran $k^2 = \dfrac{1}{4}$ olur.

$A(\widehat{CEF}) = S$ ise $A(\widehat{CDB}) = 4S$ ve $A(ABCD) = 2.4S = 8S$,

$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{ABF}) = \dfrac{A(ABCD)}{4} = \dfrac{8S}{4} = 2S \Rightarrow A(\widehat{AEF}) = 8S - 2S - 2S - S = 8S - 5S = 3S$

ve sonuçta $\dfrac{A(\widehat{AEF})}{A(ABCD)} = \dfrac{3S}{8S} = \dfrac{3}{8}$ bulunur ($S \in R^+$).

Alıştırmalar

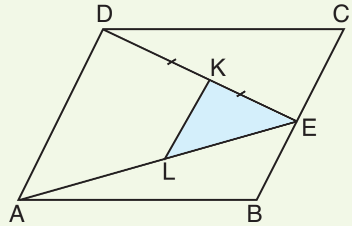
1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

( ) Paralelkenar bir köşegeni ile eşit alanlı iki üçgene ayrılır.

( ) Paralelkenarın her iki köşegeni de çizilirse eşit alanlı dört üçgen elde edilir.

( ) Paralelkenarda herhangi bir köşenin karşı kenarın orta noktasına birleştirilmesi ile oluşan üçgenin alanı, paralelkenarın alanının $\frac{1}{4}$ üdür.

2.



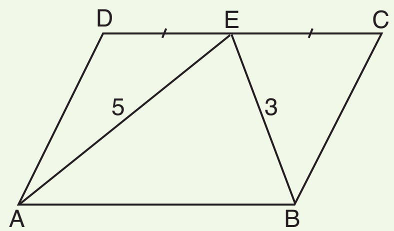
ABCD paralelkenar; ADE bir üçgen,

$E \in [BC]$, $[KL] // [AD]$, $|DK| = |EK|$ ve

$A(\widehat{KLE}) = 4 \text{ cm}^2$ ise

A(ABCD) kaç cm^2 olur?

3.

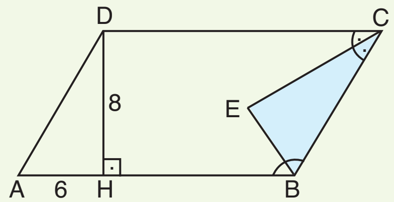


ABCD paralelkenarında; $|CE| = |DE|$,

$|AB| = 2|BC|$, $|BE| = 3$ cm ve $|AE| = 5$ cm

olduğuna göre, A(ABCD) kaç cm^2 olur?

4.



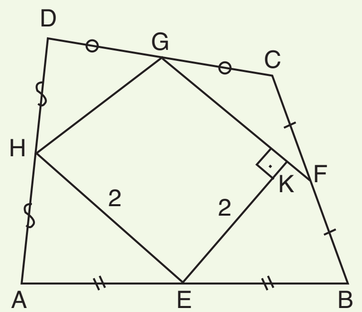
ABCD paralelkenarında; $[DH] \perp [AB]$,

[BE] ve [CE] açıortaylar,

$|AH| = 6$ cm , $|DH| = 8$ cm ise,

$A(\widehat{BCE})$ kaç cm^2 olur?

5.

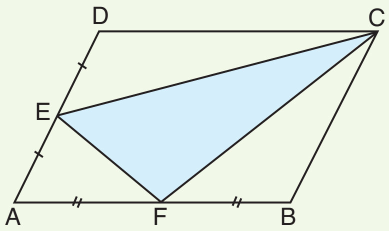


ABCD dörtgeninde; E, F, G ve H kenarların orta noktaları, $[EK] \perp [FG]$ ve

$|EH| = |EK| = 2$ cm olduğuna göre,

A(ABCD) kaç cm^2 olur?

6.

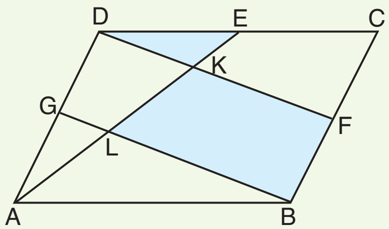


ABCD paralelkenar E ile F kenarların orta noktalarıdır.

$A(ABCD) = 40\ cm^2$ ise,

$A(\widehat{CEF})$ değerini bulunuz.

7.

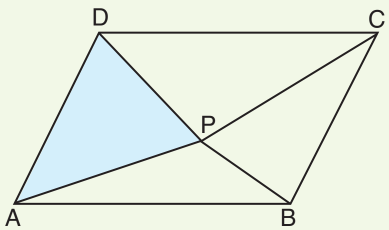


ABCD paralelkenarında E, F, G kenarların orta noktalarıdır.

$[AE] \cap [BG] = \{L\}$, $[AE] \cap [DF] = \{K\}$ ise,

$\dfrac{A(KLBF)}{A(\widehat{DEK})}$ oranı kaçtır?

8.



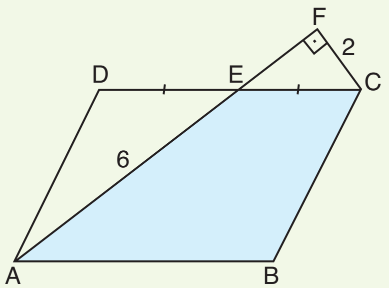
ABCD paralelkenarında P iç bölgede bir nokta

$A(\widehat{BCP}) = 5\ cm^2$ ve

$A(ABCD) = 30\ cm^2$ olduğuna göre,

$A(\widehat{ADP})$ değerini bulunuz.

9.

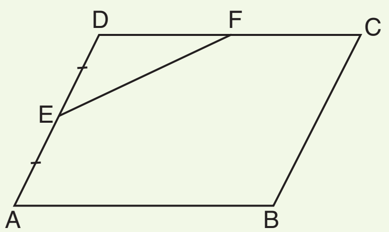


ABCD paralelkenar; $[AF] \perp [CF]$,

$|DE| = |CE|$, $|AE| = 6$ cm ve $|CF| = 2$ cm ise,

A(ABCE) değerini bulunuz.

10.

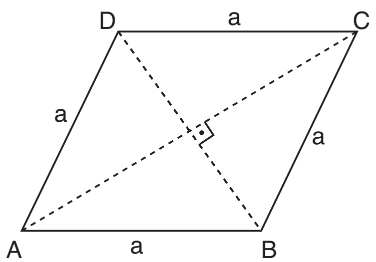


ABCD paralelkenar $|AE| = |DE|$

$5|CF| = 3|DF|$ ve $A(\widehat{EDF}) = 20\ cm^2$ olduğuna göre

A(ABCD) değerini bulunuz.

EŞKENAR DÖRTGENİN ALANI

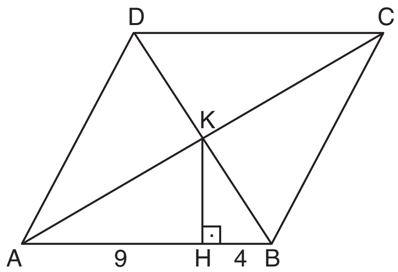


ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan

$|AC| = e$, $|BD| = f$ ise köşegenleri dik olan bir dörtgende olduğu gibi $A(ABCD) = \dfrac{e.f}{2}$ olur.

Eşkenar dörtgen bir paralelkenar olduğundan paralelkenarda verilen alan bağıntıları eşkenar dörtgende de geçerlidir.

Örnek



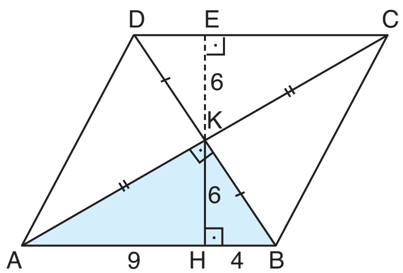
ABCD eşkenar dörtgen;

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $[KH] \perp [AB]$,

$|BH| = 4$ cm ve $|AH| = 9$ cm ise,

$A(ABCD)$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortaladığından KAB dik üçgendir. $[KH] \perp [AB]$ verildiğinden

Öklid Bağıntısı ile,

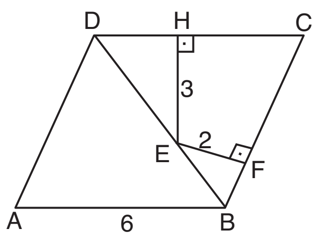
$|KH|^2 = |AH|.|BH| \Rightarrow |KH|^2 = 4.9 = 36 \Rightarrow |KH| = 6$ cm bulunur.

K.K.K. eşlik kuralına göre, $\widehat{ABK} \cong \widehat{CDK}$ ve bu eş üçgenlerin yükseklikleri $|EK| = |HK| = 6$ cm olduğundan,

$|EH| = 6 + 6 = 12$ cm olur.

Sonuçta $A(ABCD) = |AB|.|EH| = 13.12 = 156\ cm^2$ bulunur.

Örnek

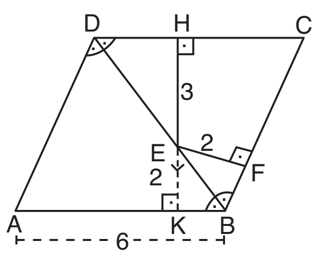


ABCD eşkenar dörtgeninde; $E \in [BD]$, $[EH] \perp [CD]$

$[EF] \perp [BC]$, $|EH| = 3$ cm , $|EF| = 2$ cm ve $|AB| = 6$ cm

olduğuna göre, $A(ABCD)$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



[EH] dikmesi [AB] kenarına doğru uzatılırsa, [BD] köşegeni açıortay olduğundan;

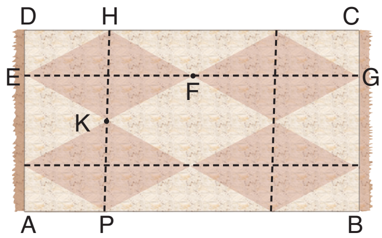
$|EF| = |EK| = 2$ cm $\Rightarrow |HK| = 3 + 2 = 5$ cm,

$A(ABCD) = |AB|.|HK| = 6.5 = 30\ cm^2$ bulunur.

Örnek

Boyutları 8 m ve 4 m olan dikdörtgen biçiminde bir kilim üzerine şekildeki gibi birbirine eş eşkenar dörtgen biçiminde motif dokunmuştur. Eşkenar dörtgen motiflerden birinin kapladığı alanı bulalım.

Çözüm



Şekildeki eşkenar dörtgen motifler birbirine eş olduğundan,

|EF| = |FG| ve |HK| = |KP| olur.

Dikdörtgen biçimindeki kilimde;

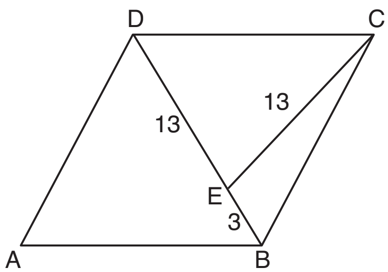
|AB| = 8 m = |EF| + |FG| = 2|EF| ⇒ |EF| = |FG| = 4 m,

|BC| = 4 m = |HK| + |KP| = 2|HK| ⇒ |HK| = |KP| = 2 m

bulunur. Sonuçta bir eşkenar dörtgen biçimindeki motifin kapladığı alan,

$$A(EKFH) = \frac{|EF|.|HK|}{2} = \frac{4.2}{2} = 4\,m^2 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek

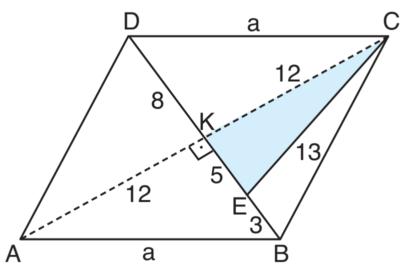


ABCD eşkenar dörtgeninde;

[BD] köşegen, |CE| = |DE| = 13 cm ve |BE| = 3 cm ise,

A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



[AC] köşegeni çizilirse; [AC] ⊥ [BD],

|AK| = |CK| ve |BK| = |DK| olacağından,

$|DK| = \frac{16}{2} = 8$ cm , |EK| = 8 – 3 = 5 cm ve

CKE dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile

$|CK| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm bulunur.

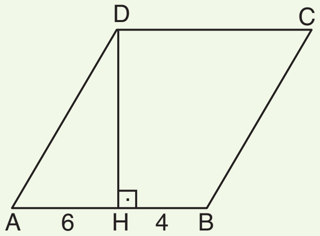
|AC| = 2.|CK| ⇒ |AC| = 2.12 = 24 cm ve $A(ABCD) = \frac{|AC|.|BD|}{2} = \frac{24.16}{2} = 192\ cm^2$ olur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

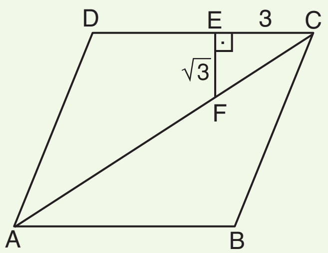
( ) Eşkenar dörtgenin alanı köşegen uzunlukları çarpımının yarısıdır.
( ) Eşkenar dörtgende köşegenler diktir.
( ) Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaydır ve birbirini dik ortalar.
( ) Tüm kenarları eş olan paralelkenara eşkenar dörtgen denir.

2.



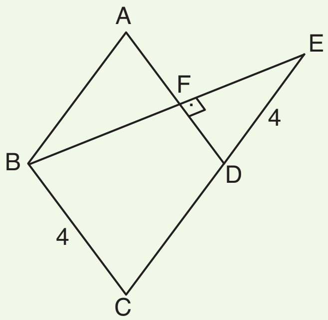
ABCD eşkenar dörtgen;
$[DH] \perp [AB]$, $|AH| = 6$ cm , $|BH| = 4$ cm ise,
A(ABCD) kaç cm^2 olur?

3.



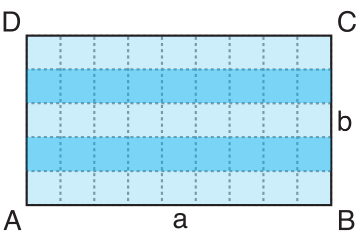
ABCD eşkenar dörtgen; $F \in [AC]$, $[EF] \perp [CD]$,
$|AF| = 3\,|CF|$, $|EF| = \sqrt{3}$ cm ve $|CE| = 3$ cm ise,
A(ABCD) kaç cm^2 olur?

4.



ABCD eşkenar dörtgen, EBC bir üçgen,
$[BE] \perp [AD]$, $|DE| = |BC| = 4$ cm ise,
A(ABCD) kaç cm^2 olur?

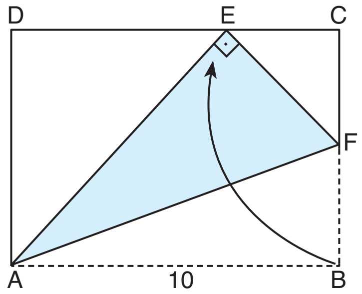
DİKDÖRTGENİN ALANI



Bir ABCD dikdörtgeninde $|AB| = a$ birim ve $|BC| = b$ birim ise şekilde görüldüğü gibi dikdörtgensel bölgede bulunan birim karelerin sayısı a.b olduğundan ABCD dikdörtgeninin alanı

A(ABCD) = a.b birimkare olur.

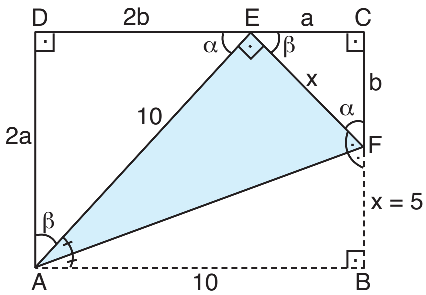
Örnek



ABCD dikdörtgeni biçimindeki bir kâğıt parçası şekildeki gibi B köşesi [CD] kenarı üzerindeki bir E noktası ile çakışacak şekilde [AF] boyunca katlanıyor.

|AB| = 10 cm ve katlanmış AEF üçgensel bölgesinin alanı 25 cm^2 olduğuna göre, A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Kâğıdı [AF] boyunca katladığımızda $\widehat{ABF}$ ile $\widehat{AEF}$ çakıştığından bu üçgenler eştir. Bu yüzden,

|AB| = |AE| = 10 cm ve |FB| = |EF| = x olur.

A($\widehat{AEF}$) = 25 cm^2 verildiğinden,

$\dfrac{10.x}{2} = 25 \Rightarrow x = 5$ cm bulunur.

Şekilde açı değerleri isimlendirilirse,

A.A. benzerlik kuralına göre, $\widehat{FCE} \sim \widehat{EDA}$ ve benzerlik oranı $\dfrac{|EF|}{|AE|} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan,

|EC| = a $\Rightarrow$ |AD| = 2a ve |CF| = b $\Rightarrow$ |DE| = 2b olur. ABCD dikdörtgeninde,

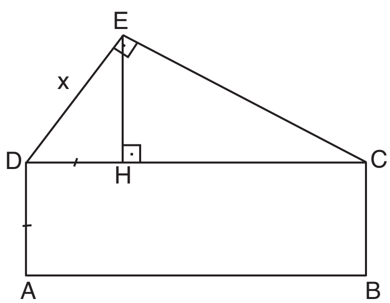
|CD| = a + 2b = 10 ve |BC| = |AD| $\Rightarrow$ b + 5 = 2a olduğundan,

$\begin{cases} a + 2b = 10 \ldots\ldots\ (1) \\ 2a - b = 5 \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$ denklem sisteminde (2) denkleminin 2 katını alıp, (1) denklemi ile taraf tarafa toplarsak,

5a + 0 = 20 $\Rightarrow$ a = 4 cm olur. Sonuçta:

|AD| = 2a = 2.4 = 8 cm ve A(ABCD) = 10.8 = 80 cm^2 bulunur.

Örnek



ABCD dikdörtgen, CDE dik üçgen,

[DE] ⊥ [CE] , [EH] ⊥ [CD] ,

|AD| = |DH| ve A(ABCD) = 27 cm^2

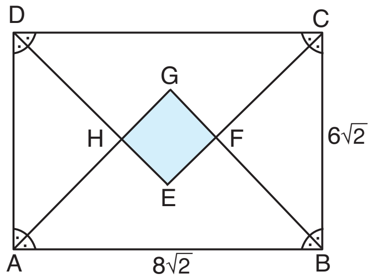
olduğuna göre, |DE| = x kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm

CDE dik üçgeninde [EH] ⊥ [CD] olduğundan Öklid Bağıntısı'na göre, $|DE|^2 = |DH|.|CD|$ olduğundan,

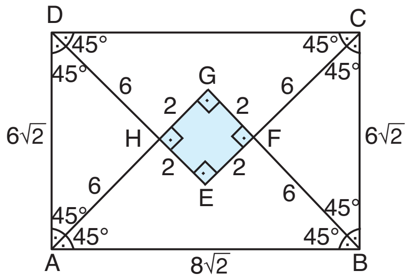
$x^2 = |DH|.|CD| = |AD|.|CD| = A(ABCD) = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

Örnek



ABCD dikdörtgeninde;
[AG] , [BG] , [CE] ve [DE] açıortaylar,
$|BC| = 6\sqrt{2}$ cm , $|AB| = 8\sqrt{2}$ cm ise,
A(EFGH) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm

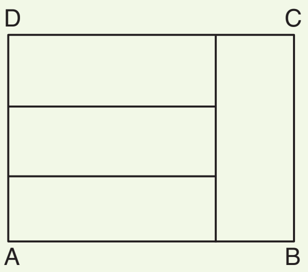


E, F, G ve H açıortayların kesim noktası olduğundan, ADH, BCF, CDE ve ABG ikizkenar dik üçgenler olur.
$|AD| = |BC| = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow |AH| = |DH| = |BF| = |CF| = 6$ cm,
$|AB| = |CD| = 8\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow |AG| = |BG| = |CE| = |DE| = 8$ cm,
$|EH| = |EF| = 8 - 6 = 2$ cm $\Rightarrow$ EFGH bir kare olur.
Sonuçta $A(EFGH) = 2^2 = 4$ cm^2 bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine “D”, yanlış ise “Y” yazınız.
( ) Dikdörtgende köşegenler diktir.
( ) Dikdörtgenin alanı dik kenar uzunlukları çarpımına eşittir.
( ) Dikdörtgenin alanı köşegen uzunlukları çarpımının yarısıdır.

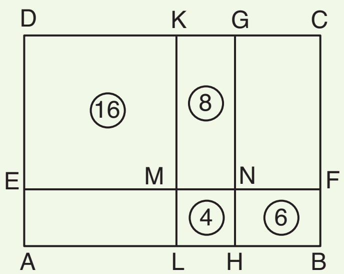
2.



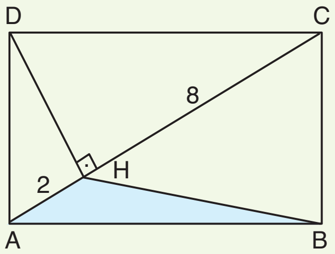
ABCD dikdörtgeninin içine birbirine eş olan 4 tane dikdörtgen yerleştirilmiştir. Çevre(ABCD) = 28 cm olduğuna göre,
A(ABCD) kaç cm^2 olur?

3. Bir dikdörtgeninin alanı 60 cm^2 ve bir köşegeninin uzunluğu 13 cm olduğuna göre, çevre uzunluğu kaç cm dir?

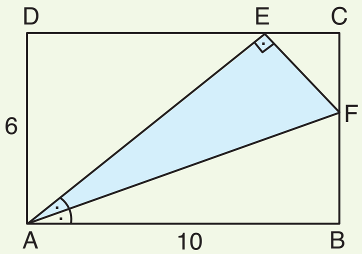
4.



ABCD dikdörtgen;
[AB] // [EF] , [BC] // [GH] // [KL],
A(BFNH) = 6 cm^2 , A(MLHN) = 4 cm^2,
A(MNGK) = 8 cm^2 ve A(EMKD) = 16 cm^2 ise,
A(ABCD) kaç cm^2 olur?

5. 

ABCD dikdörtgeninde; $[DH] \perp [AC]$, $|AH| = 2$ cm; $|CH| = 8$ cm olduğuna göre, $A(\widehat{ABH})$ kaç cm^2 olur?

6. 

ABCD dikdörtgen; $[AE] \perp [EF]$,

$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{EAF})$,

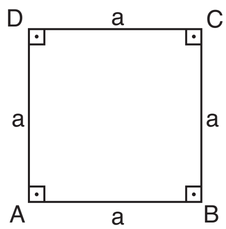
$|AB| = 10$ cm ,

$|AD| = 6$ cm ise,

$A(\widehat{AEF})$ kaç cm^2 olur?

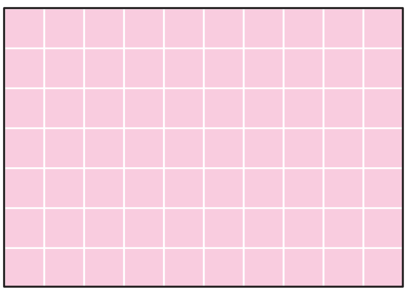
7. Çevre uzunluğu 20 cm olan bir dikdörtgensel bölgenin alanının alabileceği en büyük değer kaç cm^2 olur?

KARENİN ALANI



Kare tüm kenarları birbirine eş olan bir dikdörtgen olduğundan şekildeki bir kenar uzunluğu a olan ABCD karesinin alanı $A(ABCD) = a.a = a^2$ olur.

Örnek



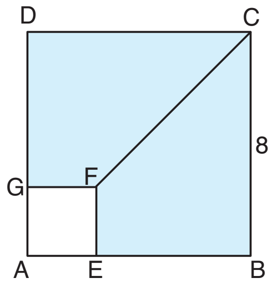
Boyutları 300 cm ve 240 cm olan dikdörtgen biçimindeki banyo zemini, bir kenar uzunluğu 30 cm olan kare biçimindeki seramiklerle kaplanacaktır. Zeminin tamamını kaplamak için kaç tane seramik kullanılır. Bulalım.

Çözüm

Bir seramiğin kapladığı alan 30.30 cm^2 ve zemini tamamen kaplamak için x tane seramik kullanılsa,

$$x.30.30 = 240.300 \Rightarrow x = \frac{240.300}{30.30} = 8.10 = 80 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek

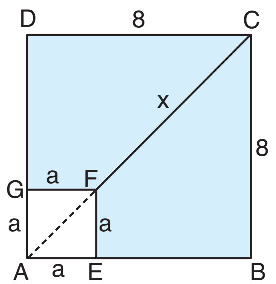


Şekilde ABCD ve AEFG birer karedir.

|BC| = 8 cm ve taralı bölgenin alanı A(BCDGFE) = 55 cm^2 ise,

|CF| nun kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



AEFG karesinin bir kenar uzunluğu a cm olsun. Taralı bölgenin alanı,

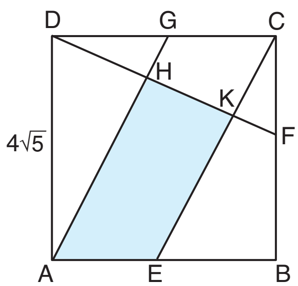
$55 = 64 - a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ cm olur.

AEFG karesinin köşegen uzunluğu, $|AF| = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm,

ABCD karesinin köşegen uzunluğu, $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olduğundan,

$|CF| = |AC| - |AF| \Rightarrow 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm bulunur.

Örnek

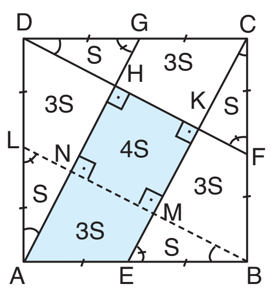


ABCD kare, E, F ve G kenarların orta noktaları,

$[AG] \cap [DF] = \{H\}$, $[CE] \cap [DF] = \{K\}$, $|AD| = 4\sqrt{5}$ cm ise,

taralı AEKH dörtgeninin alanını bulalım.

Çözüm



B köşesini karşı kenarın L orta noktasına birleştirirsek,

A.K.A. eşlik kuralından, $\widehat{DGH} \cong \widehat{CFK} \cong \widehat{BEM} \cong \widehat{ALN}$

ve A(DGH) = A(CFK) = A(BEM) = A(ALN) = S olur.

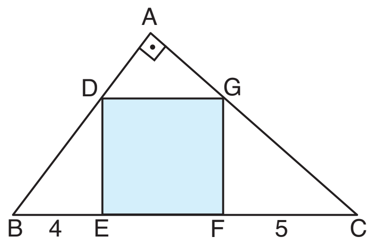
Şekildeki benzer üçgenlerin alan dağılımları yapılırsa,

$A(ABCD) = (4\sqrt{5})^2 = 4.5S = 20S = 80 \Rightarrow S = 4$ cm^2,

$A(MNHK) = 20S - 16S = 4S$ ve sonuçta,

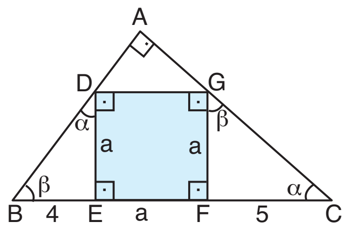
$A(AEKH) = 3S + 4S = 7S = 7.4 = 28$ cm^2 bulunur.

Örnek



ABC dik üçgen DEFG kare, $[AB] \perp [AC]$, $|BE| = 4$ cm, ve $|CF| = 5$ cm olduğuna göre, A(DEFG) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



ABC dik üçgeninde $m(\widehat{C}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$, $|DE| = |FG| = a$ olsun.

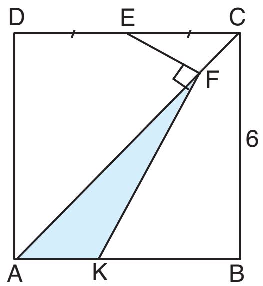
Bu durumda, $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow m(\widehat{BDE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CGF}) = \beta$ olur.

A.A. benzerlik kuralından,

$\widehat{DBE} \sim \widehat{CGF} \Rightarrow \dfrac{4}{a} = \dfrac{a}{5} \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow A(DEFG) = 20\ cm^2$

bulunur.

Örnek

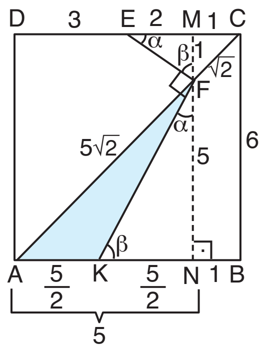


ABCD kare; $[EF] \perp [FK]$, $F \in [AC]$,

$|DE| = |CE|$, $|AF| = 5\,|CF|$, $|BC| = 6$ cm

olduğuna göre, $A(\widehat{AKF})$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Şekilde F noktasından geçen $[MN] \,//\, [BC]$ çizilirse,

$|AC| = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$ $|CF| = \sqrt{2}$ cm, $|AF| = 5\sqrt{2}$ cm,

$|BN| = |CM| = |FM| = 1$ cm, $|AN| = |FN| = 5$ cm olur.

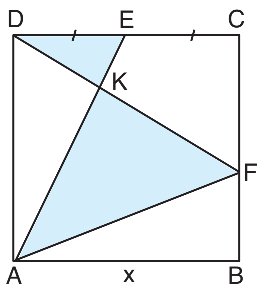
A.A. benzerlik kuralına göre, $\widehat{EFM} \sim \widehat{FKN}$ olduğundan,

$\dfrac{|FM|}{|ME|} = \dfrac{|KN|}{|FN|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|KN|}{5} \Rightarrow |KN| = \dfrac{5}{2}$ ve $|AK| = 5 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$ cm

bulunur. Sonuçta,

$A(\widehat{AKF}) = \dfrac{|AK|.|FN|}{2} = \dfrac{5}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{4}\ cm^2$ olur.

Örnek



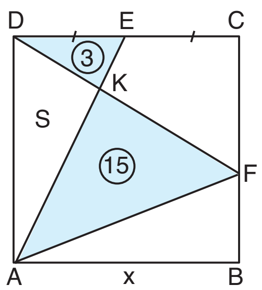
ABCD kare; ADF bir üçgen,

$[AE] \cap [DF] = \{K\}$, $|DE| = |CE|$,

$A(\widehat{DEK}) = 3\ cm^2$, $A(\widehat{AFK}) = 15\ cm^2$ ise,

$|AB| = x$ kaç cm dir? Bulalım.

Çözüm



Şekilde $A(\widehat{AKD}) = S$ olsun.

$A(ABCD) = 4.A(\widehat{ADE}) = 2.A(\widehat{ADF}) \Rightarrow A(\widehat{AFD}) = 2.A(\widehat{ADE})$

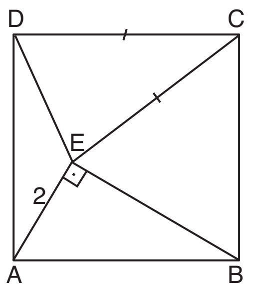
$\Rightarrow S + 15 = 2(S + 3)$

$\Rightarrow S + 15 = 2S + 6 \Rightarrow S = 9\ cm^2$ olur.

$A(ABCD) = 2.\ A(\widehat{ADF}) = 2(S + 15) = 2(9+15) = 48\ cm^2$ ise

$x^2 = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm bulunur.

Örnek

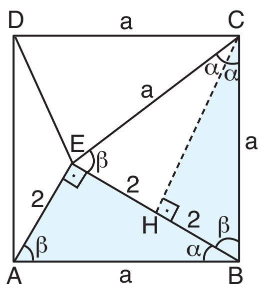


ABCD kare; $[AE] \perp [BE]$,

$[CD] = [CE]$, $|AE| = 2$ cm ise,

$A(ABCD)$ kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



$[CH] \perp [BE]$ çizilir ve $m(\widehat{ABE}) = \alpha$, $m(\widehat{BAE}) = \beta$ olarak isimlendirilirse,

CHB dik üçgeninde de $m(\widehat{BCH}) = \alpha$, $m(\widehat{CBE}) = \beta$ olur.

$|AB| = |BC| = a$ olduğundan A.K.A. eşlik kuralına göre,

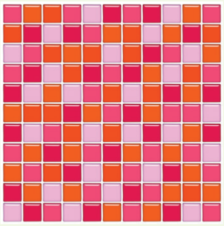
$\widehat{BAE} \cong \widehat{CBH} \Rightarrow |AE| = |BH| = |EH| = 2$ cm $\Rightarrow |BE| = 4$ cm bulunur.

Sonuçta ABE dik üçgeninde Pisagor Teoremi kullanılırsa,

$A(ABCD) = a^2 = 2^2 + 4^2 = 20\ cm^2$ bulunur.

Alıştırmalar

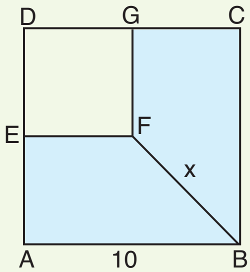
1.



Bir kenar uzunluğu 3 metre olan kare biçimindeki bir mutfak duvarı, bir kenarı 10 cm olan kare biçimindeki seramiklerle kaplanacaktır.

Buna göre mutfak duvarının tamamının kaplanması için kaç tane seramik gereklidir?

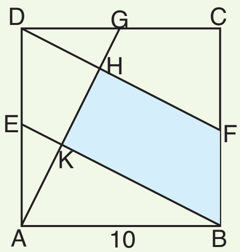
2.



Şekilde ABCD ve DEFG kare, $|AB| = 10$ cm ve

$A(ABCGFE) = 64 \text{ cm}^2$ olduğuna göre, $|BF| = x$ kaç cm dir?

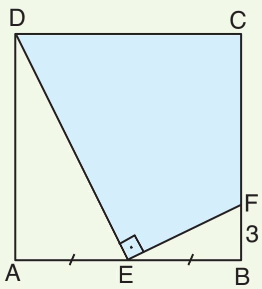
3.



ABCD kare; E, F ve G kenarların orta noktaları, $[AG] \cap [DF] = \{H\}$

$[AG] \cap [BE] = \{K\}$ ve $|AB| = 10$ cm olduğuna göre, BFHK dörtgeninin alanı kaç cm^2 olur?

4.

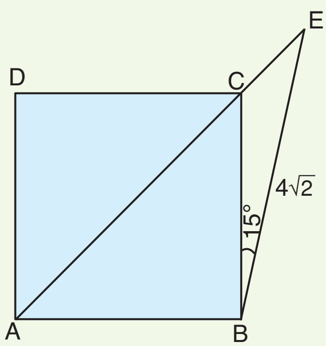


ABCD kare, $[DE] \perp [EF]$,

$|AE| = |BE|$, $|FB| = 3$ cm ise,

A(CDEF) kaç cm^2 olur?

5.

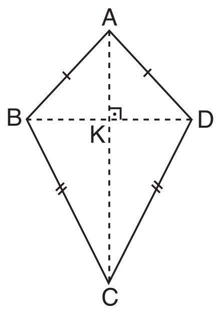


ABCD kare, ABE bir üçgen,

$m(\widehat{CBE}) = 15°$, $|BE| = 4\sqrt{2}$ cm ise,

A(ABCD) kaç cm^2 olur?

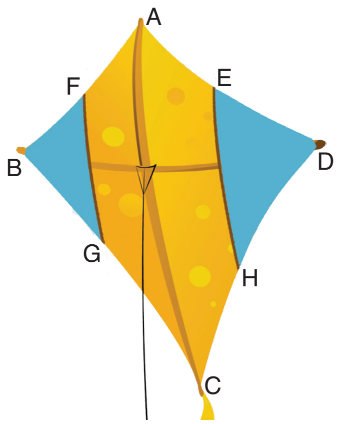
DELTOİDİN ALANI



Bir ABCD deltoidinde $|AB| = |AD|$, $|AC| = e$, $|BD| = f$ olsun.

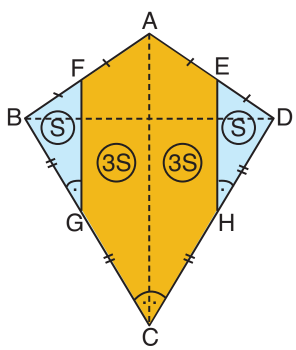
$[AC] \perp [BD]$ olduğundan bu deltoidin alanı $A(ABCD) = \dfrac{e \cdot f}{2}$ olur.

Örnek



Resimdeki ABCD deltoidi biçimindeki uçurtmada E, F, G, H kenarların orta noktaları ve $|AB| = |AD|$ dir. Uçurtmayı yapmak için kullanılan çıtaların uzunluğu, $|AC| = |BD| = 80$ cm olduğuna göre, uçurtma kâğıdı ile kaplanan AFGCHE yüzeyinin alanı kaç dm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



E, F, G ve H kenarların orta noktaları olduğundan ABC üçgeninde [FG], ADC üçgeninde [EH] orta taban ve [FG] // [AC] // [EH] olur. A.A. benzerlik kuralından göre,

$\widehat{BGF} \sim \widehat{BCA}$, $\widehat{DHE} \sim \widehat{DCA}$ ve bu üçgenlerde benzerlik oranı

$k = \dfrac{1}{2}$ ve alansal oran $k^2 = \dfrac{1}{4}$ olur.

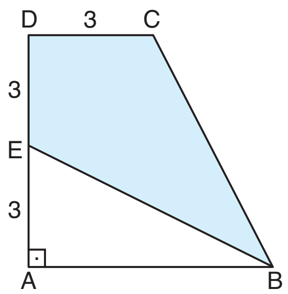
K.A.K. eşlik kuralından $\widehat{BGF} \cong \widehat{DHE}$ olduğundan,

$A(\widehat{BGF}) = A(\widehat{DHE}) = S$, $A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ADC}) = 4S \Rightarrow A(AFGCHE) = 8S - 2S = 6S$ olur.

$A(ABCD) = 8.S = \dfrac{|AC|.|BD|}{2} = \dfrac{80.80}{2} = 3200 \Rightarrow S = 400\text{ cm}^2$ olduğundan,

$A(AFGCHE) = 6.S = 6.400 = 2400\text{ cm}^2 = 24\text{ dm}^2$ bulunur.

Örnek



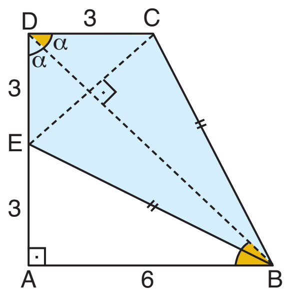
ABCD dik yamuk, BCDE deltoid

$[AB] \parallel [CD]$, $[AB] \perp [AD]$,

$|AE| = |DE| = |CD| = 3$ cm ise,

A(BCDE) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



BCDE deltoidinde [BD] köşegeni çizilirse açıortay olacağından,

$m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{ADB}) = \alpha$ ve iç ters açılardan

$m(\widehat{ABD}) = \alpha$ bulunur. ADB ikizkenar üçgen olduğundan,

$|AB| = |AD| = 6$ cm elde edilir.

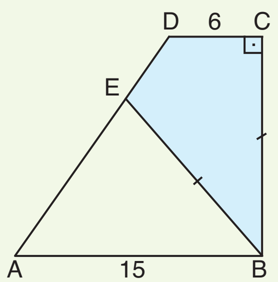
ADB ikizkenar dik üçgeninde Pisagor Teoremi ile $|BD| = 6\sqrt{2}$ cm,

DCE ikizkenar dik üçgeninde ise, $|CE| = 3\sqrt{2}$ cm olur.

Sonuçta $A(BCDE) = \dfrac{|CE|.|BD|}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}.6\sqrt{2}}{2} = 18\ cm^2$ bulunur.

Alıştırmalar

1.



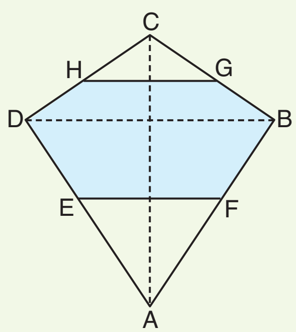
ABCD dik yamuk, BCDE deltoid,

$[AB] \parallel [CD]$, $[BC] \perp [CD]$, $|BC| = |BE|$

$|AB| = 15$ cm ve $|CD| = 6$ cm ise,

A(BCDE) kaç cm^2 olur?

2.



ABCD deltoid, E, F, G ve H kenarların orta noktaları

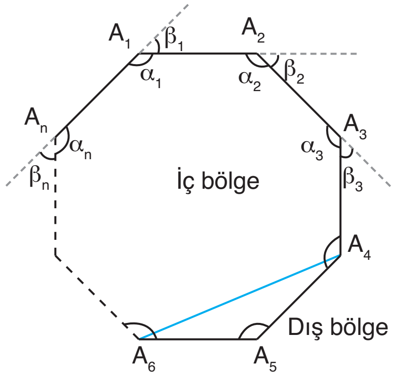
$|AB| = |AD|$, $|BD| = 8$ cm ve $|AC| = 9$ cm,

olduğuna göre, taralı EFBGHD bölgesinin alanı kaç cm^2 olur?

3. ABCD deltoidinde $|AB| = |AD|$ ve $E \in [CD]$ olmak üzere $|DE| = |CE|$, $[AC] \cap [BE] = \{F\}$ olmaktadır. $A(\widehat{BCE}) = 9\ cm^2$ olduğuna göre, $A(\widehat{BCF})$ kaç cm^2 olur?

5.3 : ÇOKGENLER

5.3.1 : Çokgenler ve Çokgenlerde Açılar



$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ herhangi ardışık üçü doğrusal olmayan noktalar olsun.

$[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_nA_1]$

birleşim kümesine n kenarlı (köşeli) bir çokgen denir.

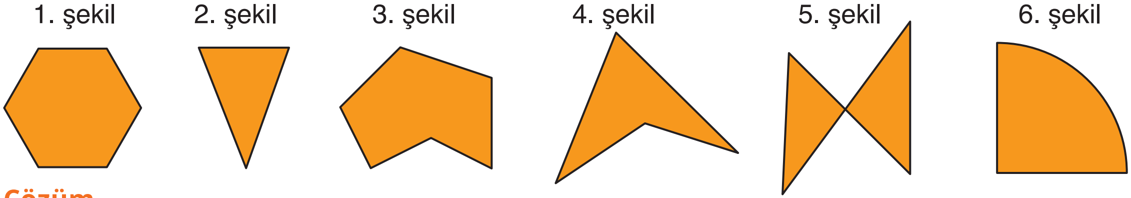
$A_1, A_2, A_3, \ldots,$ An noktalarına çokgenin köşeleri,

$[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_nA_1]$ doğru parçalarına çokgenin kenarları, kapalı şeklin içine iç bölge, dışına dış bölge, bir çokgen ile çokgenin iç bölgesinin birleşim kümesine de çokgensel bölge denir. Ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına köşegen denir. Şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ iç açı ölçüleri; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ dış açı ölçüleri ve $[A_4A_6]$ bir köşegendir.

Örnek

Aşağıda verilen şekillerin çokgen olup olmadıklarını bulalım.

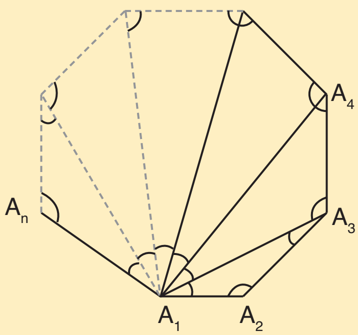
1. şekil 2. şekil 3. şekil 4. şekil 5. şekil 6. şekil



Çözüm

5. Şekil ardışık üç köşesi doğrusal ve ayrık iki iç bölgesi olduğu için; 6. Şekil ise yalnız doğru parçalarından oluşmadığı için çokgen değildir. 1, 2, 3 ve 4. şekiller birer çokgendir.

Etkinlik



▶ Şekildeki gibi n tane kenarı olan ($n \geq 3$) bir çokgen çiziniz. Bu çizim bir varsayımdır. Bunun için n. köşeye yakın son kenarları kesik çizgilerle belirtiniz.

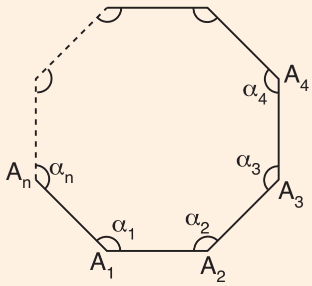
▶ İstediğiniz belli bir köşeden geçen tüm köşegenleri çiziniz.

■ Belli bir köşeden geçen köşegenlerin tümü ile şeklin içinde kaç tane ayrık üçgensel bölge oluşturulabilir? Sonucu n sayısı cinsinden bulunuz.

▶ Bu üçgenlerin hepsinde iç açı ölçülerini çizdiğiniz şekilde belirtiniz. Bütün bu üçgenlerin iç açı ölçülerinin toplamı, çokgenin iç açı ölçüleri toplamına eşit olur mu? İnceleyiniz.

■ Çokgenin iç açı ölçülerinin toplamını veren bağıntıyı n kenar sayısı cinsinden yazınız.

Bunları Bilelim



n kenarlı bir çokgende belli bir köşeden çizilen köşegenlerle **(n – 2)** tane ayrık üçgensel bölge oluşur. Bu yüzden n kenarlı bir çokgende iç açı ölçülerinin toplamı **(n – 2).180°** olur. ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$),

Şekildeki $A_1A_2...A_n$ çokgeninde iç açı ölçüleri toplamı

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_n = (n-2).180°$ olur.

Örnek

İç açı ölçülerinin aritmetik ortalaması 150° olan bir çokgen kaç kenarlıdır? Bulalım.

Çözüm

$n \geq 3$ bir doğal sayı olmak üzere n kenarlı bir çokgenin iç açı ölçüleri $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olsun.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n} = 150° \Rightarrow \frac{(n-2).180°}{n} = 150° \Rightarrow (n-2)18 = 15n$$

$$18n - 36 = 15n \Rightarrow 3n = 36 \Rightarrow n = 12 \text{ bulunur.}$$

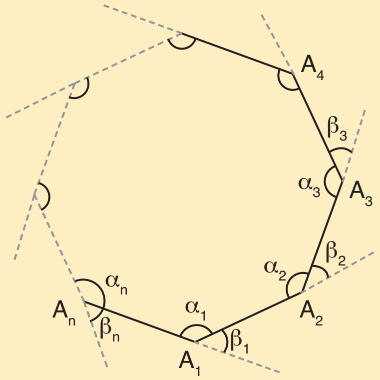
Örnek

Dörtgende, beşgende ve altıgende iç açı ölçülerinin toplamını bulalım.

Çözüm

Dörtgende iç açı ölçülerinin toplamı (4 – 2) 180° = 360°, beşgende iç açı ölçülerinin toplamı (5 – 2) 180° = 540° ve altıgende iç açı ölçülerinin toplamı (6 – 2) 180° = 720° olur.

Etkinlik



▶ Defterinize n kenarlı $A_1 A_2 ... A_n$ dışbükey çokgenini çizip bu çokgenin iç açı ölçülerini $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ile isimlendiriniz.

▶ Her bir köşede kenarı uzatarak o köşedeki dış açı ölçüsünü köşe numarasına göre $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ ile isimlendiriniz.

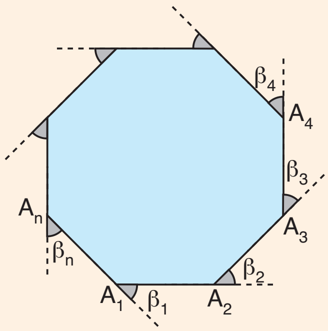
▶ Bir köşedeki dış açı ölçüsünün, o köşedeki iç açı ölçüsünün bütünleri olduğunu öğrenmiştiniz. Buna göre her bir köşedeki dış açı ölçüsünü, o köşedeki iç açı ölçüsü cinsinden bulunuz.

▶ Dış açı ölçülerinin toplamı $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ sayısını iç açı değerleri cinsinden yazınız.

▶ Son bulduğunuz dış açılar toplamında $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ iç açı ölçüleri toplamı yerine bunun n kenar sayısına bağlı eşitini yazıp toplama işlemini sonuçlandırınız.

■ n kenarlı herhangi bir dışbükey çokgende dış açı ölçülerinin toplamı olarak hangi sabit sayıyı buldunuz? Açıklayınız.

Bunları Bilelim

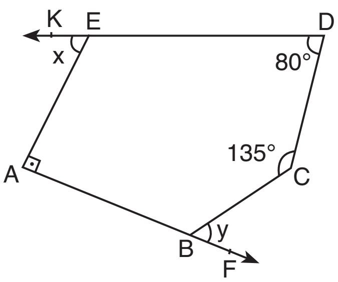


$n \geq 3$ olmak üzere n kenarlı bir çokgende dış açı ölçüleri toplamı 360 derecedir ($n \in \mathbb{N}$).

Şekildeki $A_1A_2 \ldots A_n$ çokgeninde dış açı ölçüleri toplamı,

$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360°$ olur.

Örnek



ABCDE bir beşgen, $m(\widehat{FAE}) = 90°$, $m(\widehat{BCD}) = 135°$, $m(\widehat{CDK}) = 80°$dir. Buna göre, B ve E köşelerindeki dış açı ölçüleri toplamı x + y kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

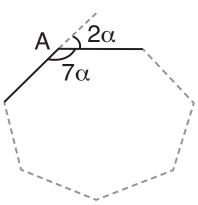
Bir dış açının ölçüsü, aynı köşedeki iç açı ölçüsünün bütünleri olduğundan; dış açı ölçüsü A köşesinde 90°, C köşesinde 45° ve D köşesinde 100° olur. ABCDE beşgeninde dış açı ölçülerinin toplamı,

$90° + y + 45° + 100° + x = 360° \Rightarrow x + y + 235° = 360° \Rightarrow x + y = 125°$ bulunur.

Örnek

Bir dışbükey çokgende aynı köşedeki dış açı ölçüsünün, iç açı ölçüsüne oranı $\frac{2}{7}$ olduğuna göre bu köşedeki dış açının ölçüsü kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



Çokgenin bir A köşesinde dış açı ölçüsü 2α ve iç açı ölçüsü 7α alınırsa,

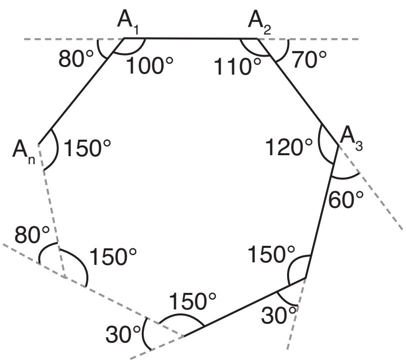
$2\alpha + 7\alpha = 9\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$ bulunur. Bu köşedeki dış açı ölçüsü

$2\alpha = 2.20° = 40°$ olur.

Örnek

Bir dışbükey çokgende üç tane iç açı ölçüsü 100, 110 ve 120 derecedir. Diğer iç açılar birbirine eş ve ölçüleri 150° olduğuna göre bu çokgen kaç kenarlıdır? Bulalım.

Çözüm



Şekilde görüldüğü gibi n kenarlı bu çokgende verilenler yazılırsa dış açı ölçülerinin toplamı;

$80° + 70° + 60° + (n - 3)30° = 360°$ olacağından,

$(n - 3)30° = 150° \Rightarrow n - 3 = 5 \Rightarrow n = 8$ bulunur.

Örnek

İç açı ölçüleri toplamı dış açı ölçüleri toplamının 5 katı olan dış bükey çokgen kaç kenarlıdır? Bulalım.

Çözüm

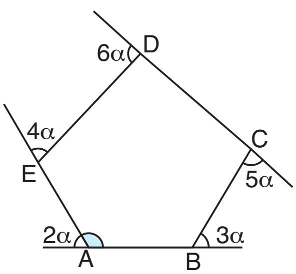
n kenarlı bir çokgende iç açı ölçülerinin toplamı $(n - 2).180°$, dış açı ölçüleri toplamı 360° ve verilen çokgende $(n - 2).180° = 5.360°$ olduğundan $n - 2 = 5.2 \Rightarrow n - 2 = 10 \Rightarrow n = 12$ bulunur.

Sonuçta bu çokgen 12 kenarlıdır.

Örnek

Dış bükey bir beşgende dış açı ölçüleri 2, 3, 4, 5 ve 6 sayıları ile orantılı olduğuna göre bu beşgenin en büyük iç açı ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



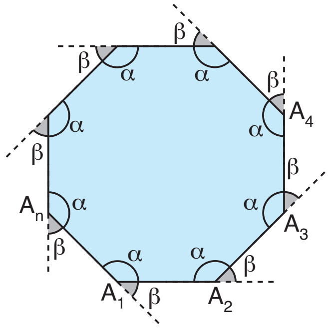
ABCDE beşgeninde dış açı ölçüleri 2α, 3α, 4α, 5α ve 6α olsun. Her dışbükey çokgende dış açı ölçülerinin toplamı 360° olduğundan

$2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 360° \Rightarrow 20\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 18°$ bulunur.

Dış açı ölçüsünün en küçük olduğu köşede iç açı ölçüsü en büyük olacağından bu beşgenin en büyük iç açı ölçüsü şekilde

$m(\widehat{A}) = 180° - 2\alpha = 180° - 2.18° = 180° - 36° = 144°$ bulunur.

Düzgün Çokgenler

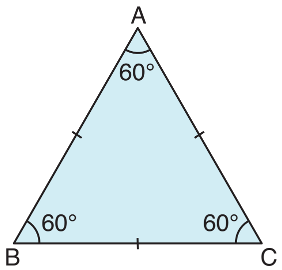


Kenar uzunlukları ve tüm iç açı ölçüleri birbirine eşit olan çokgene düzgün çokgen denir. Çokgenlerde dış açı ölçüleri toplamı 360° olduğundan şekildeki n kenarlı düzgün çokgende,

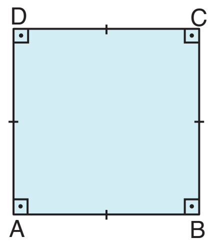
$\overbrace{\beta + \beta + ... + \beta}^{\text{n tane}} = 360° \Rightarrow n.\beta = 360° \Rightarrow \beta = \dfrac{360°}{n}$ bir dış açı ölçüsü olur.

Buna göre bir iç açı ölçüsü,

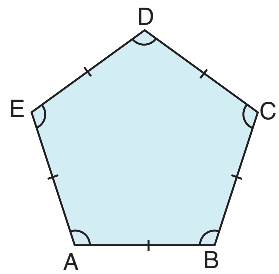
$\alpha = 180° - \beta = 180° - \dfrac{360°}{n} = \dfrac{180°.n - 360°}{n} = \dfrac{(n-2).180°}{n}$ bulunur.



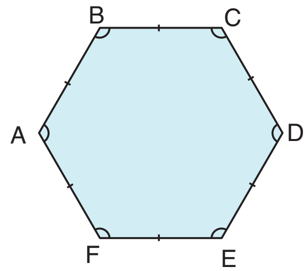
Düzgün üçgen
(Eşkenar üçgen)



Düzgün dörtgen
(Kare)



Düzgün beşgen

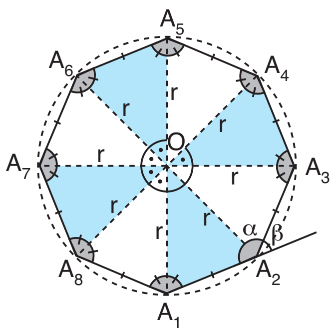


Düzgün altıgen

Örnek

Pergel ve açı ölçer yardımı ile bir düzgün sekizgen çizerek bir dış açı ölçüsünün ve bir iç açı ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



Pergel yardımı ile O merkezli ve r yarıçaplı çember çizerek bu çemberi birbirine eş 8 yay parçasına ayıralım. Bu yayların A_1, A_2, A_3, ..., A_8 uç noktalarını birleştiren doğru parçalarıyla $A_1A_2...A_8$ sekizgenini çizelim.

Bir çemberde eş yayların kirişleri de eş olacağından şekildeki $A_1A_2A_3....A_8$ sekizgeninin tüm kenarları eşit uzunluktadır. K. K. K. eşlik kuralına göre yukarıdaki şekilde

OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., OA_8A_1

ikizkenar üçgenleri birbirine eş olduğundan A_1A_2 ... A_8 sekizgeninin tüm iç açı ölçüleri dolayısıyla tüm dış açı ölçüleri eşit olup bir düzgün çokgen olur.

Bu düzgün çokgenin bir dış açı ölçüsü β , bir iç açı ölçüsü α ise,

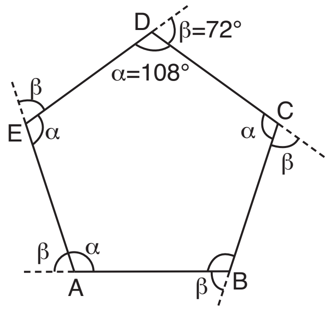
$\beta = \dfrac{360°}{8} = 45°$ ve $\alpha = 180° - \beta = 180° - 45° = 135°$ bulunur.

Düzgün çokgenin çizimine yardımcı olan O merkezli çembere düzgün çokgenin çevrel çemberi denir. Bu çemberin merkezi düzgün çokgenin ağırlık merkezidir. Yukarıdaki şekilde $[OA_1]$, $[OA_2]$, ..., $[OA_8]$ yarıçapları birer açıortaydır. Birbirine eş OA_1A_2, OA_2A_3, ... OA_8A_1 ikizkenar üçgenlerinin tepe açılarının ölçüsü $\beta = \dfrac{360°}{8} = 45°$ düzgün çokgenin bir dış açı ölçüsüne eşittir.

Örnek

Bir düzgün beşgende bir dış açı ölçüsü ile bir iç açı ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

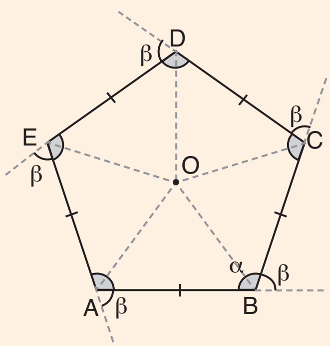
Çözüm



Düzgün beşgende tüm dış açı ölçüleri birbirine eşit bir β değeri olduğundan dış açılar toplamı $5\beta = 360° \Rightarrow \beta = \dfrac{360°}{5} = 72°$ bulunur.

Aynı köşede bir dış açı ile bir iç açı ölçüsü bütünler olduğu için de $\alpha = 180° - \beta = 180° - 72° = 108°$ bir iç açının ölçüsü olur.

Bunları Bilelim



Düzgün Beşgen: Tüm kenar uzunlukları ve iç açı ölçüleri birbirine eşit olan beşgendir.

Bir dış açısının ölçüsü $\beta = \dfrac{360°}{5} = 72°$,

bir iç açısının ölçüsü $\alpha = 180° - 72° = 108°$ olur.

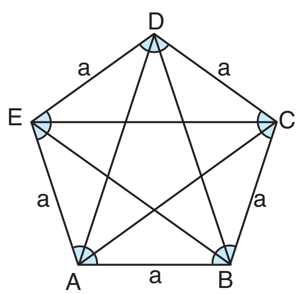
Şekildeki O noktası çevrel çemberin merkezi ve düzgün beşgenin ağırlık merkezidir. OAB, OBC, OCD, ODE, OEA birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir.

Düzgün beşgende [OA], [OB], [OC], [OD] ve [OE] iç açıortaylardır.

Örnek

Düzgün beşgende tüm köşegenlerin birbirine eş olduğunu gösterelim.

Çözüm



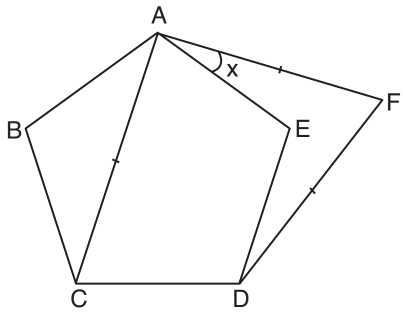
Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde tüm kenarlar birbirine eş ve tüm iç açıların ölçüsü $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = m(\widehat{E}) = 108°$

olduğundan K.A.K. eşlik kuralına göre,

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{BCD} \cong \overset{\frown}{CDE} \cong \overset{\frown}{DEA} \cong \overset{\frown}{EAB}$ ve

$|AC| = |BD| = |CE| = |AD| = |BE|$ bulunur.

Örnek

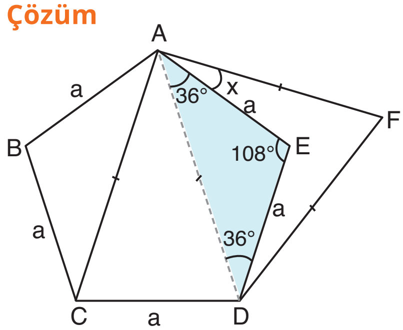


ABCDE düzgün beşgen

$|AC| = |AF| = |DF|$

olduğuna göre, $m(\widehat{EAF}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



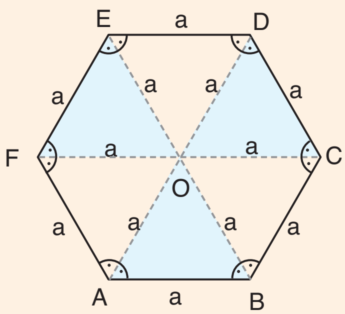
[AD] köşegeni çizilirse $|AD| = |AC|$ olacağından ADF eşkenar üçgendir. ADE ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{E}) = 108^\circ$ ve

$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{ADE}) = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ olduğundan

$x = m(\widehat{FAD}) - m(\widehat{EAD}) = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$ bulunur.

Bunları Bilelim

Düzgün Altıgen: Bütün kenar uzunlukları ve iç açı ölçüleri birbirine eşit olan altıgendir.



Bir dış açı ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ve

bir iç açı ölçüsü $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ olur.

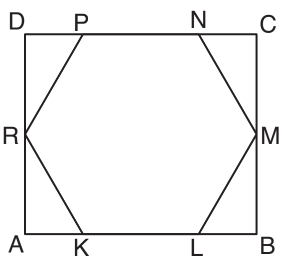
Çevrel çemberin merkezi olan O noktası, düzgün altıgenin de ağırlık merkezidir.

OAB, OBC, OCD, ODE, OEF ve OAF birbirine eş eşkenar üçgenlerdir. Düzgün çokgende bir kenar uzunluğu a ise,

$|AD| = |BE| = |CF| = 2a$ olur ve bu

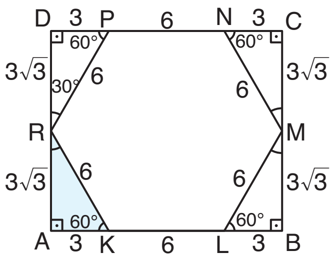
[AD], [BE] ve [CF] köşegenleri açıortaydır.

Örnek



Şekilde ABCD dikdörtgen ve KLMNPR düzgün altıgendir. Düzgün altıgenin çevresi 36 cm olduğuna göre A(ABCD) kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Düzgün altıgenin tüm kenarları eşit uzunlukta ve çevresi 36 cm olduğundan bir kenar uzunluğu;

$|KL| = |LM| = |MN| = |NP| = |PR| = |RK| = 6$ cm olur.

Düzgün altıgenden bir dış açı ölçüsü $\beta = \dfrac{360°}{6} = 60°$

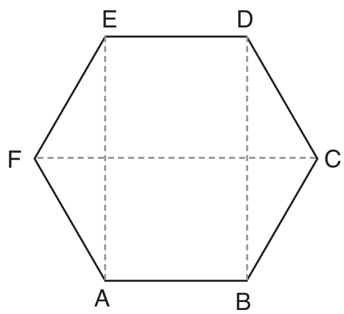
olduğundan şekildeki AKR özel dik üçgeninde $|AK| = 3$ cm, ve $|AR| = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

A.K.A. eşlik kuralına göre $\widehat{AKR} \cong \widehat{BLM} \cong \widehat{CNM} \cong \widehat{DPR}$ olduğundan,

$|LB| = |CN| = |DP| = |AK| = 3$ cm ve $|AR| = |BM| = |CM| = |DR| = 3\sqrt{3}$ cm olur.

Sonuçta $A(ABCD) = |AB|.|BC| = 12.(6\sqrt{3}) = 72\sqrt{3}$ cm^2 bulunur.

Örnek

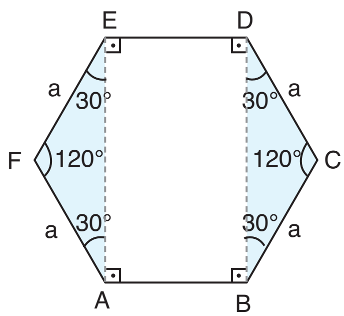


a. Yandaki ABCDEF düzgün altıgen ise, ABDE dörtgeninin bir dikdörtgen olduğunu gösterelim.

b. Düzgün altıgenin bir kenar uzunluğu 4 cm ise, |AE| kaç cm olur? Bulalım.

Çözüm

a.

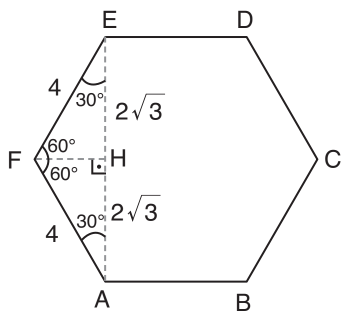


Düzgün altıgende bir dış açı ölçüsü $\dfrac{360°}{6} = 60°$ ve bir iç açı ölçüsü $180° - 60° = 120°$ olduğundan AFE ve BCD ikizkenar üçgenlerinde taban açıları 30° bulunur. Buradan,

$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAE}) = 120° - 30° = 90°$

olduğundan ABDE dikdörtgendir.

b.



AFE ikizkenar üçgeninde $[FH] \perp [AE]$ çizilirse,

$|AH| = |EH|$ ve $m(\widehat{EFH}) = m(\widehat{AFH}) = 60°$ olur.

EFH özel dik üçgeninde,

$|EF| = 4$ cm $\Rightarrow |FH| = 2$ cm ve $|EH| = 2\sqrt{3}$ cm bulunur. Sonuçta

$|AE| = 2|EH| = 2.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm olur.

Alıştırmalar

1. İç açı ölçülerinin toplamı, dış açı ölçülerinin toplamının 3 katı olan çokgende kenar sayısı kaçtır?

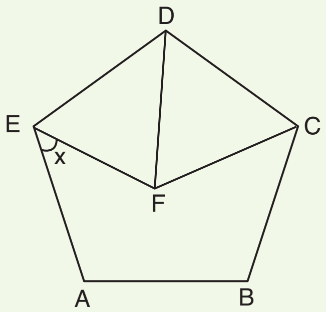
2. Dışbükey bir beşgende dış açı ölçüleri 1, 2, 3, 4 ve 5 sayıları ile orantılıdır. Buna göre bu çokgende en büyük iç açının ölçüsü kaç derecedir?

3. Bir dışbükey çokgende iç açı ölçülerinden en çok kaç tanesi dar açı olabilir?

4. İç açı ölçüleri toplamı 900° olan dışbükey çokgende belli bir köşeden geçen köşegenler ile kaç tane üçgen oluşur?

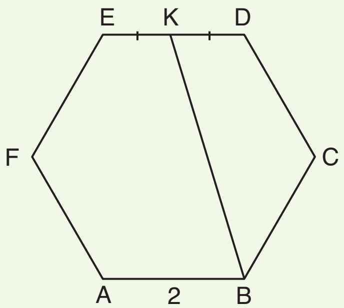
5. Bir iç açısının ölçüsü 150° olan düzgün çokgen kaç kenarlıdır?

6.



ABCDE düzgün beşgen, CDF eşkenar üçgen olduğuna göre, $m(\widehat{AEF}) = x$ kaç derecedir?

7.

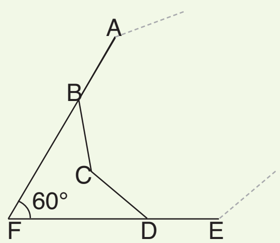


ABCDEF düzgün altıgen

|DK| = |KE|, |AB| = 2 cm olduğuna göre,

|BK| kaç cm dir?

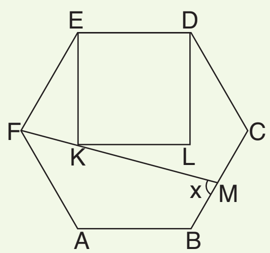
8.



ABCDE … bir düzgün çokgen $m(\widehat{AFE}) = 60°$ ise,

ABCDE … düzgün çokgeninde kenar sayısı kaçtır?

9.



ABCDEF düzgün altıgen DEKL kare ise,

$m(\widehat{FMB}) = x$ kaç derecedir?